

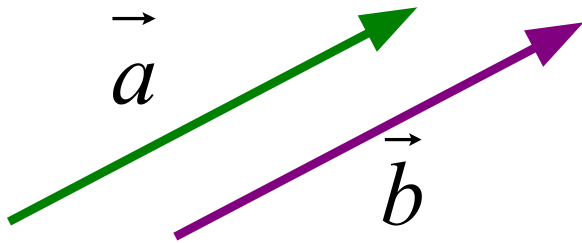
**Угол между векторами.  
Скалярное произведение  
векторов**

# Цели урока:

- *Ввести понятия угла между векторами и скалярного произведения векторов.*
- *Рассмотреть формулу скалярного произведения в координатах.*
- *Показать применение скалярного произведения векторов при решении задач.*

# Повторение:

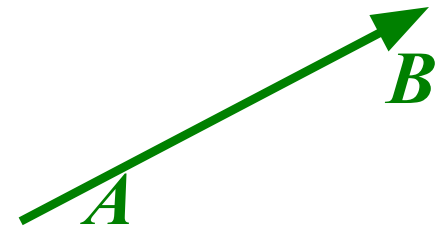
- *Какие векторы называются равными?*



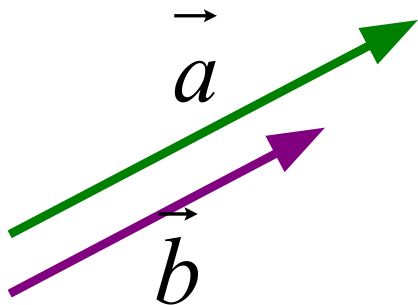
$$\vec{a} = \vec{b}, \text{ если } |\vec{a}| = |\vec{b}|; \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

- *Как найти длину вектора по координатам его начала и конца?*

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



- *Какие векторы называются коллинеарными?*



$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \text{ или } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \cdot x_2 \\ y_1 = \lambda \cdot y_2 \\ z_1 = \lambda \cdot z_2 \end{cases}$$

# Повторение. (Устно)

## Векторы в пространстве.

1) Дано:  $A(-3; -2; 4)$   $B(-4; 3; 2)$

Найти:  $|\vec{AB}|$

$\sqrt{50}$

2) Дано:  $A(2; -3; 1)$   $B(4; -5; 0)$   $C(5; 0; -4)$   $D(7; -2; -3)$

Равны ли векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$ ?

$\vec{AB}\{2; -2; -1\}$

$\vec{CD}\{2; -2; 1\}$

3) Дано: ? Коллинеарны ли векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$ ?

$A(1; -3; 4)$

$B(9; 1; -2)$

$C(2; 0; 1)$

$D(4; -2; 2)$

$\vec{AB}\{8; 4; -6\}$

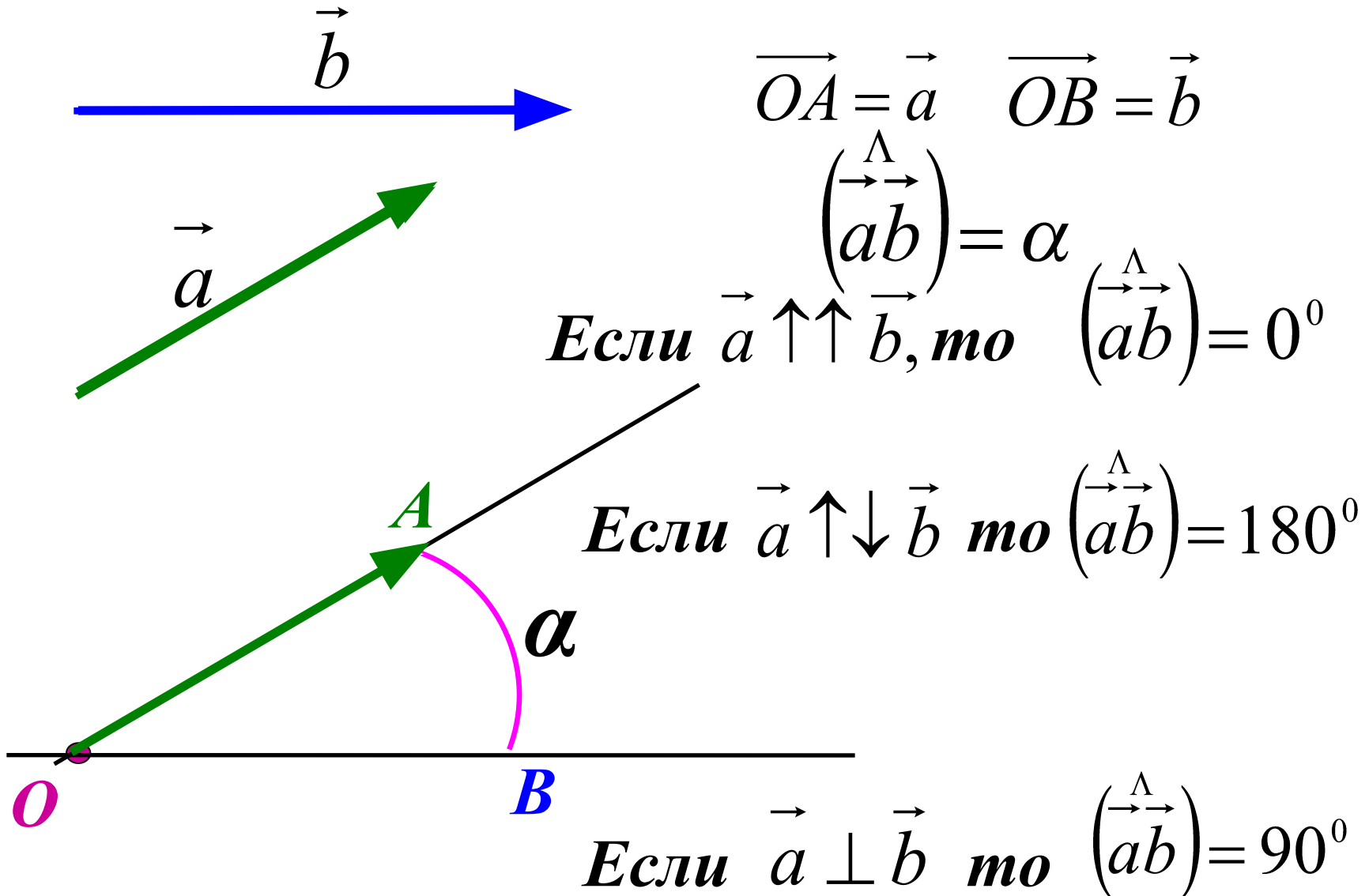
$\vec{CD}\{2; -2; 1\}$

Н

е

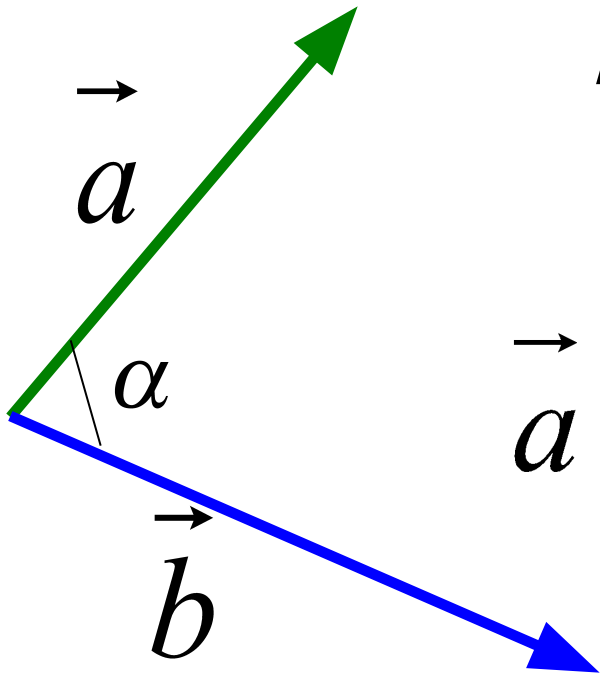
т

# Угол между векторами.



# Скалярное произведение векторов.

*Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.*



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

## Вспомним планиметрию...

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$

Если  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ , то  $\cos 180^\circ = -1 \Rightarrow \underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

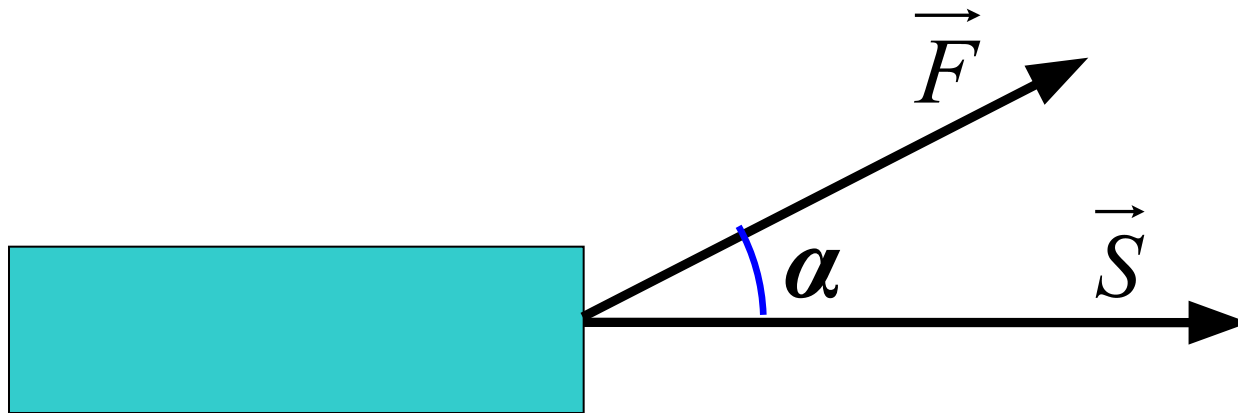
Если  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ , то  $\cos 0^\circ = 1 \Rightarrow \underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Если  $\vec{a} = \vec{b}$ , то  $\underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2 = a^2}$

Скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  называется

**скалярным квадратом вектора**

# Пример применения скалярного произведения векторов в физике.



Если  $(\vec{F} \vec{S}) = \alpha$ , то

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \alpha$$

**Скалярное произведение векторов.**



# Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

*Скалярное произведение двух векторов равно  
сумме произведений соответствующих  
координат этих векторов.*

# Косинус угла между ненулевыми векторами

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

# Решение задач.

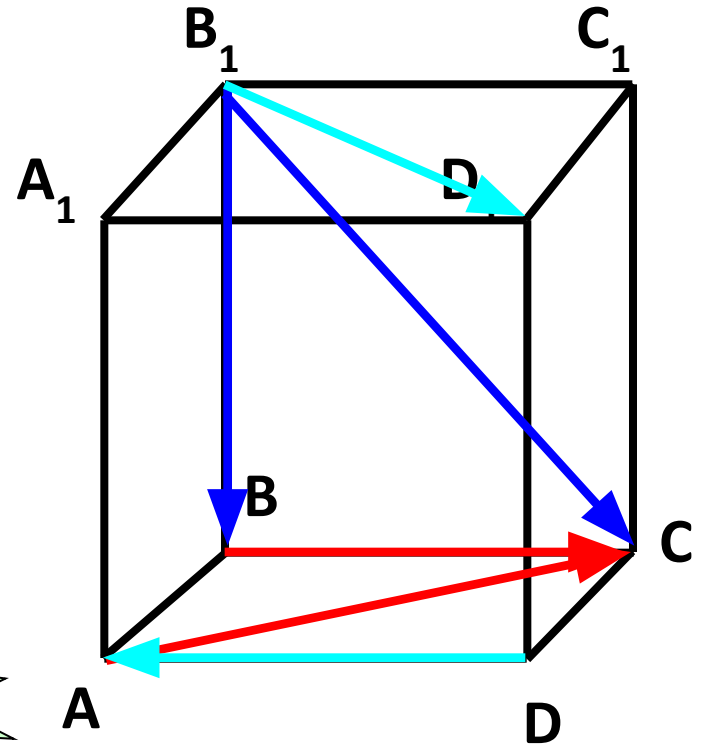
Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Найдите угол между векторами:

а)  $\vec{B_1 B}$  и  $\vec{B_1 C}$   $45^\circ$

б)  $\vec{BC}$  и  $\vec{AC}$   $45^\circ$

в)  $\vec{DA}$  и  $\vec{B_1 D_1}$   $135^\circ$



# № 443 (2)

Дано: куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ;

$$AB = a$$

Найти:  $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

**1 способ:**

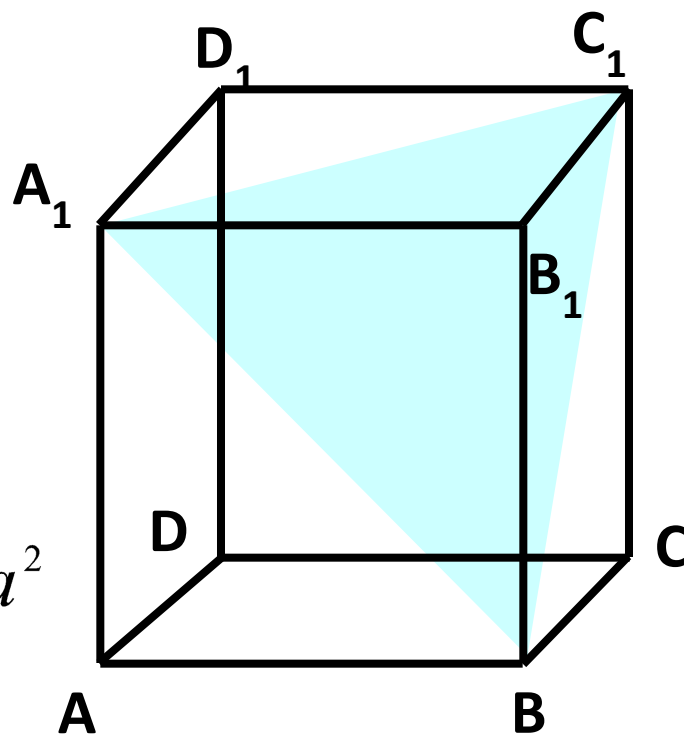
$\triangle BA_1 C_1$  – правильный

$$BA_1 = BC_1 = a\sqrt{2}$$

$$\left( \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BC_1} \right) = 60^\circ$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ = a^2$$

**Ответ:  $a^2$**



Дано: куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ;  
 $AB = a$

Найти:  $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

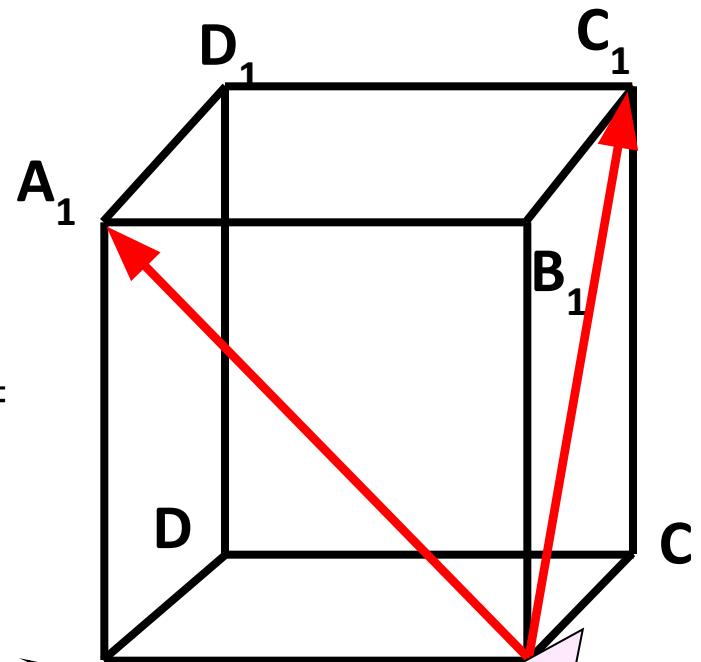
2 способ:

$$\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}$$

$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}$$

$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = ?$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}) = \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} + \\ &+ \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} = \\ &= 0 + 0 + 0 + a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a^2 \end{aligned}$$



Ответ:  $a^2$

**№ 443 (2)**

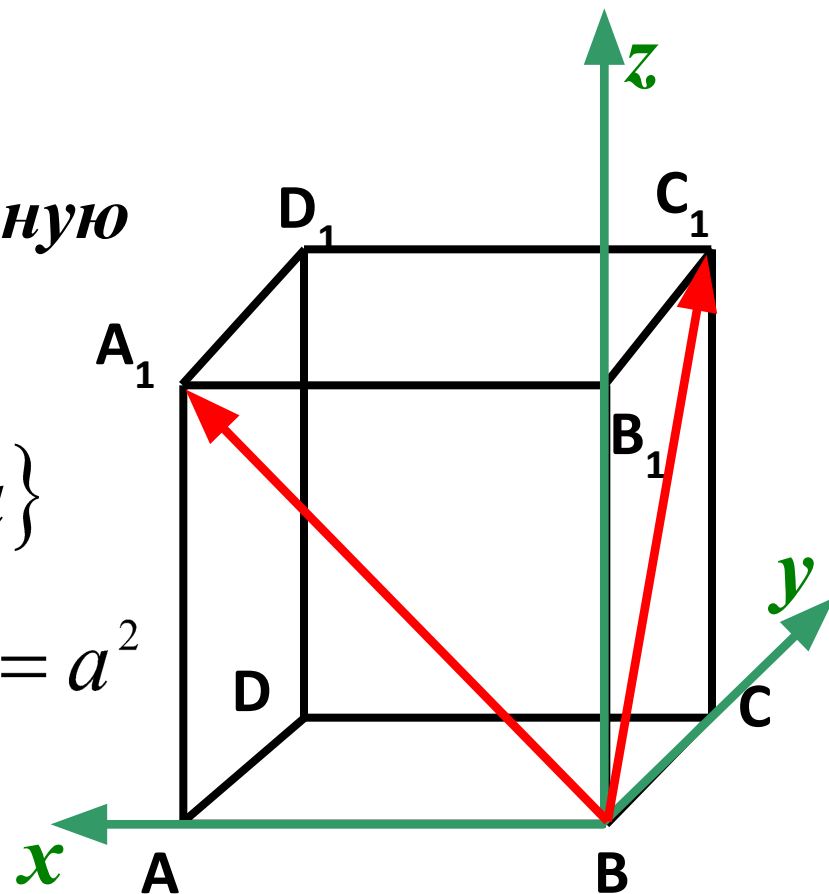
**Дано:** куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ;  
 $AB = a$

**Найти:**  $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

**3 способ:** Введем прямоугольную систему координат.

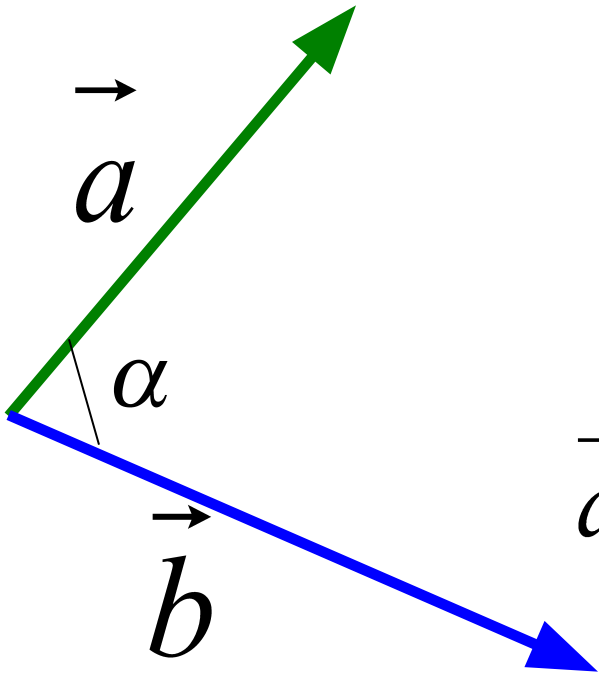
$$\overrightarrow{BA_1} \{a; 0; a\} \quad \overrightarrow{BC_1} \{0; a; a\}$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a \cdot 0 + 0 \cdot a + a \cdot a = a^2$$



**Ответ:  $a^2$**

# Скалярное произведение векторов.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$