



Гиперболалық теңдеуге қойылған бастапқы-шеттік есепті Галеркин әдісімен шешу

Орындаған:

Асқар.Д.И



Мақсат

Гиперболалық теңдеуге қойылған
бастапқы-шеттік есепті Галеркин
әдісін пайдаланып сандық әдіс
арқылы жуық шешімін табу;

Есептің қойылымы



$$D = \{(x, t) \in R^2 : a \leq x \leq b, t \geq 0\}$$

$$L[u(x, t)] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - K_1(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - K_2(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \beta(x, t)u = g(x, t), \quad (1)$$

Шеттік шарттары

$$\begin{cases} a_0 u(a, t) + a_1 \frac{\partial u(a, t)}{\partial x} = a_2(t), \\ b_0 u(b, t) + b_1 \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = b_2(t), \end{cases} \quad (2)$$

Бастапқы шарттары

$$u(x, 0) = f(x), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x), \quad (4)$$

және $\gamma(x,t)$, $K_1(x,t)$, $(K_1 \geq 0)$, $K_2(x,t)$, $\beta(x,t)$, $g(x,t) - D$ облысындағы
үзіліссіз функциялар;

$a_2(t)$, $b_2(t) - [0, \infty)$ аралығында дифференциалданатын функциялар;

a_0, a_1, b_0, b_1 — берілген нақты сандар, және $a_0^2 + a_1^2 > 0$, $b_0^2 + b_1^2 > 0$

$f(x)$ — берілген функция, $f'(x)$ — мен бірге $[a, b]$ — да үзіліссіз және

Мына шарттарды қанағаттандырады

$$\begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) = a_2(0), \\ b_0 f(b) + b_1 f'(b) = b_2(0); \end{cases}$$

$\varphi(x)$ – берілген функция, $[a, b]$ – да үзіліссіз және
мына шарттарды қанағаттандырады

$$\begin{cases} a_0 \varphi(a) + a_1 \varphi'(a) = \frac{da_2(0)}{dt}, \\ b_0 \varphi(b) + b_1 \varphi'(b) = \frac{db_2(0)}{dt}. \end{cases}$$

D облысында қандай да бір жүйеде екі рет дифференциалданатын

$$u_0(x, t), u_1(x), \dots, u_n(x)$$

$u_0(x, t)$ – (2) шеттік шарттарды қанағаттандыратындай

$u_i(x)$ ($i \geq 1$) сынақ функциялары $[a, b]$ -де

сызықты тәуелсіз және біртекті шеттік

$$\begin{cases} a_0 u(a) + a_1 u'(a) = 0, \\ b_0 u(b) + b_1 u'(b) = 0. \end{cases}$$

шарттарды қанағаттандыратындай аламыз.

$$u_n(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{k=1}^n v_k(t) u_k(x) \quad (5)$$

$u_n(x, t)$ — ті (1)-ші теңдеудегі $u(x, t)$ — нің орнына қойып R_1 сәйкессіздігін аламыз.

$$\begin{aligned} R_1(v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t), x, t) = & \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + \gamma(x, t) \frac{\partial v_k}{\partial t} \right) u_k(x) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \gamma(x, t) \frac{\partial u_0}{\partial t} - \\ & - K_1(x, t) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^n v_k u_k'' \right) - K_2(x, t) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \sum_{k=1}^n v_k u_k' \right) - \beta(x, t) \left(u_0 + \sum_{k=1}^n v_k u_k \right) - g(x, t) \end{aligned}$$

немесе

$$\begin{aligned} R_1(v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t), x, t) = & \sum_{k=1}^n u_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} - \gamma \sum_{k=1}^n u_k \frac{\partial v_k}{\partial t} - \sum_{k=1}^n \left(K_1 u_k'' + K_2 u_k' + \beta u_k \right) v_k - \\ & - \left(K_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial u_0}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

$u_n(x,0)$ – ді (3) бастапқы шартқа қойып

$$R_2(v_1(0), \dots, v_n(0), x) = u_0(x, 0) + \sum_{k=1}^n v_k(0) u_k(x) - f(x). \quad (6)$$

