

# Логарифмические преобразования

*Изобретение логарифма,  
сократив работу астронома,  
продлило ему жизнь.*

*П.С.Лаплас*

- Урок алгебры в 11 классе

# Определение логарифма

**Логарифмом числа  $b$  по основанию  $a$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,**

**называется**

показатель степени, в которую надо возвести число  $a$ , чтобы получить  $b$ :

$$\log_a b = x \iff a^x = b \text{ при } a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Логарифм по основанию 10 называется *десятичным логарифмом* и обозначается  $\lg b$ .

Логарифм по основанию  $e$  ( $e \approx 2,7$ ) называется *натуральным логарифмом* и обозначается  $\ln b$ .

Определение можно записать и так:

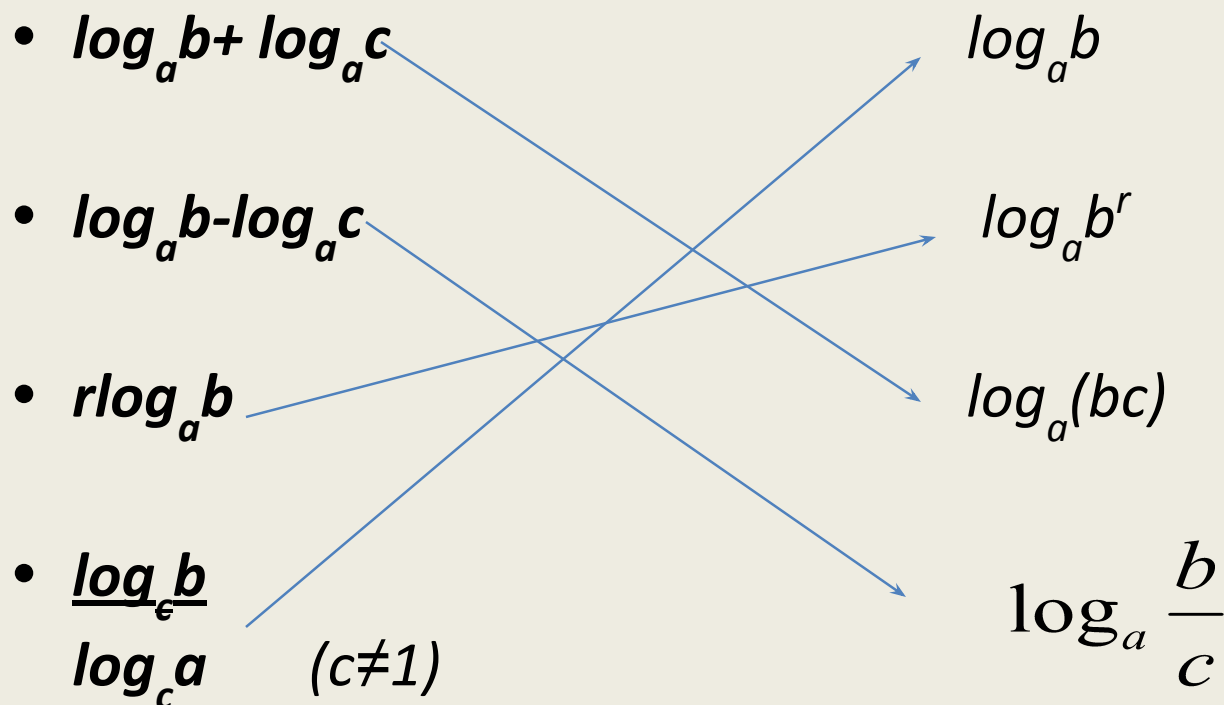
- $a^{\log_a b} = b$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ .
- Полученное равенство называется основным логарифмическим тождеством

# например:

- 1)  $\log_2 16 = 4$ , т.к.  $2^4 = 16$
- 2)  $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ , т.к.  $3^{-2} = \frac{1}{9}$
- 3)  $3^{\log_3 18} = 18$
- 4)  $8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = 5^3 = 125$

# Свойства логарифмов

Пусть  $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$



# Полезно знать!

Другие свойства  
логарифмов:

- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$  при  $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ .

- $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$  при  $a > 0, a \neq 1, b > 0$ .

- $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$  при  $a > 0, a \neq 1, b > 0$ .

# Примеры:

$$1) \log_2 6 + \log_2 10 \frac{2}{3} = \log_2 6 + \log_2 \frac{32}{3} = \log_2 \frac{6 * 32}{3} = \log_2 64 = 6$$

$$2) \log_2 \frac{1}{0,125} = \log_2 (0,5)^{-3} = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3$$

$$3) \lg 0,1 \sqrt[3]{100} = \lg (10^{-1} * 10^{\frac{2}{3}}) = \lg 10^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \lg 10 = -\frac{1}{3}$$

$$4) \log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \frac{3 \log_3 3}{2 \log_3 3} = \frac{3}{2}$$

## Еще примеры:

5) Известно, что  $\log_5 2 = a$ . Найти  $\log_2 80$ .

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \log_2 80 &= \log_2(16 \cdot 5) = \log_2 16 + \log_2 5 = \\ &= 4 + \frac{\log_5 5}{\log_5 2} = 4 + \frac{1}{\log_5 2} = 4 + \frac{1}{a} = \frac{4a + 1}{a}. \end{aligned}$$

6) Найти  $\lg 45$ , если  $\lg 3 = a$ ,  $\lg 2 = b$ .

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \lg 45 &= \lg(9 \cdot 5) = \lg 9 + \lg 5 = \lg 3^2 + \lg \frac{10}{2} = \\ &= 2\lg 3 + \lg 10 - \lg 2 = 2a + 1 - b. \end{aligned}$$



# Попробуем решить:

- Вычислите:

1)  $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[5]{5} =$

Ответ:  $-\frac{1}{5}$

• 2)  $\sqrt{3}^{\log_3 0,49} =$

Ответ:

0,7

• 3)  $\log_{\sqrt{2}} 36 - \log_{\sqrt{2}} 9\sqrt{2} =$

Ответ:

3

- 4) Найдите  $\log_2 \frac{1}{81}$  , если  $\log_2 3 = m$ .

*Ответ:*

*-4m*

$$\begin{aligned} & \bullet 5) -\log_8 \log_2 \sqrt[8]{\sqrt[4]{4}} = \\ & = -\log_8 \log_2 \sqrt[32]{2^2} = -\log_8 \log_2 2^{\frac{1}{16}} = -\log_8 \frac{1}{16} = -\log_8 16^{-1} = \\ & = \log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

# Решите самостоятельно.

1)  $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{3}$

2)  $\left(\frac{1}{36}\right)^{\log_6 5}$

3) Найдите  $\log_7 245$ , если известно, что  $\log_7 5 = b$ .

4)  $\log_5 150 \sqrt[3]{5} + \log_{25} \frac{1}{36}$

# Бонус (задание части С)

• Решите неравенство:  $\log_4(x+2) \times \log_x 2 \leq 1$

• Преобразуем:  $\frac{\log_2(x+2)}{2 \log_2 x} \leq 1$  ,

$$\log_x(x+2) \leq 2$$

1 случай  $\begin{cases} x+2 \leq x^2 \\ x > 1 \end{cases}$  ,  $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x > 1 \end{cases}$  ,

откуда  $x \geq 2$ .

2 случай:  $\begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$  ,

откуда  $0 < x < 1$ .

Объединяем найденные промежутки.

Ответ:  $(0; 1); [2; +\infty)$

# Домашнее задание.

- Из учебника № 1061, 1062, 1064



# Свойства логарифмов

$$1) \log_a bc = \log_a b + \log_a c, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$$

$$2) \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$$

$$3) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$$

$$4) \log_a b^r = r \log_a b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

$$5) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$$

$$6) \log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$