Лекция 9

Динамические эконометрические модели

1. Модели авторегрессии и скользящей средней.
2. Модели с распределенным лагом.
3. Метод адаптивных ожиданий и частичной корректировки.

1. Модели авторегрессии и скользящей средней.

До сих пор рассматривались модели временных рядов, в которых в качестве объясняющей переменной или регрессора выступало время t .

В эконометрике широкое распростране-ние получили модели, в которых регрессора-ми выступают *лаговые переменные*, влияние которых характеризуется некоторым запаз-дыванием.

В качестве лаговых переменных могут выступать не только факторы, но и значения зависимой переменной, а также ошибки регрессии.

Такие модели называют *динамическими*, так как они в данный момент времени учитывают значения входящих в них переменных, относящихся как к текущему, так и к предыдущим моментам времени, т.е. они отражают динамику исследуемых переменных.

Выделяют два типа динамических моделей.

1. Модели, в которых лаговые значения переменных включены в модель. Это модели: *авторегрессии, скользящего среднего, с распределенным лагом.*

2. Модели, в которые включены переменные, характеризующие ожидаемый уровень результирующего признака или одного из факторов в момент времени t.

Этот уровень считается неизвестным и определяется с учётом информации, которой располагают в предыдущий момент времени. Различают модели такого типа: *аддитивных ожиданий, рациональных ожиданий, неполной корректировки.*

Модели авторегрессии – это класс моделей временных рядов, в которых теку-щее значение моделируемой переменной задаётся линейной функцией от прошлых значений самой этой переменной:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \ldots + \beta_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Модель (1) называют *автoрегрессионной моделью* $p-$*го порядка* (англоязычное название $AR(p)$).

В уравнении (1) так называемый "белый шум", т.е. стационарный временной ряд с числовыми характеристиками: $M(\varepsilon_t) = 0,$

$$D(\varepsilon_t) = \sigma^2 = const, \; M(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}) = 0.$$

Коэффициент β_1 характеризует изменение признака y в момент t под воздействием своего увеличения на одну единицу своего измерения в предыдущий момент времени $(t-1)$.

Аналогично интерпретируются и другие коэффициенты $\beta_j, j = \overline{2, p}$ модели.

Применение МНК для оценки коэффициентов модели (1) неприемлемо из-за нарушений предпосылок нормальной регрессионной модели.

Поэтому оценки коэффициентов модели (1) определяются из следующей системы линейных уравнений, называемой системой *Юла-Уолкера*:

$$\begin{cases} r_1 = b_1 + b_2 r_1 + b_3 r_2 + \dots + b_p r_{p-1}, \\ r_2 = b_1 r_1 + b_2 + b_3 r_1 + \dots + b_p r_{p-2}, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ r_p = b_1 r_{p-1} + b_2 r_{p-2} + b_3 r_{p-3} + \dots \ b_p . \end{cases} \qquad (2)$$

В системе (2) выборочные коэффициенты автокорреляции r_i, $i=\overline{1,p}$ считаются известными, а неизвестными – оценки коэффициентов модели b_j, $j=\overline{1,p}$.

Оценка свободного члена уравнения β_0 определяется по формуле

$$b_0=\bar{\mu}(1-b_1-b_2-\ldots\ b_p),\quad \bar{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}y_t.$$

В частном случае, когда имеем модель первого порядка $AR(1)$:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \varepsilon_t ,$$

оценки коэффициентов модели находятся просто: $b_1 = r_1, b_0 = \overline{\mu}(1 - b_1)$.

В модель авторегрессии могут вклю-чаться и другие факторы в текущий момент времени. Например, авторегрессия первого порядка с фактором x :

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 x_t + \varepsilon_t .$$

В качестве порядка p модели $AR(p)$ можно рассматривать такое число p, начиная с которого все последующие оценки частных коэффициентов автокорреляции отклоняются от значения 0 не более чем на

$$\pm\frac{2}{\sqrt{n}},$$

т.е. $\left|r_{част}(k)\right| < \frac{2}{\sqrt{n}}$ для всех $k > p$.

Модель скользящей средней $q-$*порядка* (величина q определяет длительность "памяти" процесса) имеет вид:

$$y_t = \varepsilon_t + \gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \gamma_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \gamma_q \varepsilon_{t-q}, t = \overline{1, n}, \quad (3)$$

т.е. моделируемая величина y_t задаётся как функция от прошлых ошибок.

Англоязычное название модели (3) - $MA(q)$.

Для наиболее простой модели $MA(1)$

$$y_t = \varepsilon_t + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}$$

оценка d_1 коэффициента γ_1 получается из решения квадратного уравнения

$$d_1^2 + \frac{1}{r_1} d_1 + 1 = 0.$$

В эконометрике используются модели, которые являются сочетаниями авторегрессии с процессами скользящей средней, например,

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \dots + \beta_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \gamma_q \varepsilon_{t-q},$$

которые называют *авторегрессионной моделью скользящей средней* порядков (p, q), и в зарубежной литературе обозначаются $ARMA(p, q)$.

2. Модели с распределенным лагом.

Модели с распределенным лагом – это динамические эконометрические модели, в которых содержатся не только текущие, но и лаговые значения факторов:

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_l x_{t-l} + \varepsilon_t, \quad (4)$$

Эта модель позволяет определить влияние фактора x на результат y_t не только путём его изменения в текущий момент времени t, но и учитывать его изменения в предыдущие l моментов времени.

Например, если в почву внести стабильные удобрения, то они могут действовать на урожай в течение несколько лет (со снижением эффективности).

Коэффициент β_0 модели (4) называют *краткосрочным мультипликатором*, он характеризует среднее изменение y_t при увеличении x на одну единицу своего измерения в тот же момент времени t без учёта воздействия лаговых значений фактора x.

Сумма $\beta = \sum_{j=0}^{l} \beta_j$ называется *долгосрочным мультипликатором*, она характеризует среднее изменение y_t под воздействием единичного увеличения x в предыдущий момент времени $t-l$.

Для таких моделей вводят следующие показатели.

1. *Весовые коэффициенты*: $b_j = \beta_j / \beta, \quad j = \overline{0,l}$

Если все коэффициенты β_j положительны, то и каждый $\sum_{j=0}^{l} b_j = 1$ из них измеряет долю общего изменения результата . y_t

2. *Средний лаг* $\bar{l} = \sum_{j=0}^{l} j \cdot b_j = \sum_{j=1}^{l} j \cdot b_j$. Он представляет собой средний период, в течение которого происходит изменение результирующего признака при изменении x в момент $t - l$.

Если значение $\bar{l}$ небольшое, то y_t относительно быстро реагирует на изменение фактора x. В противном случае фактор x медленно воздействует на результат, и его воздействие будет сказываться в течение длительного времени.

3. *Медианный лаг* – это величина лага для l_M, которого выполняется равенство: $\sum_{j=0}^{l_M} b_j = 0{,}5$. Это тот период времени, в течение которого с момента $t - l$ будет реализована половина общего воздействия фактора на результат.

Модель с конечным числом лагов (4) можно оценить обычным МНК достаточно просто, если свести её к уравнению множественной регрессии путём введения новых переменных: $x'_0 = x_t, x'_1 = x_{t-1}, \ldots, x'_l = x_{t-l}$.

Однако использование МНК вызывает трудности по следующим причинам:

- высокая мультиколлинеарность объясняющих переменных;
- возникает проблема автокорреляции остатков.

Следствием этого является нестабильность оценок коэффициентов модели, снижение их точности и эффективности.

Для получения хороших оценок требу-ется дополнительная информация о струк-туре лага, под которой понимают зависимо-сти коэффициентов β_j от величины лага j.

Если эта зависимость описывается полиномом $k-$ой степени (рис. 1)

$$\beta_j = c_0 + c_1 \cdot j + c_2 \cdot j^2 + \dots + c_k \cdot j^k,$$

то такие модели с *полиномиальной* структурой лага называют *моделями Алмон*.

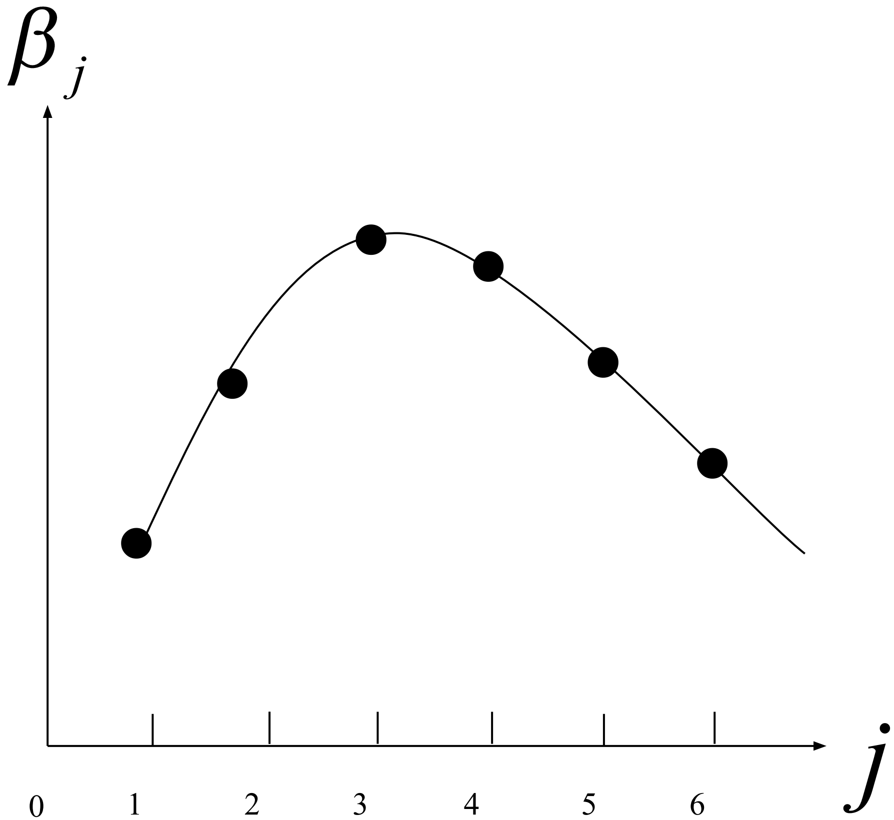

Рис. 1

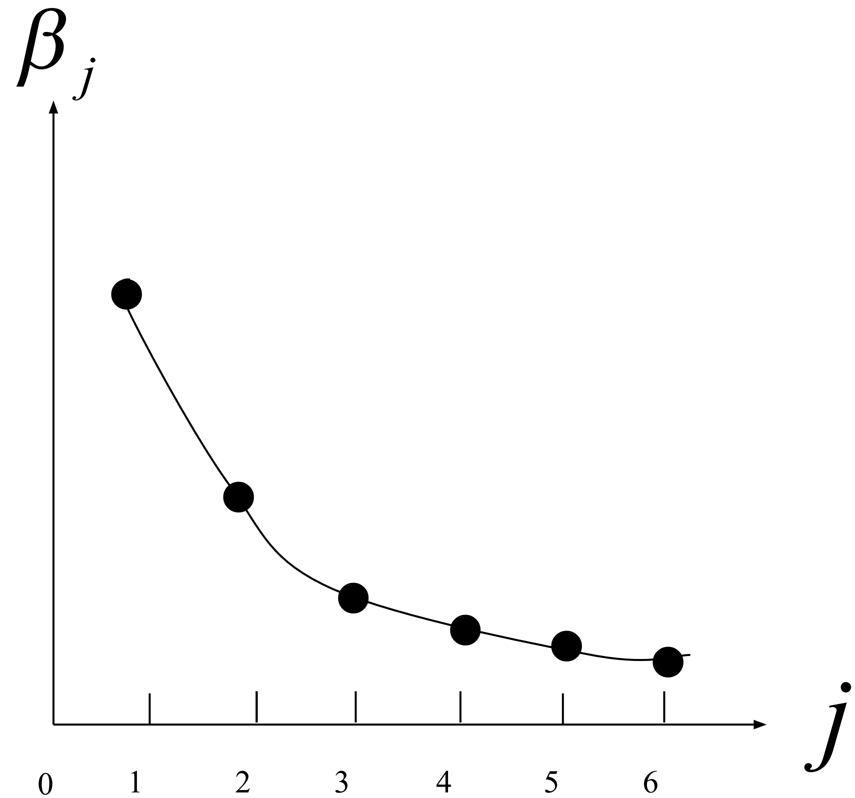

Рис. 2

Тогда каждый коэффициент модели (4) можно выразить следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\beta_0 &= c_0, \\
\beta_1 &= c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_k, \\
\beta_2 &= c_0 + 2c_1 + 4c_2 + \cdots + 2^k c_k, \\
\beta_3 &= c_0 + 3c_1 + 9c_2 + \cdots + 3^k c_k, \\
&\dots \\
\beta_l &= c_0 + l \cdot c_1 + l^2 \cdot c_2 + \cdots + l^k \cdot c_k.
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (4), после группировки слагаемых получим:

$$y_t = \alpha + c_0 \cdot \sum_{j=0}^{l} x_{t-j} + c_1 \cdot \sum_{j=0}^{l} j \cdot x_{t-j} + \dots + c_k \cdot \sum_{j=0}^{l} j^k \cdot x_{t-j} + \varepsilon_t.$$

Введя в рассмотрение новые переменные

$$z_0 = \sum_{j=0}^{l} x_{t-j},\ z_1 = \sum_{j=0}^{l} j \cdot x_{t-j},\ z_2 = \sum_{j=0}^{l} j^2 \cdot x_{t-j}, \dots, z_k = \sum_{j=0}^{l} j^k \cdot x_{t-j},$$

перепишем модель (4) в виде

$$y_t = \alpha + c_0 z_0 + c_1 z_1 + \dots + c_k z_k + \varepsilon_t. \quad (7)$$

Коэффициенты c_j модели (7) оцениваются обычным МНК, а затем по соотношениям (6) находятся оценки коэффициентов β_j, $j = \overline{0,l}$ исходной модели (4).

Проблема мультиколлинеарности переменных z_j здесь остаётся, однако она сказывается на оценках коэффициентов β_j, $j = \overline{0,l}$ в меньшей степени, чем в случае применения обычного МНК непосредственно к модели (4). Трудности в применении метода Алмон заключаются в обосновании выбора величины l и степени полинома k (обычно $k = 2,3$).

Другой подход для нахождения оценок коэффициентов предложил Койка для моделей с бесконечным лагом

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_l x_{t-l} + \dots + \varepsilon_t \quad (8)$$

и допущении о *геометрической* структуре лага, когда воздействие лаговых значений фактора на y_t уменьшается с увеличением лага в геометрической прогрессии (рис. 2)

$$\beta_j = \beta_0 \cdot \lambda^j, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (9)$$

Модель (8) в этом случае будет иметь вид:

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_0 \cdot \lambda x_{t-1} + \beta_0 \cdot \lambda^2 x_{t-2} + \dots \ \beta_0 \cdot \lambda^l x_{t-l} + \dots + \varepsilon_t . (10)$$

Для момента $(t-1)$ уравнение (10) запишется

$$y_{t-1} = \alpha + \beta_0 x_{t-1} + \beta_0 \cdot \lambda x_{t-2} + \beta_0 \cdot \lambda^2 x_{t-3} + \dots + \beta_0 \cdot \lambda^l x_{t-l-1} + \dots + \varepsilon_{t-1} . (11)$$

Умножая обе части уравнения (11) на λ и вычитая результат из (10), получим

$$y_t = \alpha(1-\lambda) + \beta_0 x_t + \lambda \cdot y_{t-1} + \xi_t , \ (12)$$

где $\xi_t = \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1}$.

Уравнение (12) называют *моделью Койка*, и оно представляет собой модель авторегрессии 1-го порядка. Оценивая её коэффициенты, находятся значения α, β_0, λ, а затем по формулам (9) и оценки коэффициентов β_j .

Для оценивания коэффициентов уравнения регрессии (12) может быть использован *метод инструментальных переменных*.

Его идея состоит в следующем.

Переменную y_{t-1} из правой части уравнения (12), для которой нарушается предпосылка МНК (y_{t-1} частично зависит от ε_{t-1} в силу связи (11) и поэтому коррелирует со слагаемым ($-\lambda \cdot \varepsilon_{t-1}$), входящим в ξ_t), заменяют на новую переменную, удовлетворяющую следующим требованиям:

- она должна тесно коррелировать с y_{t-1};
- она не должна коррелировать со случайной составляющей ε_t .

Затем оценивают регрессию с новой инструментальной переменной с помощью обычного МНК.

Например, в качестве инструментальной переменной можно взять

$$y'_{t-1} = d_0 + d_1 x_{t-1}.$$

Новая переменная y'_{t-1} тесно коррели-рует с y_{t-1} (если y_t зависит от x_t, то можно предположить, что y_{t-1} также зависит от x_{t-1}) и не коррелирует со случайной составляющей ε_t .

3. Метод адаптивных ожиданий и частичной корректировки.

Модель адаптивных ожиданий относят ко второму типу динамических моделей, когда учитывается не фактическое значение объясняющей переменной, а ожидаемое значение факторного признака x_{t+1}^*.

Примером может служить ожидаемое в период $(t+1)$ значение курса доллара x_{t+1}^*, которое влияет на наши инвестиции в текущем периоде y_t.

В общем виде модель адаптивных ожиданий записывается так

$$y_t = \alpha + \beta_0 x^*_{t+1} + \varepsilon_t . \quad (13)$$

Здесь y_t – фактическое значение результирующего признака, x^*_{t+1} – ожидаемое значение фактора. Схема формирования ожиданий в модели следующая:

$$x^*_{t+1} = \lambda \cdot x_t + (1-\lambda) x^*_t , \quad 0 \le \lambda \le 1,$$

т.е. значение ожидаемой переменной x^*_{t+1} формируется как среднее арифметическое взвешенное (с весом λ) её реального и ожидаемого значения в текущем периоде.

Параметр λ называют *коэффициентом ожиданий.*

Обычный МНК для оценивания коэффициентов модели (13) использовать нельзя. Поэтому исходную модель преобразуют в модель авторегрессии 1-го порядка

$$y_t = \lambda\alpha + \lambda\beta_0 x_t + (1-\lambda) y_{t-1} + \varepsilon_t', \quad \varepsilon_t' = \varepsilon_t - (1-\lambda)\varepsilon_{t-1}.$$

Определив параметры авторегрессии

$$\tilde{y}_t = b_0 + b_1 x_t + b_2 y_{t-1},$$

можно легко найти оценки исходной модели.

Для этого с помощью найденного параметра при переменной y_{t-1} вначале определяется λ, а затем рассчитывается оценки коэффициентов α и β_0:

$$\lambda = 1 - b_2, \quad \alpha = \frac{b_0}{\lambda}, \quad \beta_0 = \frac{b_1}{\lambda}.$$

В экономической практике встречаются ситуации, когда под воздействием фактора x формируется не сама величина y, а её идеальное, "желаемое" значение y^*.

Примером может служить модель **Линтнера**: фактический объем прибыли x_t оказывает влияние на величину желаемого объёма дивидендов y_t^* :

$$y_t^* = \alpha + \beta_0 x_t + \varepsilon_t. \quad (14)$$

Уравнение (14) называют *моделью частичной корректировки.*

В таких моделях предполагается, что фактическое приращение зависимой переменной $(y_t - y_{t-1})$ пропорционально разнице между её желаемым уровнем и фактическим значением в предыдущий период $(y_t^* - y_{t-1})$:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda(y_t^* - y_{t-1}) + \xi_t$$

или

$$y_t = \lambda \cdot y_t^* + (1-\lambda)y_{t-1} + \xi_t, \quad 0 \le \lambda \le 1.$$

Из этого следует, что y_t получается как среднее арифметическое взвешенное желаемого уровня y_t^* и фактического значения этой переменной в предыдущем периоде y_{t-1}.

Чем больше величина λ, тем быстрее происходит процесс корректировки.

Если $\lambda = 1$, то $y_t = y_t^*$ и полная корректировка выполняется за один период.

При $\lambda = 0$ корректировки y_t не происходит совсем.

Уравнение (15) также можно преобразовать в уравнение авторегрессии

$$y_t = \lambda\alpha + \lambda\beta_0 x_t + (1-\lambda)y_{t-1} + \varepsilon_t', \quad \varepsilon_t' = \xi_t + \lambda\varepsilon_t.$$

Коэффициенты преобразованного уравнения λ, α, β_0 могут быть оценены, как и в модели адаптивных ожиданий.

Следует отметить, что данная модель, как и в модели Койка, включает случайную составляющую y_{t-1} . Но теперь эта переменная не коррелирует с текущим значением ε_t' , поскольку ξ_t , так же как и ε_t рассчитываются после того как определилось значение y_{t-1}. Поэтому состоятельные и эффективные оценки коэффициентов уравнения (16) можно получить обычным МНК.