1. Матрицы

1.1. Определение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m, n – порядки матрицы

1.2. Квадратные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.4. Транспонирование матриц

$$A^{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Пример транспонирования

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 8 \\ -3 & -2 & - \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & -3 \\ -5 & 0 & 7 & -2 \\ 3 & 10 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$

2. Операции над матрицами

2.1. Матричное сложение

$$A + B = C$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{-1} \\ \boxed{4} & \boxed{-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{0} \\ \boxed{6} & \boxed{3} \\ \boxed{-2} & \boxed{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1+2} & \boxed{2+0} \\ \boxed{3+6} & \boxed{-1+3} \\ \boxed{4+(-2)} & \boxed{-2+4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2. Умножение матрицы на число

$$k \cdot A = B$$

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

$$\boxed{3} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{-1} \\ \boxed{4} & \boxed{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3 \cdot 1} & \boxed{3 \cdot 2} \\ \boxed{3 \cdot 3} & \boxed{3 \cdot (-1)} \\ \boxed{3 \cdot 4} & \boxed{3 \cdot (-2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

2.3. Матричное произведение

$$A \cdot B = C$$

$$\tilde{n}_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ \boxed{3 \quad -1} \\ \boxed{4 \quad -2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1\cdot4+2\cdot0} & \boxed{1\cdot2+2\cdot(-1)} \\ \boxed{3\cdot4+(-1)\cdot0} & \boxed{3\cdot2+(-1)\cdot(-1)} \\ \boxed{4\cdot4+(-2)\cdot0} & \boxed{4\cdot2+(-2)\cdot(-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 7 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$$

Матрицы должны быть сопряженными!

3. Определители

Определитель – это число, дающее качественную характеристику матрицы.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

3.1. Нахождение определителей 1х1

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

- $\det(-5) = |-5| = -5$

3.2. Нахождение определителей 2х2

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

3.3. Нахождение определителей 3x3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} +$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$+ a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} +$$

$$+ a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} -$$

$$- a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11} -$$

$$- a_{33}\cdot a_{12}\cdot a_{21}$$

3.4. Миноры и алгебраические дополнения

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & \boxed{a_{ij}} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 5 - 12 = -7$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1) \cdot (-7) = 7$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = a_{12}\cdot A_{12} + \cancel{a_{22}\cdot A_{22}} + a_{32}\cdot A_{32} =$$

$$= 2\cdot(-14) + 0 + 4\cdot 7 = 0$$

$$A_{32} = 7$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot 6 - 5\cdot 2 = 24 - 10 = 14$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot M_{12} = (-1)\cdot 14 = -14$$

3.7. Обратная матрица

Обратной матрицей для данной квадратной матрицы ***A*** *называется такая матрица* $\boldsymbol{A^{-1}}$, *произведение матрицы* ***A*** *на которую справа и слева является единичной матрицей:*

Метод нахождения обратной матрицы

Теорема. Для любой невырожденной квадратной матрицы существует обратная, и только одна, определяемая по формуле: