Задание на 09.02

- Сделать конспект, используя презентацию.
- Записать решенные задачи, разобраться в их решении.
- Выполнить задания для самостоятельной работы

09.02.2022

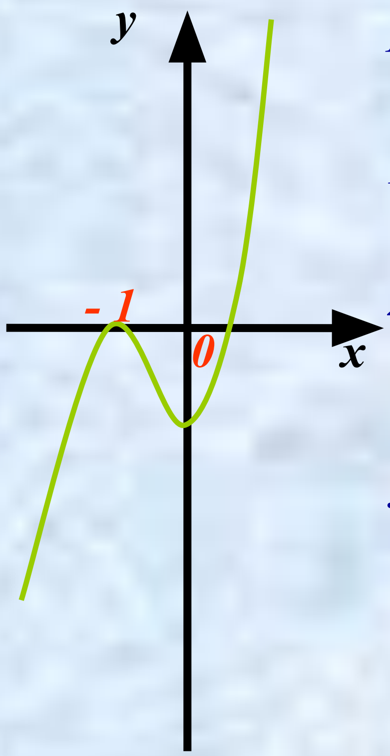
Пример: Исследовать на монотонность функцию $y=2x^3+3x^2-1$.

$$f'(x)=6x^2+6x=6x\,(x+1)$$

f'(x)
+
—
+
f(x)
-1
0
x

Точки экстремума функции и их нахождение

Рассмотрим график функции $y=2x^3+3x^2-1$



На графике две уникальные точки: (-1;0) и (0;-1). В этих точках:

1) *происходит изменение характера монотонности функции;*

2) *касательная к графику функции параллельна оси X (или совпадает с осью X), т.е. производная функции в каждой из указанных точек равна нулю;*

3) *f(-1) – наибольшее значение функции, но не во всей области определения, а по сравнению со значениями функции из некоторой окрестности точки x = - 1. Также f(0) – наименьшее значение функции в окрестности точки x=0*

Определение 1. Точку $x=x_0$ называют **точкой минимума функции $y = f(x)$**, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x=x_0$) выполняется неравенство

$$f(x)>f(x_0).$$

Определение 2. Точку $x=x_0$ называют **точкой максимума функции $y = f(x)$**, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x=x_0$) выполняется неравенство

$$f(x)<f(x_0).$$

Теорема 4. ***Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x=x_0$, то этой точке производная либо равна нулю, либо не существует.***

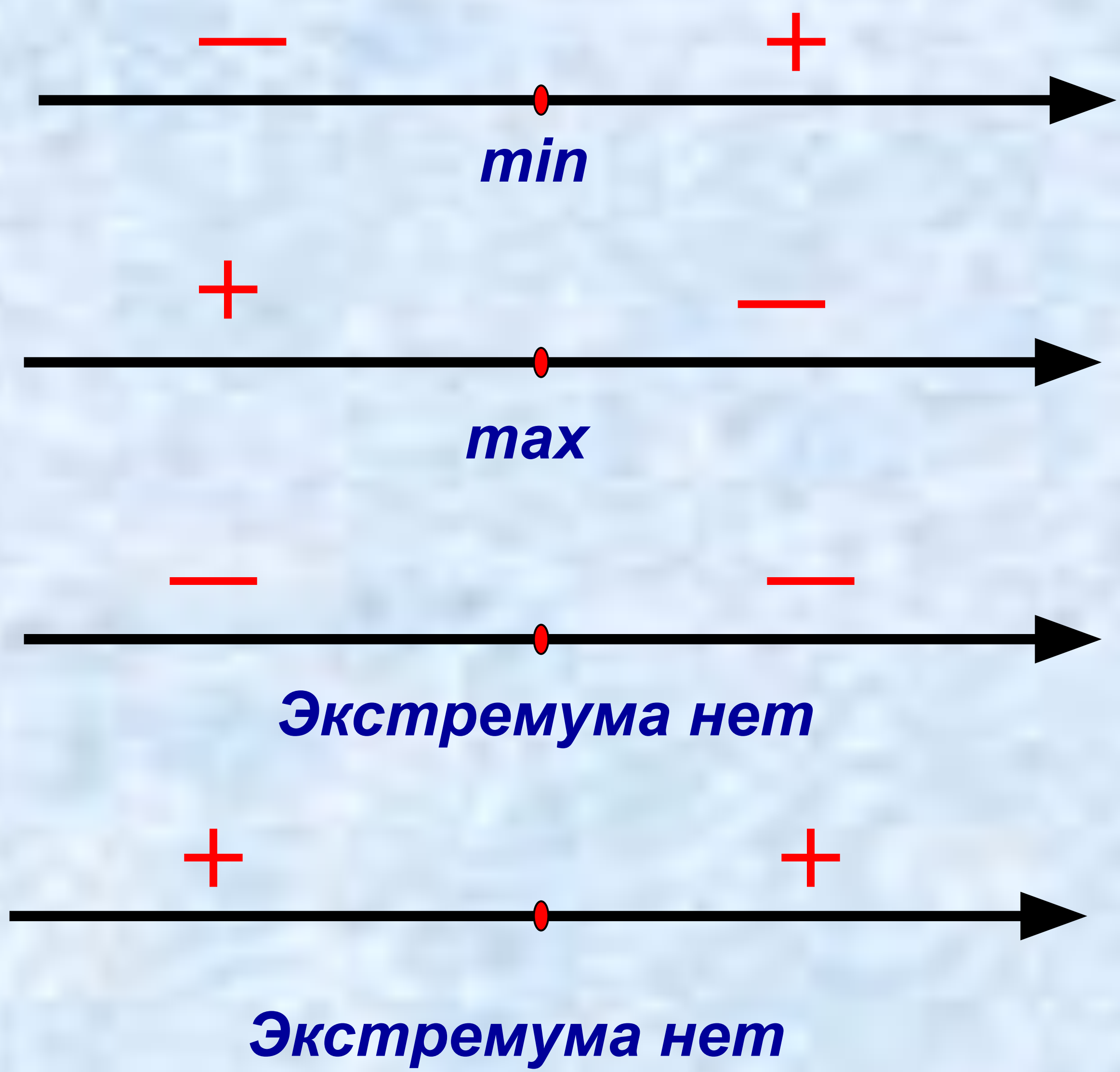
Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называют стационарными, а внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует – критическими.

Теорема 5 (достаточные условия экстремума). **Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x=x_0$. Тогда:**

1) **Если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x<x_0$, выполняется неравенство** ***$f^1(x)<0$, при $x>x_0$ – неравенство $f^1(x)>0$, то $x=x_0$ – точка минимума функции $y=f(x)$;***

2) ***Если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x<x_0$ выполняется неравенство $f^1(x)>0$, а при $x>x_0$ – неравенство $f^1(x)<0$, то $x=x_0$ – точка максимума функции $y=f(x)$;***

3) ***Если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.***



− +
min
+ −
max
− −
Экстремума нет
+ +
Экстремума нет

Алгоритм исследования непрерывной функции $y=f(x)$ на монотонность и экстремумы:

1. ***Найти производную $f^{1}(x)$.***
2. ***Найти стационарные ($f^{1}(x)=0$) и критические ($f^{1}(x)$ не существует) точки функции $y=f(x)$.***
3. ***Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.***
4. ***На основании теорем 1, 2, и 5 сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.***

Пример: Найти точки экстремума функции

$y=3x^4 – 16x^3 + 24x^2 – 11.$

Решение: ***найдем производную данной функции:*** $y^1=12x^3 – 48x^2 + 48x.$

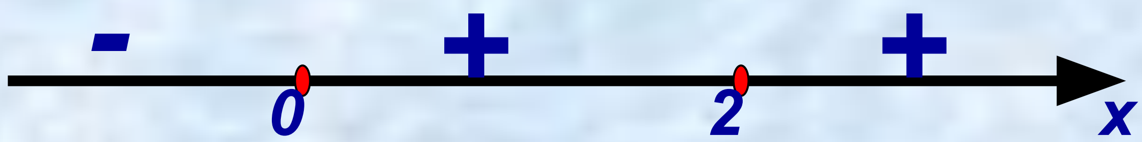
Найдем стационарные точки:

$$12x^3 – 48x^2 + 48x=0$$

$$12x(x^2 – 4x + 4)=0$$

$$12x(x – 2)^2=0$$

Производная обращается в нуль в точках $x=0$ и $x=2$

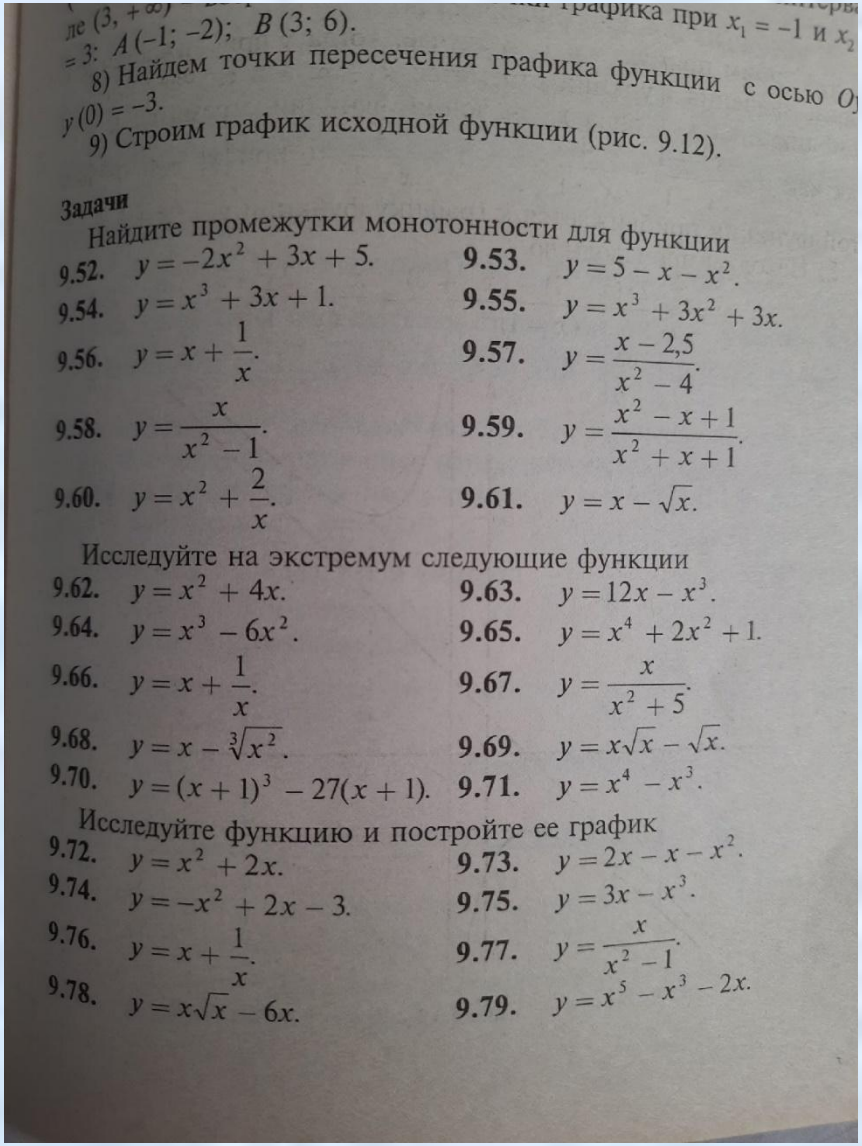


Значит, $x=0$ – точка минимума.

Ответ: $y_{min}= - 11.$

Решите задачи самостоятельно

- № 9.52-9.55, 9.62-9.65



ле $(3, +\infty)$ ... графика при $x_1 = -1$ и x_2
$= 3$: $A(-1; -2)$; $B(3; 6)$.

8) Найдем точки пересечения графика функции с осью Oy: $y(0) = -3$.

9) Строим график исходной функции (рис. 9.12).

Задачи

Найдите промежутки монотонности для функции

9.52. $y = -2x^2 + 3x + 5$. **9.53.** $y = 5 - x - x^2$.

9.54. $y = x^3 + 3x + 1$. **9.55.** $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.

9.56. $y = x + \frac{1}{x}$. **9.57.** $y = \frac{x - 2,5}{x^2 - 4}$.

9.58. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$. **9.59.** $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

9.60. $y = x^2 + \frac{2}{x}$. **9.61.** $y = x - \sqrt{x}$.

Исследуйте на экстремум следующие функции

9.62. $y = x^2 + 4x$. **9.63.** $y = 12x - x^3$.

9.64. $y = x^3 - 6x^2$. **9.65.** $y = x^4 + 2x^2 + 1$.

9.66. $y = x + \frac{1}{x}$. **9.67.** $y = \frac{x}{x^2 + 5}$.

9.68. $y = x - \sqrt[3]{x^2}$. **9.69.** $y = x\sqrt{x} - \sqrt{x}$.

9.70. $y = (x+1)^3 - 27(x+1)$. **9.71.** $y = x^4 - x^3$.

Исследуйте функцию и постройте ее график

9.72. $y = x^2 + 2x$. **9.73.** $y = 2x - x - x^2$.

9.74. $y = -x^2 + 2x - 3$. **9.75.** $y = 3x - x^3$.

9.76. $y = x + \frac{1}{x}$. **9.77.** $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

9.78. $y = x\sqrt{x} - 6x$. **9.79.** $y = x^5 - x^3 - 2x$.