$u_n(x,0)$ – ді (4) бастапқы шартқа қойып

$$R_3(v_1^{\square}(0), \dots, v_n^{\square}(0), x) = \frac{\partial u_0(x, 0)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n v_k^{\square}(0) u_k(x) - \varphi(x). \quad (7)$$

R_2, R_3 – сәйкессіздіктерін аламыз

$v_k(t)$ — Функциясы және $v_k(0)$, $w_k(0)$, бастапқы мәндерінде

Сәйкессіздік аз болатындай етіп қосымша шарттар береміз

Жалпылама Галеркин әдісінде бұл шарттар

$$(R_1(v_1(t), \dots, v_n(t), x, t), w_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad (8)$$

$$(R_2(v_1(0), \dots, v_n(0), x), w_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad (9)$$

$$(R_3(w_1(0), \dots, w_n(0), x), w_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad (10)$$

Теңдеулер жүйесімен анықталынады

$$(V(x), W(x)) = \int_a^b V(x)W(x)dx$$

(8) шартты ашып жазсақ

$$\left(\sum_{j=1}^n u_j(x) \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^n \gamma u_j \frac{\partial v_j}{\partial t} - \sum_{j=1}^n (K_1 u_j'' + K_2 u_j' + \beta u_j) v_j - \right. \\ \left. - \left(K_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g(x, t) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial u_0}{\partial t} \right), w_k(x) \right) = 0,$$

$$\left(\sum_{j=1}^n (u_j, w_k) \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^n (\gamma u_j, w_k) \frac{\partial v_j}{\partial t} - \sum_{j=1}^n (K_1 u_j'' + K_2 u_j' + \beta u_j, w_k) v_j - \right. \\ \left. - \left(K_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g(x, t) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial u_0}{\partial t} \right), w_k(x) \right) = 0,$$

hence

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \frac{d^2 v_j}{dt^2} + \sum_{j=1}^n h_{kj} \frac{dv_j}{dt} - \sum_{j=1}^n c_{kj} v_j = b_k, \quad k = \overline{1, n}; (11)$$

$$a_{kj} = (u_j, w_k) = \int_a^b u_j(x) w_k(x) dx, \quad (12)$$

$$h_{kj}(t) = \int_a^b \gamma(x, t) u_j(x) w_k(x) dx$$

$$c_{kj}(t) = \int_a^b \left(K_1 u_j'' + K_2 u_j' + \beta u_j \right) w_k dx,$$

$$b_k(t) = \int_a^b \left(K_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta u_0 + g(x, t) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) w_k(x) dx ,$$

$$k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

$$A = (a_{kj})_n, \quad H = (h_{kj})_n, \quad C = (c_{kj})_n, \quad B = (b_k)_{n,1}, \quad V = (v_j)_{n,1},$$

$$A \frac{d^2 V}{dt^2} = -H \frac{dV}{dt} + CV + B.$$

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = A^{-1} \left(-H \frac{dV}{dt} + CV + B \right). \quad (13)$$

(9)-шы шартты ашып жазатын болсақ

$$\left(u_0(x,0) + \sum_{j=1}^n v_j(0)u_j(x) - f(x), w_k(x) \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^n (u_j(x), w_k(x))v_j(0) + (u_0(x,0) - f(x), w_k(x)) = 0$$

немесе

$$\sum_{j=1}^n (u_j(x), w_k(x))v_j(0) = (f(x) - u_0(x,0), w_k(x)), \quad k = \overline{1, n};$$

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}v_j(0) = d_k, \quad k = \overline{1, n}; \quad (14)$$

$$d_k = (f(x) - u_0(x,0), w_k(x)) = \int_a^b (f(x) - u_0(x,0)) w_k(x) dx$$

$$D = (d_k)_{n,1}$$

(9)-шы формуладан

$$V(0) = A^{-1} D \quad (13)$$

Енді (10)-шы формуланы ашып жазсақ

$$\left(\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{dv_j(0)}{dt} u_j(x) - \varphi(x), w_k(x) \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^n \left(u_j(x), w_k(x) \right) \frac{dv_j(0)}{dt} + \left(\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial t} - \varphi(x), w_k(x) \right) = 0$$

немесе

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \frac{dv_j(0)}{dt} = r_k, \quad k = \overline{1, n}; \quad (14)$$

$$r_k = \left(\varphi(x) - \frac{\partial u_0(x,0)}{\partial t}, w_k(x) \right) = \int_a^b \left(\varphi(x) - \frac{\partial u_0(x,0)}{\partial t} \right) w_k(x) dx$$

$R = (r_k)_{n,1}$ Матрицасын енгізіп

$$\frac{dV(0)}{dt} = A^{-1} R. \quad (15)$$

Осылайша (5)-тің сынақ шешімін анықтайтын $v_k(t)$, $k = \overline{1, n}$;

функциясын табу үшін (13) және (15) бастапқы шарттары бар 2-ші ретті сызықты жай дифференциалдық теңдеудің канондық жүйесіне Коши есебін аламыз. Берілген Коши есебін шешіп және осы шешіммен анықталынатын $v_k(t)$ функцияларын (5)-ке қойып, $u_n(x, t)$ сынақ шешімнің құрылуын аяқтаймыз.

$$D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, t \geq 0\}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}U + \gamma(x, t) \cdot \frac{d}{dt}U - K1(x, t) \cdot \frac{d^2}{dx^2}U - K2(x, t) \cdot \frac{d}{dx}U - \beta(x, t) \cdot U = g(x, t)$$

+

$$a_0 \cdot U(a, t) + a_1 \cdot \frac{d}{dx}U(a, t) = a_2(t)$$

$$b_0 \cdot U(b, t) + b_1 \cdot \frac{d}{dx}U(b, t) = b_2(t)$$

$$U(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{d}{dt}U(x, 0) = \phi(x)$$

$$c1 := 1 \quad c2 := 1 \quad c3 := 2 \quad c4 := 1$$

$$\gamma(x) := 0 \quad K1(x) := c1 \quad K2(x) := 0 \quad \beta(x) := 0 \quad g(x) := 0$$

$$a := 0 \quad b := \pi$$

$$a0 := 1 \quad a1 := 0 \quad a2 := c2 \quad b0 := 1 \quad b1 := 0 \quad b2 := c3$$

$$\phi(x) := 0 \quad f(x) := c4 \cdot x^2 + \frac{c3 - c2 - c4 \cdot b^2}{b} \cdot x + c2$$

$$f(x) \rightarrow x^2 + \frac{(1 - \pi^2)}{\pi} \cdot x + 1$$

U1 =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.212	0.222	0.252	0.302	0.364	0.427	0.49	0.553	0.616	0.679
2	-0.379	-0.369	-0.339	-0.289	-0.219	-0.129	-0.019	0.106	0.231	0.357
3	-0.773	-0.763	-0.733	-0.683	-0.613	-0.523	-0.413	-0.283	-0.133	0.038
4	-0.969	-0.959	-0.929	-0.879	-0.809	-0.719	-0.609	-0.479	-0.329	-0.159
5	-0.967	-0.957	-0.927	-0.877	-0.807	-0.717	-0.607	-0.477	-0.327	-0.157
6	-0.769	-0.759	-0.729	-0.679	-0.609	-0.519	-0.409	-0.279	-0.129	0.041
7	-0.373	-0.363	-0.333	-0.283	-0.213	-0.123	-0.013	0.117	0.267	0.438
8	0.221	0.231	0.261	0.311	0.381	0.471	0.581	0.706	0.831	0.957
9	1.012	1.022	1.052	1.102	1.164	1.227	1.29	1.353	1.416	1.479
10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Дәл шешім

Жуық шешім

U2 =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.212	0.223	0.255	0.304	0.362	0.425	0.489	0.55	0.61	0.67	0.733
2	0.379	0.369	0.339	0.288	0.217	0.128	0.022	0.097	0.225	0.357	0.489
3	0.773	0.763	0.735	0.687	0.616	0.523	0.406	0.269	0.116	0.051	0.225
4	0.969	0.959	0.929	0.879	0.809	0.719	0.609	0.479	0.329	0.158	0.034
5	0.967	0.957	0.925	0.873	0.804	0.716	0.612	0.488	0.342	0.173	0.022
6	0.769	0.759	0.729	0.679	0.609	0.519	0.409	0.279	0.129	0.042	0.234
7	0.373	0.363	0.335	0.287	0.216	0.123	-10^{-3}	0.131	0.284	0.451	0.625
8	0.221	0.231	0.261	0.312	0.383	0.472	0.578	0.697	0.825	0.957	1.089
9	1.012	1.023	1.055	1.104	1.162	1.225	1.289	1.35	1.41	1.47	1.533
10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

$$U12 := U1 - U2$$

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$3.521 \cdot 10^{-3}$	$-1.54 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$1.737 \cdot 10^{-3}$	$1.463 \cdot 10^{-3}$	$3.074 \cdot 10^{-3}$	$6.169 \cdot 10^{-3}$	$8.633 \cdot 10^{-3}$	$8.132 \cdot 10^{-3}$
2	$-3.43 \cdot 10^{-4}$	$1.152 \cdot 10^{-3}$	$1.546 \cdot 10^{-3}$	$1.248 \cdot 10^{-3}$	$3.213 \cdot 10^{-3}$	$8.642 \cdot 10^{-3}$	$6.482 \cdot 10^{-3}$	$1.776 \cdot 10^{-5}$	$-6.55 \cdot 10^{-3}$
3	$2.708 \cdot 10^{-3}$	$4.367 \cdot 10^{-3}$	$3.71 \cdot 10^{-3}$	$1.937 \cdot 10^{-4}$	$6.303 \cdot 10^{-3}$	-0.013	-0.017	-0.013	$9.132 \cdot 10^{-4}$
4	$1.066 \cdot 10^{-4}$	$2.333 \cdot 10^{-4}$	$1.243 \cdot 10^{-5}$	$2.418 \cdot 10^{-4}$	$6.54 \cdot 10^{-4}$	$5.829 \cdot 10^{-4}$	$1.019 \cdot 10^{-4}$	$1.167 \cdot 10^{-3}$	$2.386 \cdot 10^{-3}$
5	$-2.51 \cdot 10^{-3}$	$3.888 \cdot 10^{-3}$	$3.765 \cdot 10^{-3}$	$8.864 \cdot 10^{-4}$	$4.213 \cdot 10^{-3}$	0.01	0.015	0.016	0.01
6	$1.066 \cdot 10^{-4}$	$2.333 \cdot 10^{-4}$	$1.243 \cdot 10^{-5}$	$2.418 \cdot 10^{-4}$	$6.54 \cdot 10^{-4}$	$5.829 \cdot 10^{-4}$	$1.019 \cdot 10^{-4}$	$1.167 \cdot 10^{-3}$	$2.386 \cdot 10^{-3}$
7	$2.708 \cdot 10^{-3}$	$4.367 \cdot 10^{-3}$	$3.71 \cdot 10^{-3}$	$1.937 \cdot 10^{-4}$	$6.303 \cdot 10^{-3}$	-0.013	-0.017	-0.013	$9.132 \cdot 10^{-4}$
8	$-3.43 \cdot 10^{-4}$	$1.152 \cdot 10^{-3}$	$1.546 \cdot 10^{-3}$	$1.248 \cdot 10^{-3}$	$3.213 \cdot 10^{-3}$	$8.642 \cdot 10^{-3}$	$6.482 \cdot 10^{-3}$	$1.776 \cdot 10^{-5}$	$-6.55 \cdot 10^{-3}$
9	$3.521 \cdot 10^{-3}$	$-1.54 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$1.737 \cdot 10^{-3}$	$1.463 \cdot 10^{-3}$	$3.074 \cdot 10^{-3}$	$6.169 \cdot 10^{-3}$	$8.633 \cdot 10^{-3}$	$8.132 \cdot 10^{-3}$
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$K12 := \max(|\max(U12 \langle 10 \rangle)|, |\min(U12 \langle 10 \rangle)|)$$

$$K12 = 0.01$$

Пайдаланылган әдебиеттер

1. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов-Алгоритмы методов взвешенных невязок в системе MATHCAD
2. С.Ю Игнатович-Метод Галеркина решения линейных граничных задач для дифференциальных уравнений
3. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения. — Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1965