

1. Матрицы

1.1. Определение матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m, n – порядки матрицы

1.2. Квадратные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.4. Транспонирование матриц

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Пример транспонирования

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 8 \\ -3 & -2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & -3 \\ -5 & 0 & 7 & -2 \\ 3 & 10 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$

2. Операции над матрицами

2.1. Матричное сложение

$$A + B = C$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+0 \\ 3+6 & -1+3 \\ 4+(-2) & -2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2. Умножение матрицы на число

$$k \cdot A = B$$

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

2.3. Матричное произведение

$$A \cdot B = C$$

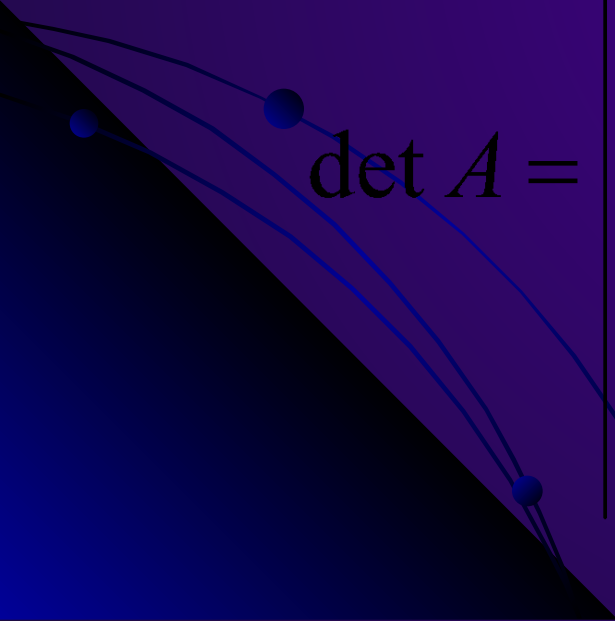
$$\tilde{n}_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 & 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \\ 4 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 & 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 7 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$$

Матрицы должны быть сопряженными!

3. Определители

Определитель – это число, дающее качественную характеристику матрицы.


$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

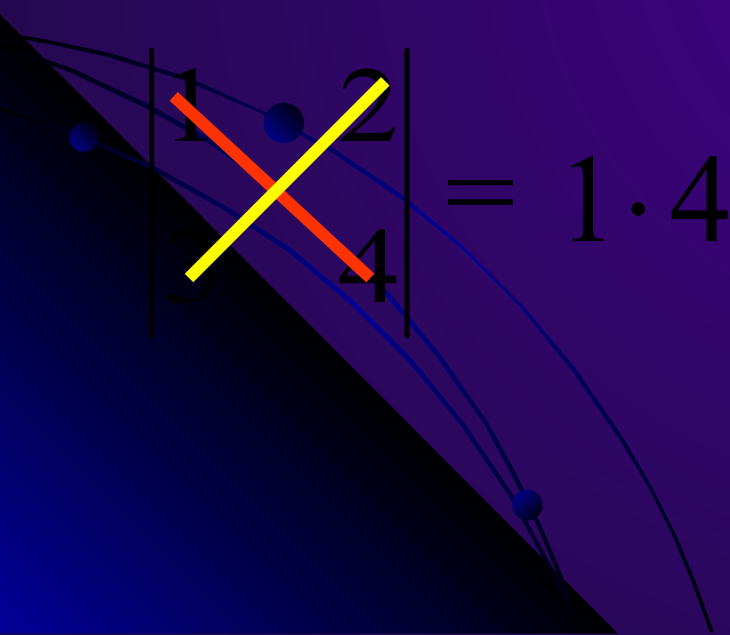
3.1. Нахождение определителей 1x1

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

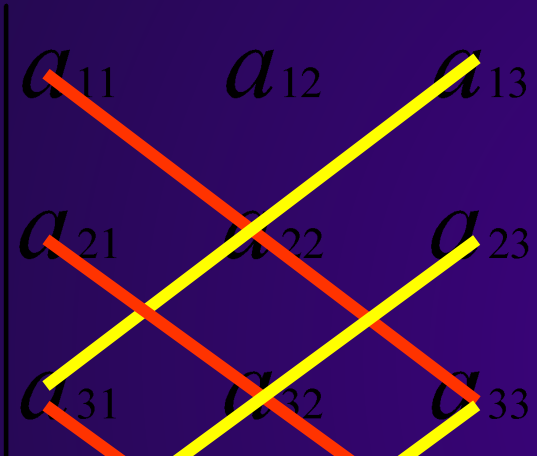
- $\det(-5) = |-5| = -5$

3.2. Нахождение определителей 2x2

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$


$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

3.3. Нахождение определителей 3x3


$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + \\ &+ a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + \\ &+ a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - \\ &- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - \\ &- a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - \\ &- a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} \end{aligned}$$

3.4. Миноры и алгебраические дополнения

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 5 - 12 = -7$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1) \cdot (-7) = 7$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} =$$
$$= 2 \cdot (-14) + 0 + 4 \cdot 7 = 0$$

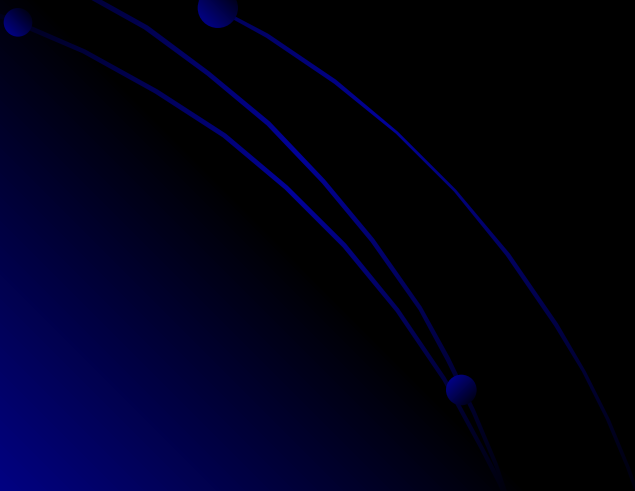
$$A_{32} = 7$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 24 - 10 = 14$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot 14 = -14$$

3.7. Обратная матрица

Обратной матрицей для данной квадратной матрицы A называется такая матрица A^{-1} , произведение матрицы A на которую справа и слева является единичной матрицей:



Метод нахождения обратной матрицы

Теорема. Для любой невырожденной квадратной матрицы существует обратная, и только одна, определяемая по формуле:

