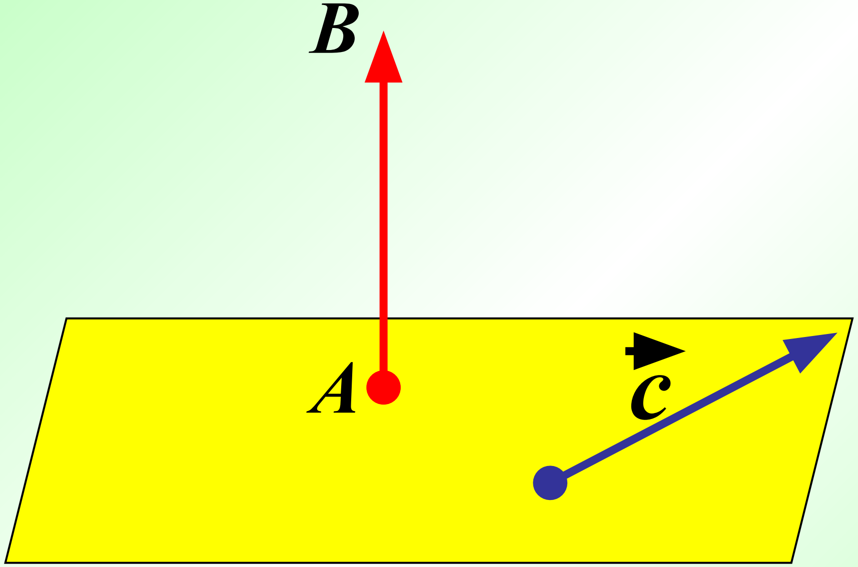
Векторы в пространстве и действия над ними. Компланарные векторы.

- Многие физические величины характеризуются числовым значением и направлением в пространстве, их называют векторными величинами

Определение вектора в пространстве

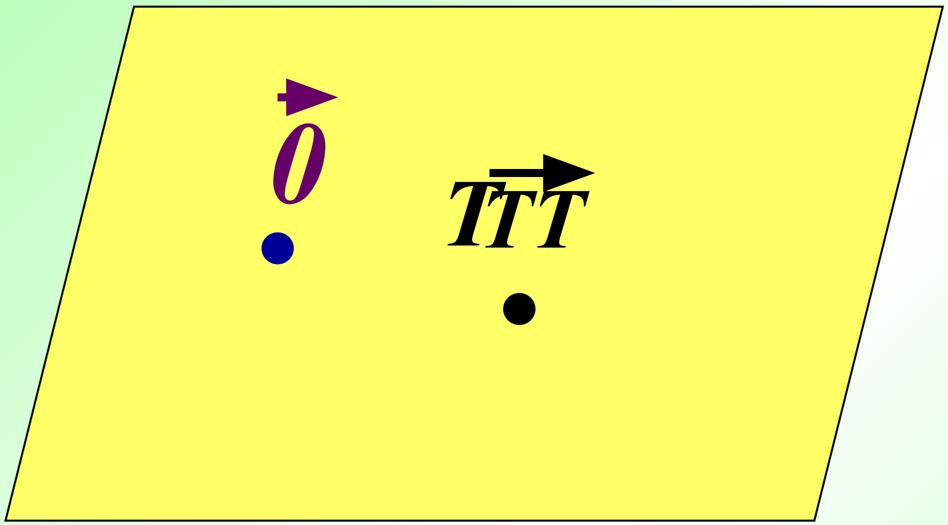
Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой- концом, называется *вектором.*



Обозначение вектора

$\overrightarrow{AB}, \ \vec{c}$

Любая *__точка__* пространства также может рассматриваться как *__вектор.__* Такой вектор называется ***нулевым.***



Обозначение нулевого вектора

$$\overrightarrow{TT},\ \vec{0}$$

Длина ненулевого вектора

- ***Длиной вектора*** $\overrightarrow{AB}$ **называется длина отрезка** AB**.**
- **Длина вектора** $\overrightarrow{AB}$ **(вектора** $\vec{a}$**)** ***обозначается*** **так:**

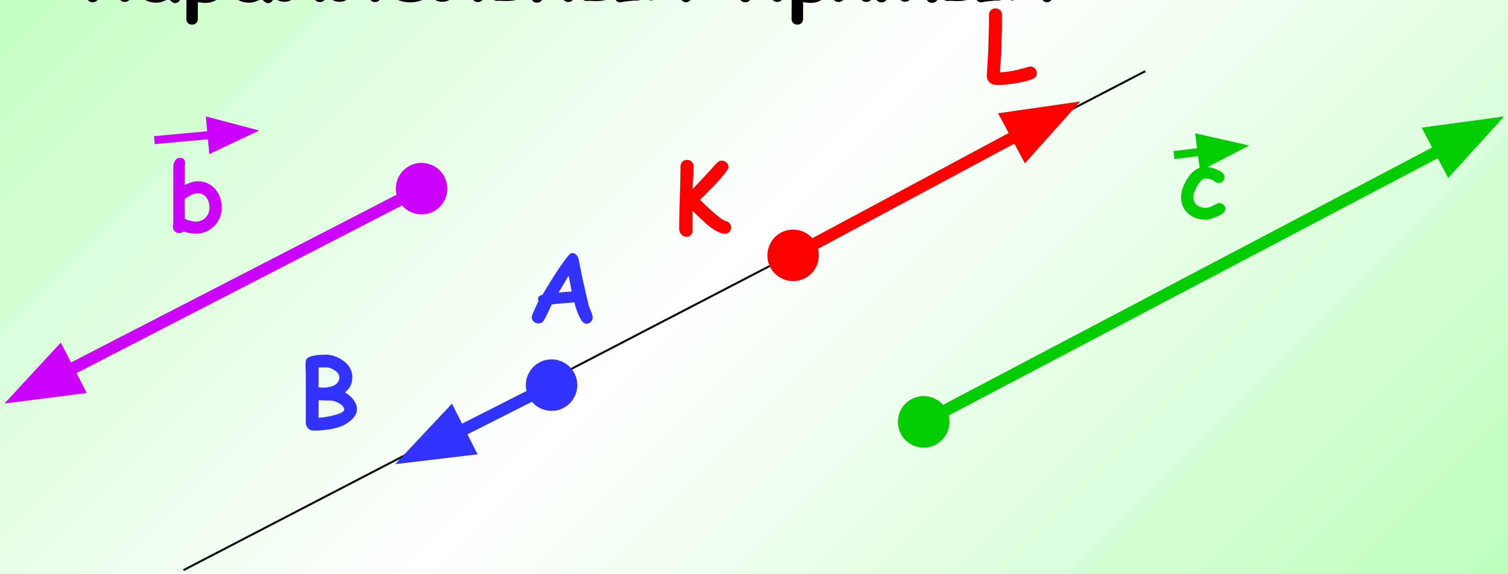
$$|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$$

- ***Длина нулевого вектора*** **считается равной** ***нулю*****:**

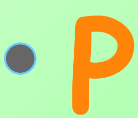
$$|\vec{0}| = 0$$

Коллинеарные векторы

- Ненулевые векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых

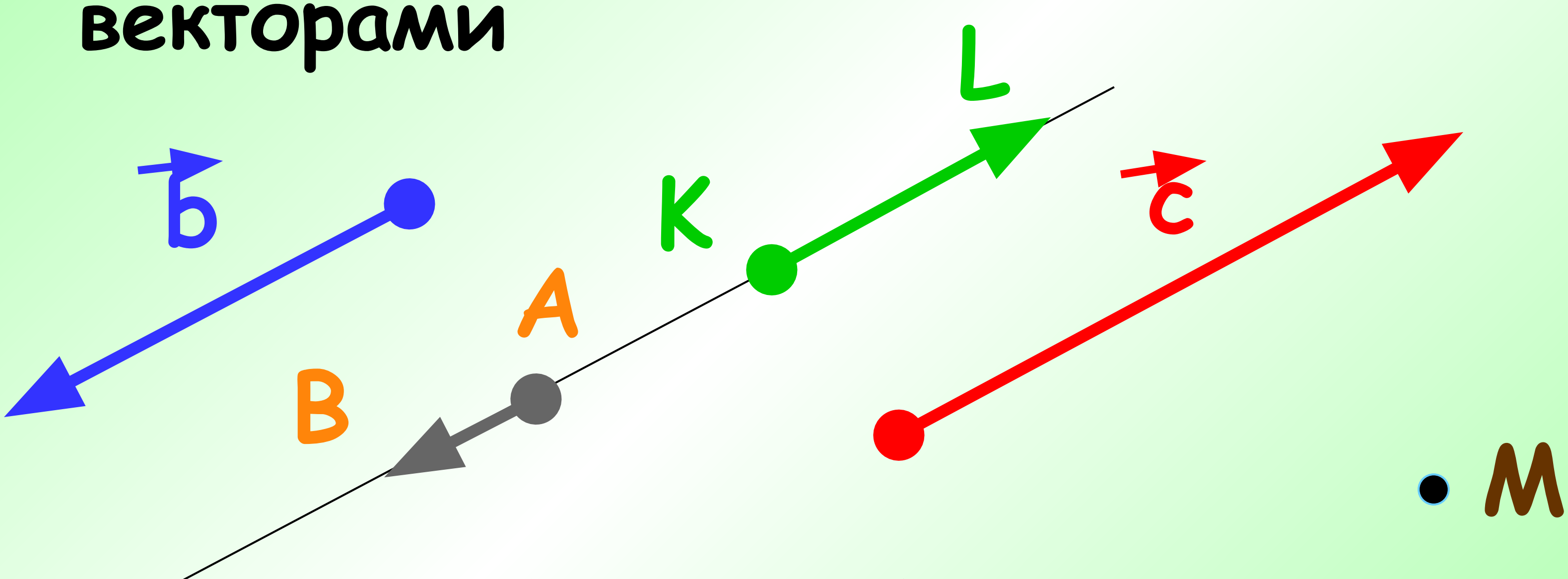


Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору



Сонаправленные векторы

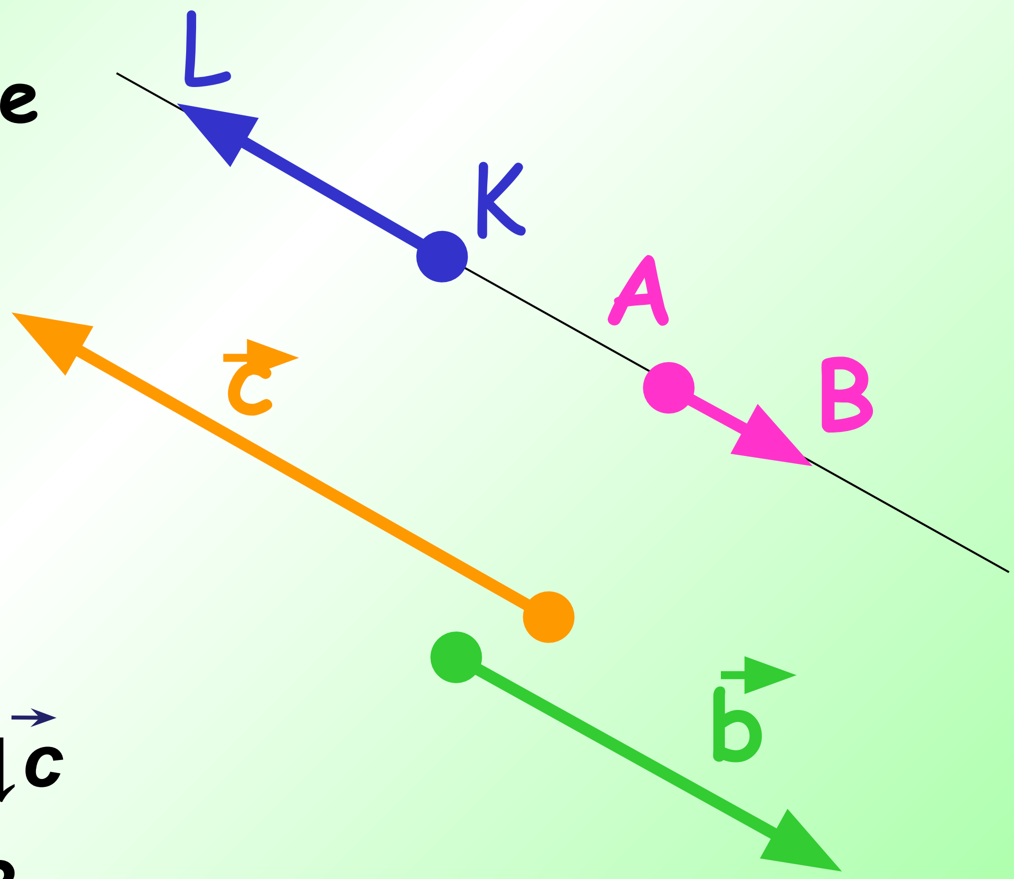
Коллинеарные векторы, имеющие одинаковое направление, называются *сонаправленными* векторами



$\vec{c} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{b}$ $\overrightarrow{MM} \uparrow\uparrow \vec{c}$ (нулевой вектор сонаправлен любому вектору)

Противоположно направленные векторы

Коллинеарные векторы, имеющие противоположное направление, называются *противоположно направленными* векторами



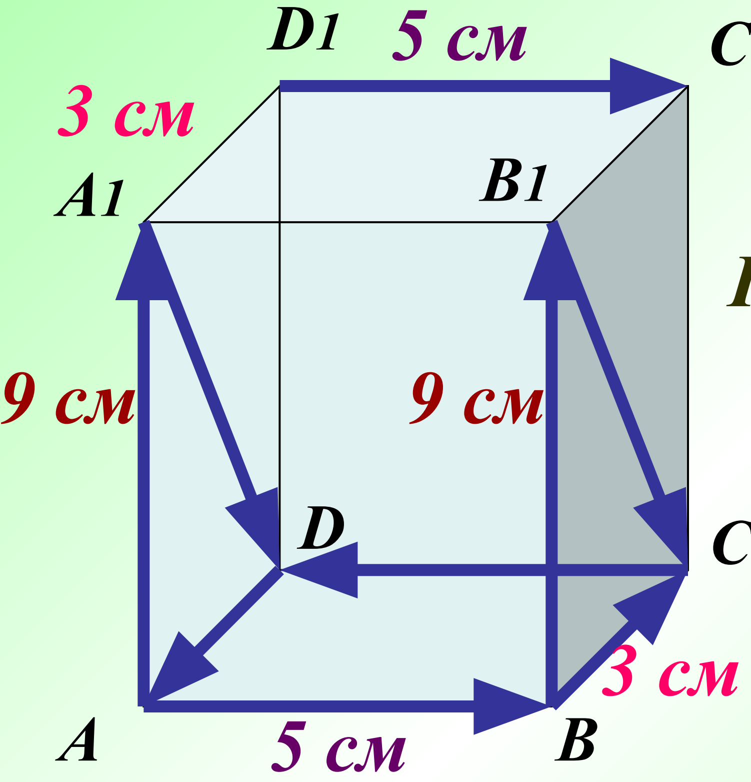
$\vec{b} \uparrow\downarrow \overrightarrow{KL}$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \vec{c}$

$\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{b}$ $\overrightarrow{KL} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$

Какие векторы на рисунке сонаправленные?

Какие векторы на рисунке противоположно направленные?

Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CC_1}$.



Сонаправленные векторы:

$\overrightarrow{AA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{A_1D} \uparrow\uparrow \overrightarrow{B_1C}$

$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{D_1C_1}$

Противоположно-направленные:

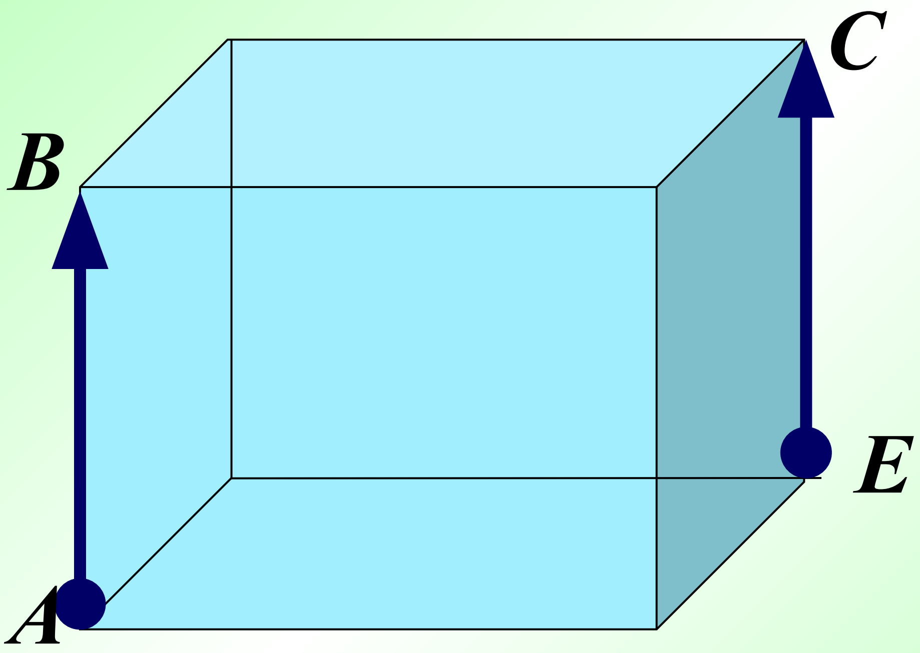
$\overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{D_1C_1}$, $\overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{DA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{BC}$

$|\overrightarrow{AB}| = 5$ см; $|\overrightarrow{BC}| = 3$ см; $|\overrightarrow{BB1}| = 9$ см.

Равенство векторов

Векторы называются *равными*, если они *сонаправлены* и их *длины равны*.



$\vec{AB} = \vec{EC}$, *так как*

$\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{EC}$ *и* $|\vec{AB}| = |\vec{EC}|$

Могут ли быть равными векторы на рисунке? Ответ обоснуйте.

- Рисунок № 1

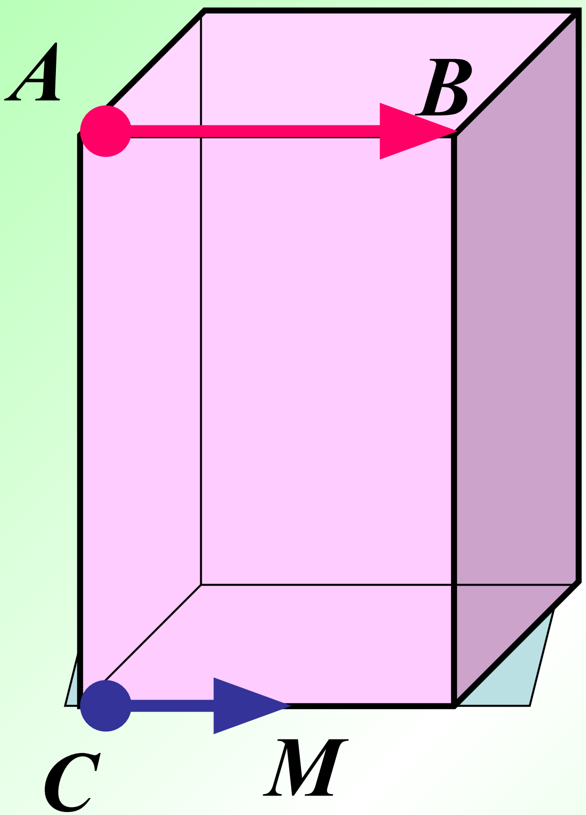
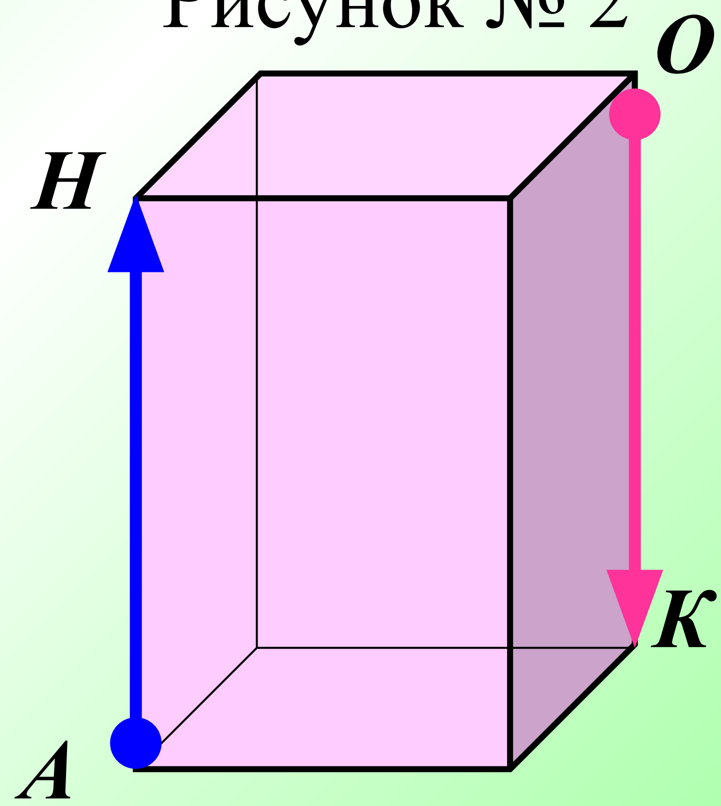


Рисунок № 2



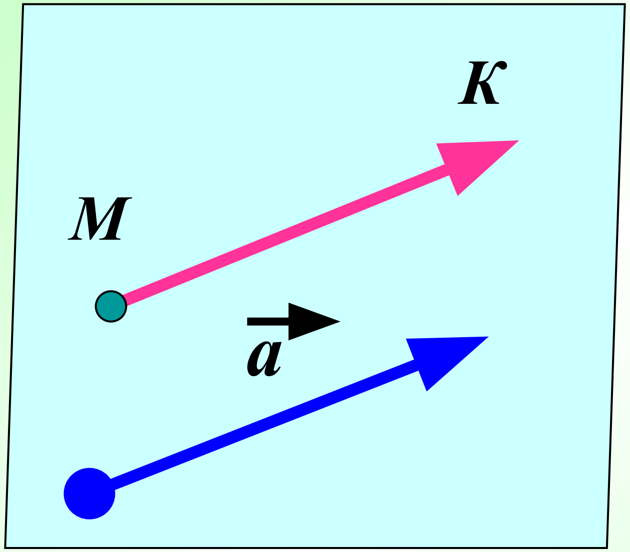
$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CM}$, *т. к* $|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{CM}|$

$\overrightarrow{AH} \neq \overrightarrow{OK}$, *т. к* $\overrightarrow{AH} \not\uparrow\uparrow \overrightarrow{OK}$

<u>Доказать</u>, что от любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному, и притом только один

Дано: $\vec{a}$, ***M.***

Доказать: $\vec{в} = \vec{a}$, $M \in \vec{в}$, ***единственный.***



Доказательство:

Проведем через вектор а и точку М плоскость.

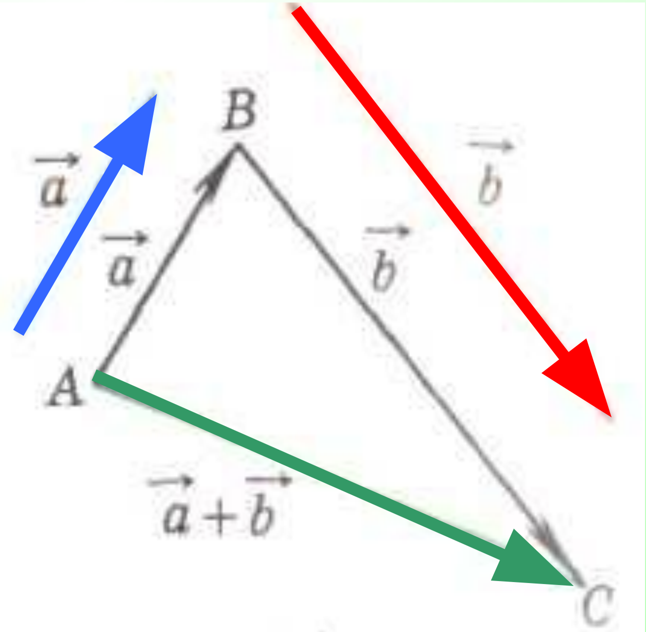
В этой плоскости построим $\overrightarrow{MK} = \vec{a}$.

Из теоремы о параллельности прямых следует $\overrightarrow{MK} = \vec{a}$ ***и*** $M \in \overrightarrow{MK}$.

Действия над векторами

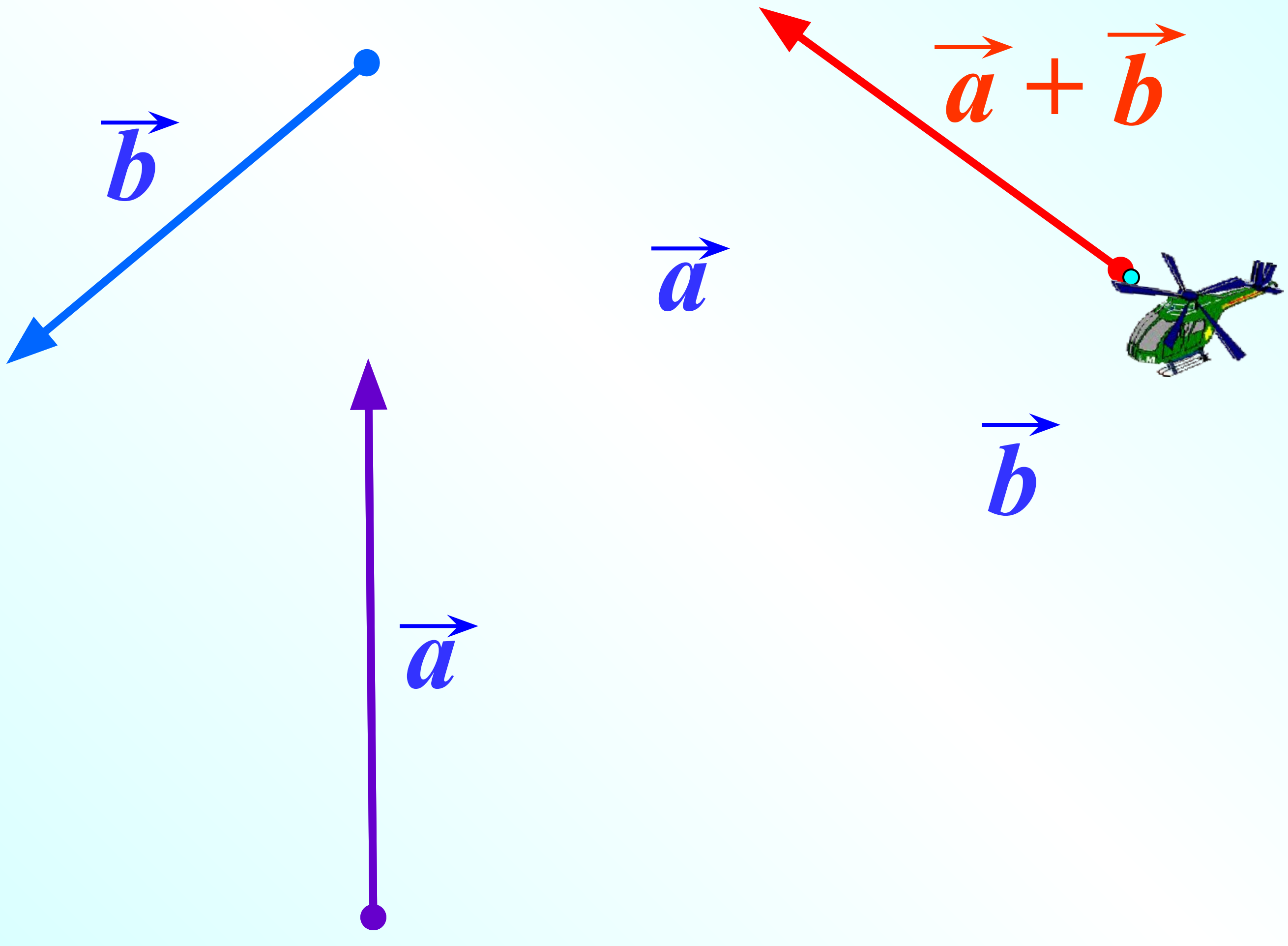
Сложение векторов

- **Правило треугольника.** *(правило сложения двух произвольных векторов a и ь).* Отложим от какой-нибудь точки *A* вектор *AB,* равный *a.* Затем от точки *B* отложим вектор *BC,* равный *Ь.* Вектор *AC* называется **суммой векторов** *a* и *b* : ***AC* =*a*+*Б***.



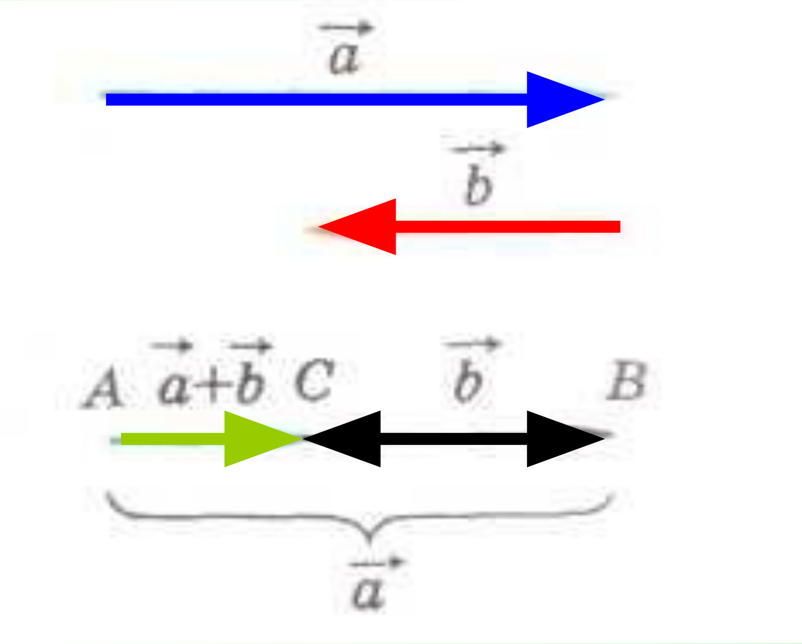
Сложение векторов.
Правило треугольника.

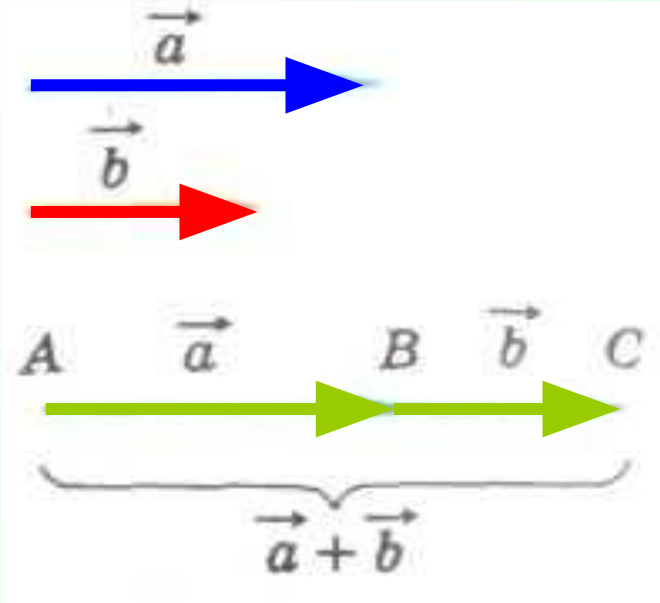
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}$



Сложение коллинеарных векторов

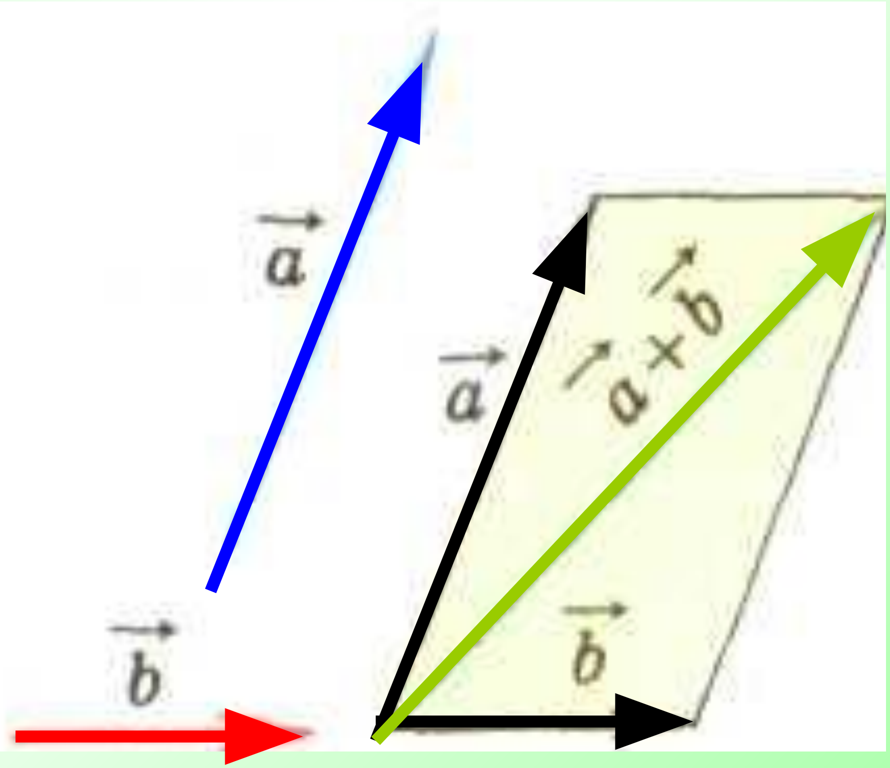
- По этому же правилу складываются и коллинеарные векторы, хотя при их сложении и не получается треугольника.





Сложение векторов

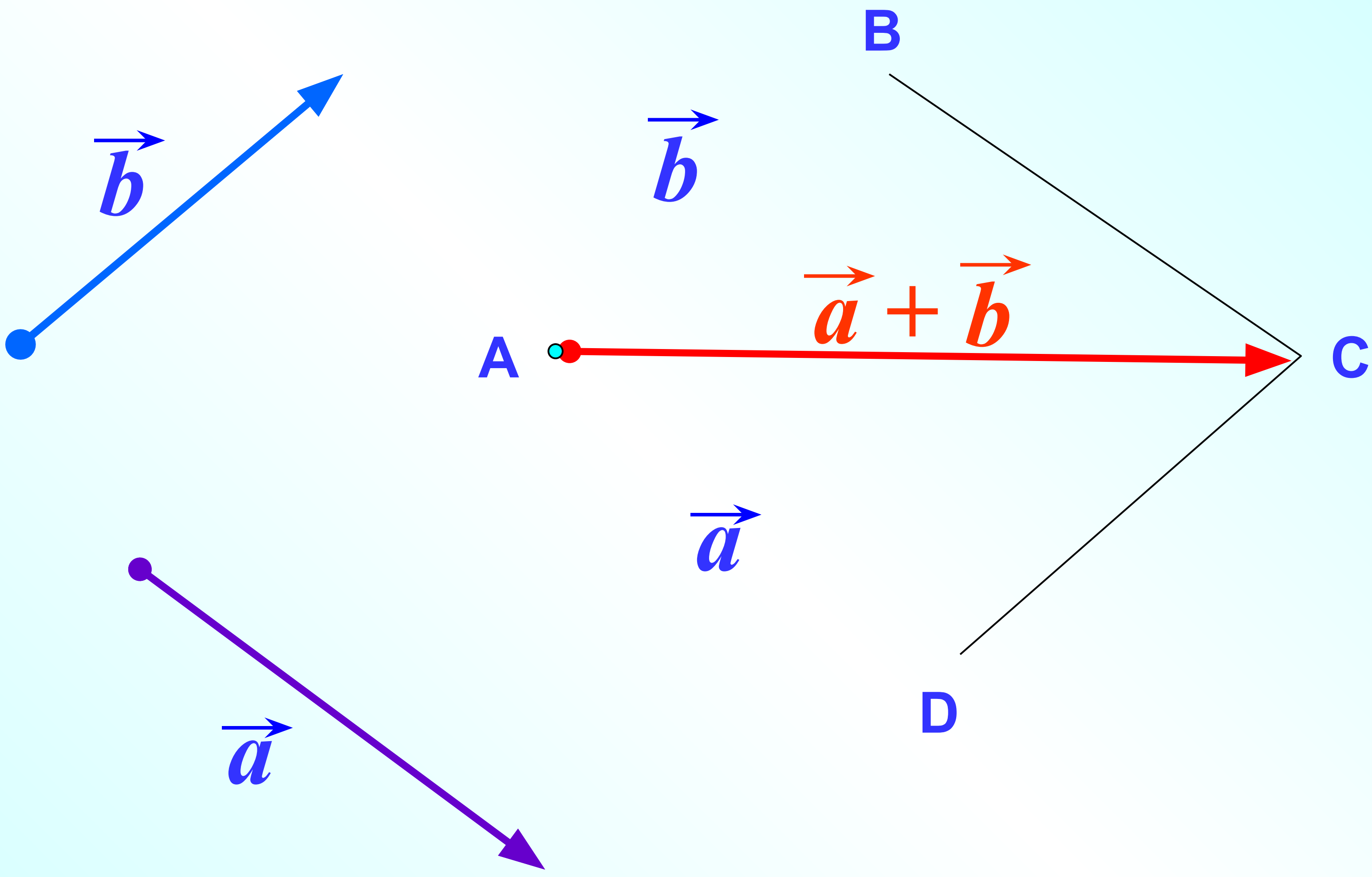
- Для сложения двух неколлинеарных векторов можно пользоваться также ***правилом параллелограма***, известным из курса планиметрии.



Сложение векторов.   Правило параллелограмма.

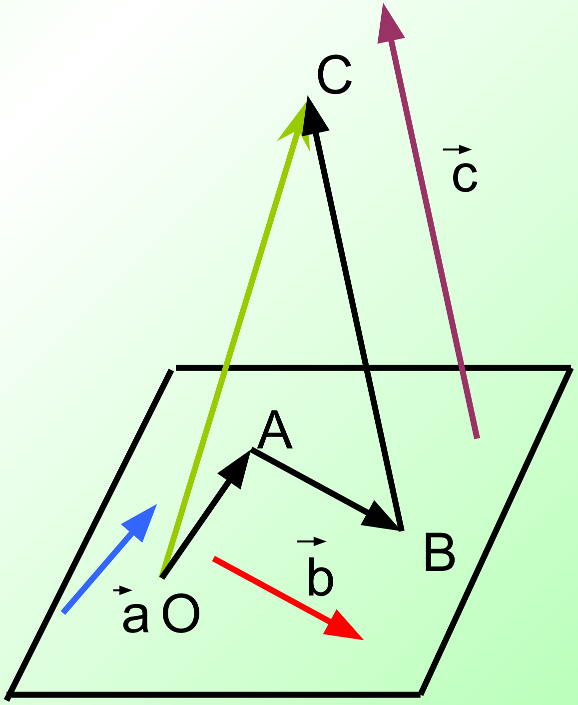
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}$

$\vec{a} + \vec{b}$



Сложение нескольких векторов

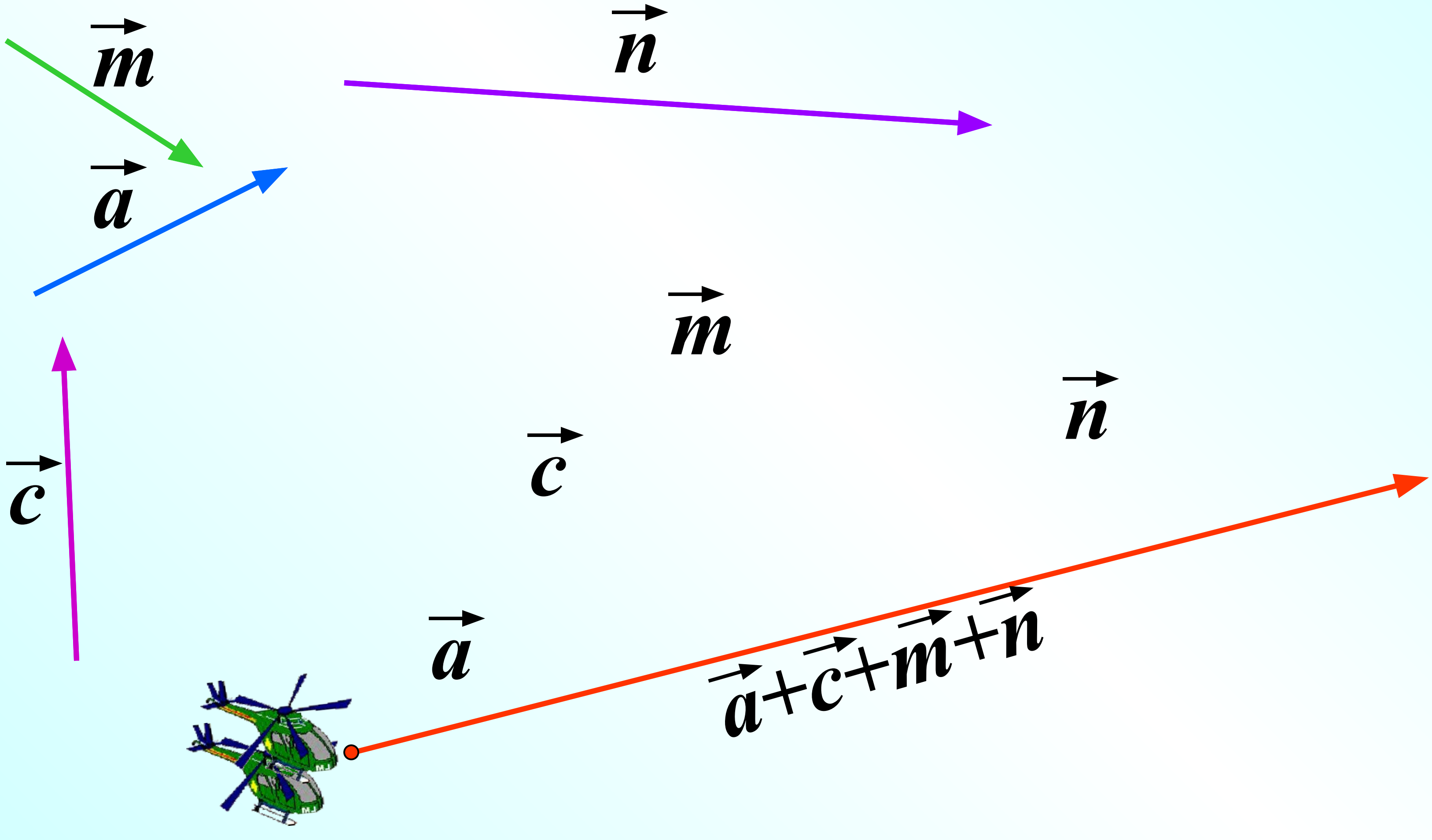
Сложение нескольких векторов в пространстве выполняется так же, как и на плоскости: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма — с третьим вектором и т. д. Из законов сложения векторов следует, что **сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.**



$\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Сложение векторов.
Правило многоугольника.

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DO} = \vec{AO}$$



Свойства сложения векторов

Для любых векторов справедливы равенства:

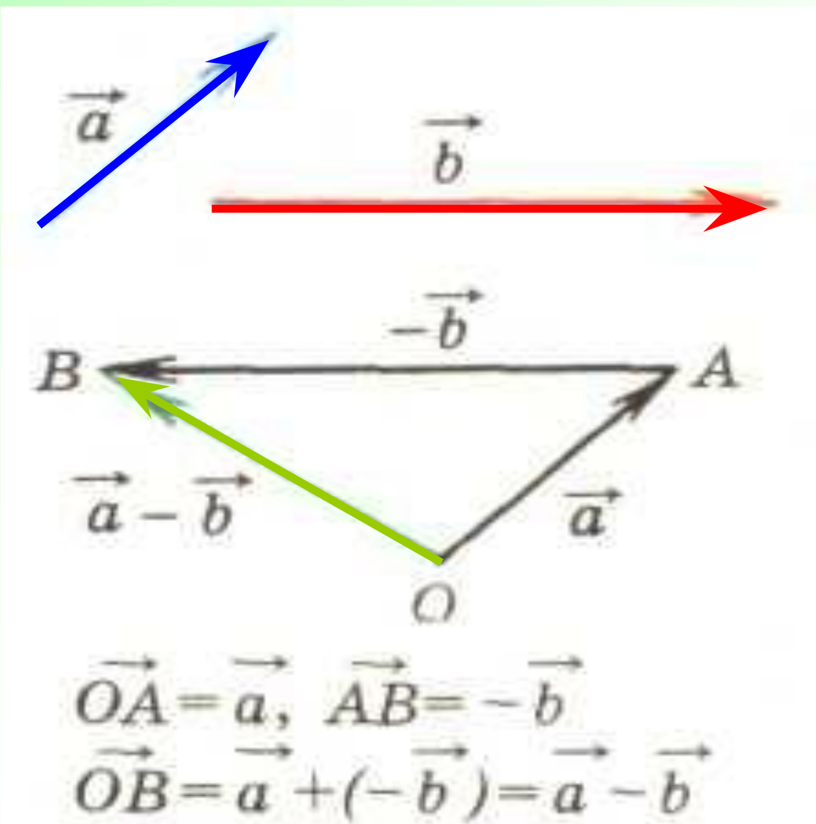
a+b=b+a (переместительный закон)

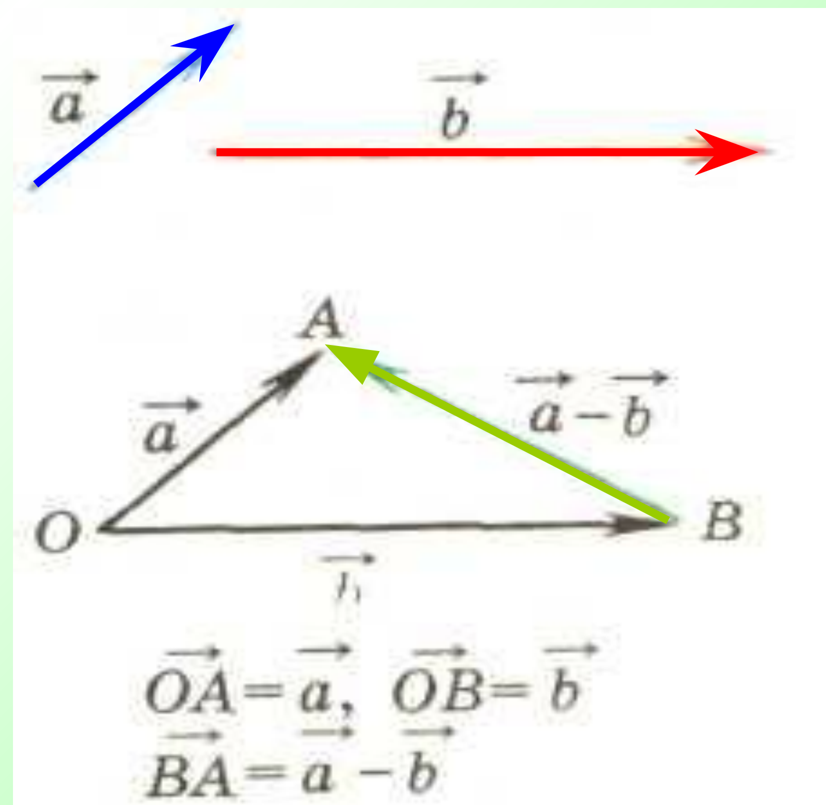
(a+b)+c=a+ (b+c) (сочетательный закон)

Разность векторов

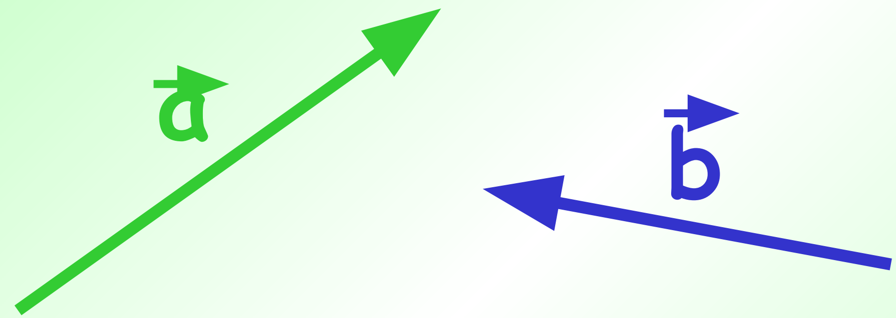
- ***Разностью векторов*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$. Разность $\vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти по формуле:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$





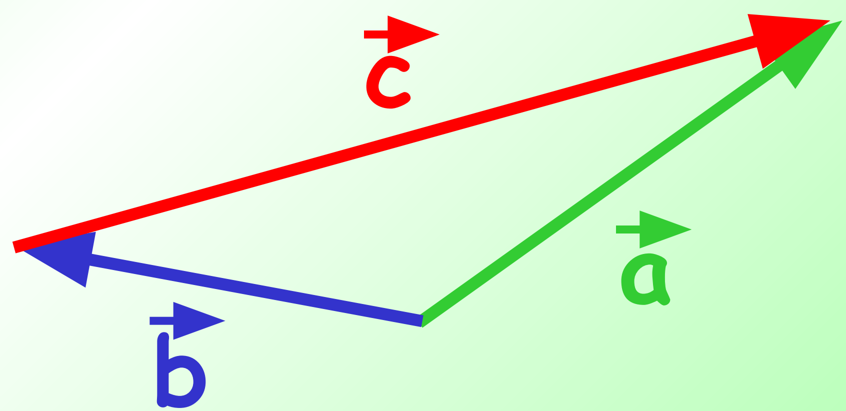
Разность векторов



Дано: $\vec{a}$, $\vec{b}$

Построить: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

Построение:



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

Умножение вектора $\vec{a}$ на число k

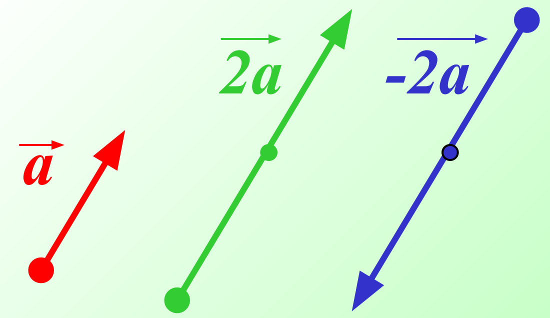
$$k\cdot\vec{a} = \vec{b},$$

$|\vec{a}| \neq 0$, k – произвольное число

$|\vec{b}| = |k|\cdot|\vec{a}|$,

если $k>0$, *то* $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

если $k<0$, *то* $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$



Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

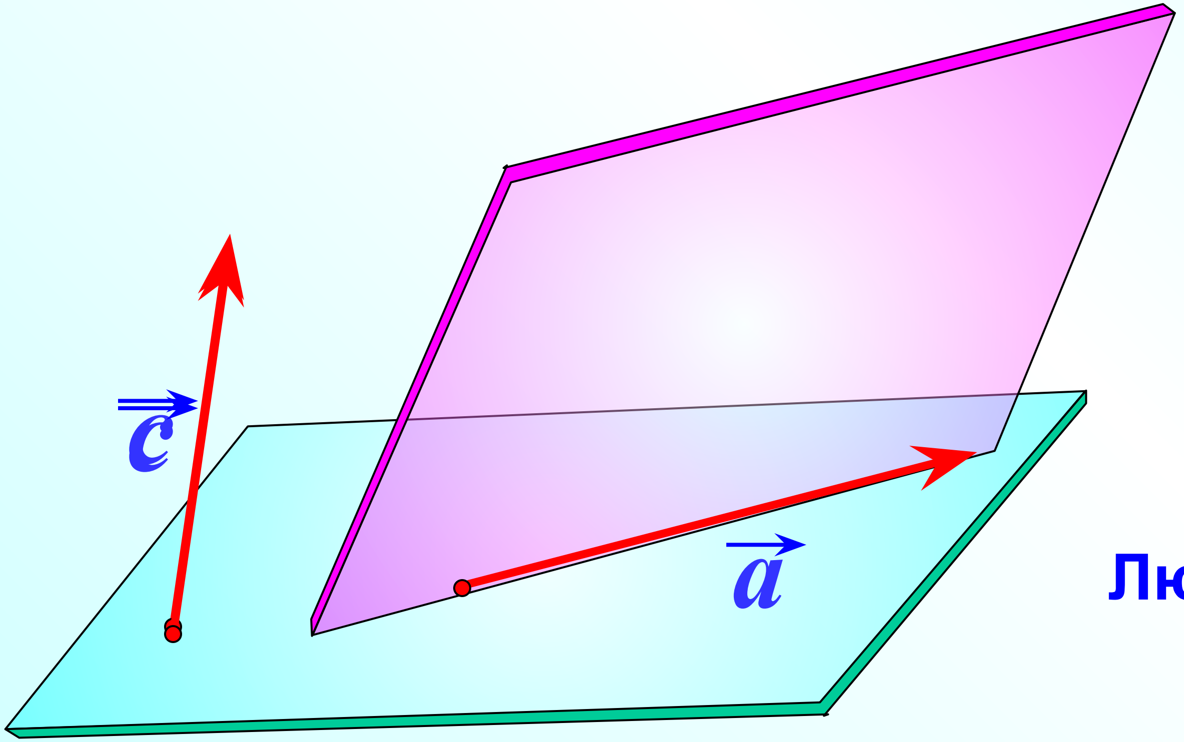
1º. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ *(сочетательный закон),*

2º. $(k+l)\vec{a} = k\vec{a}+l\vec{a}$ *(первый распределительный закон),*

3º. $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a}+k\vec{b}$ *(второй распределительный закон).*

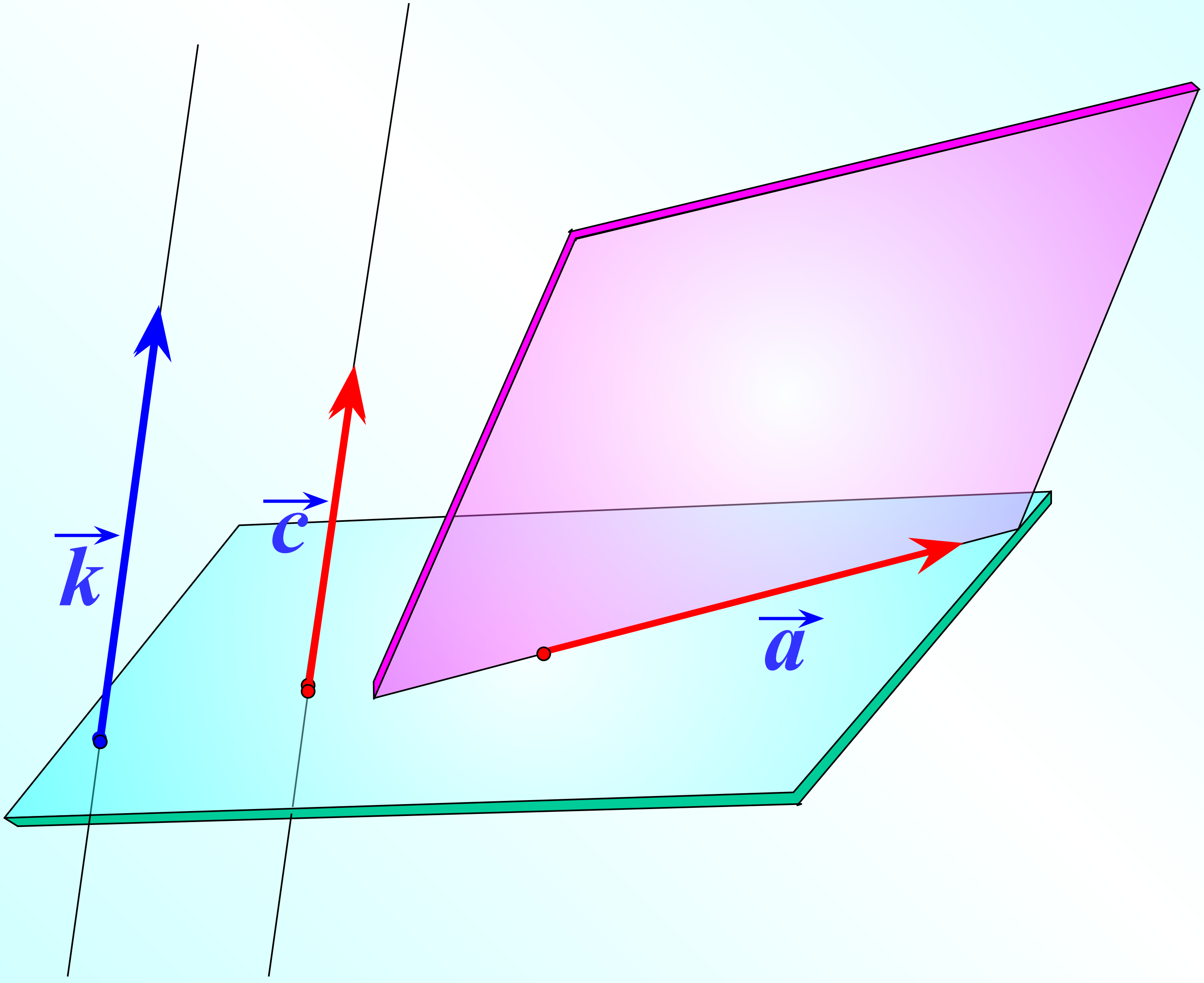
Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Другими словами, векторы называются **компланарными**, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

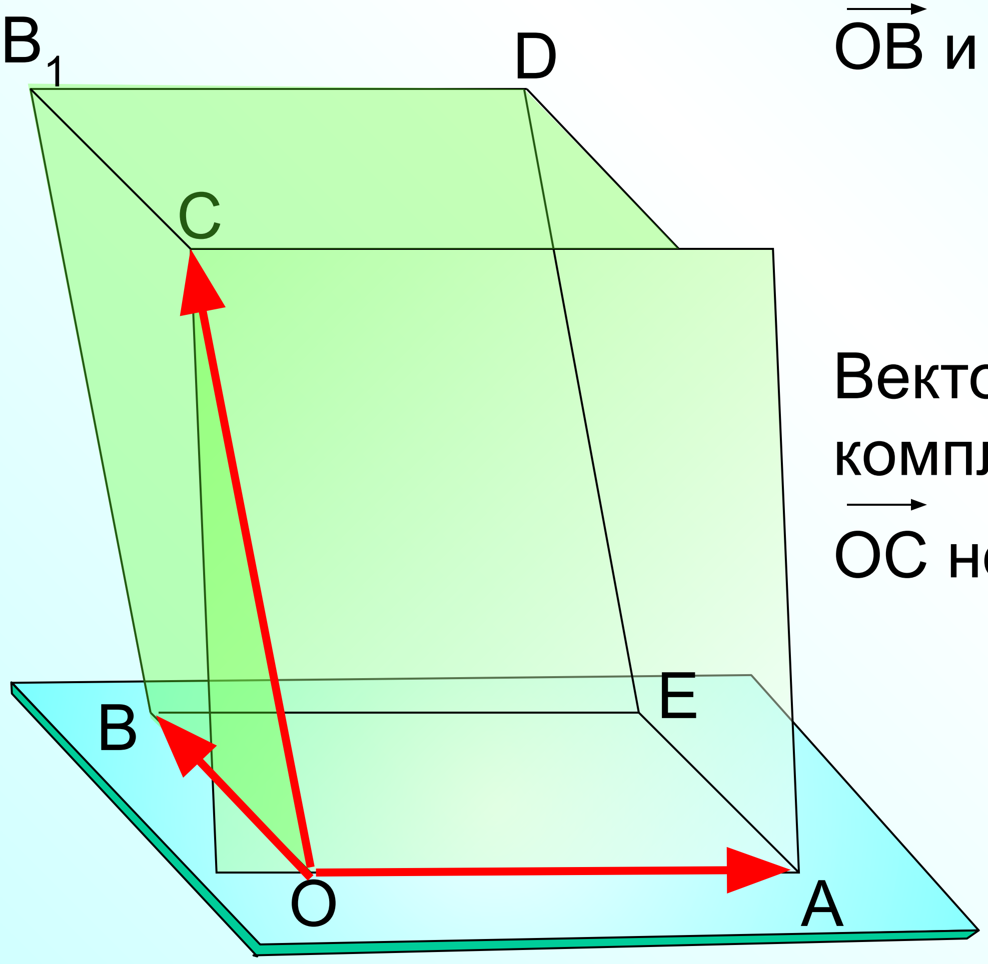


Любые два вектора компланарны.

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.



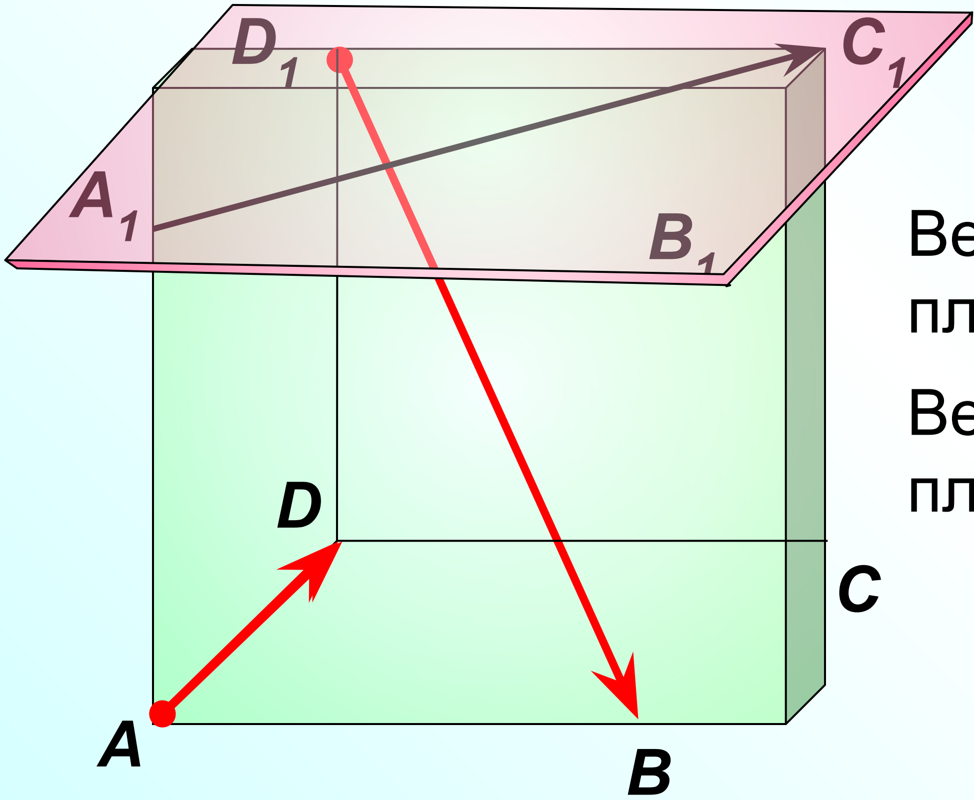
Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными. На рисунке изображен параллелепипед.



Являются ли векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ компланарными?

Векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ не компланарны, так как вектор $\overrightarrow{OC}$ не лежит в плоскости OAB.

Являются ли векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{D_1B}$ компланарными?



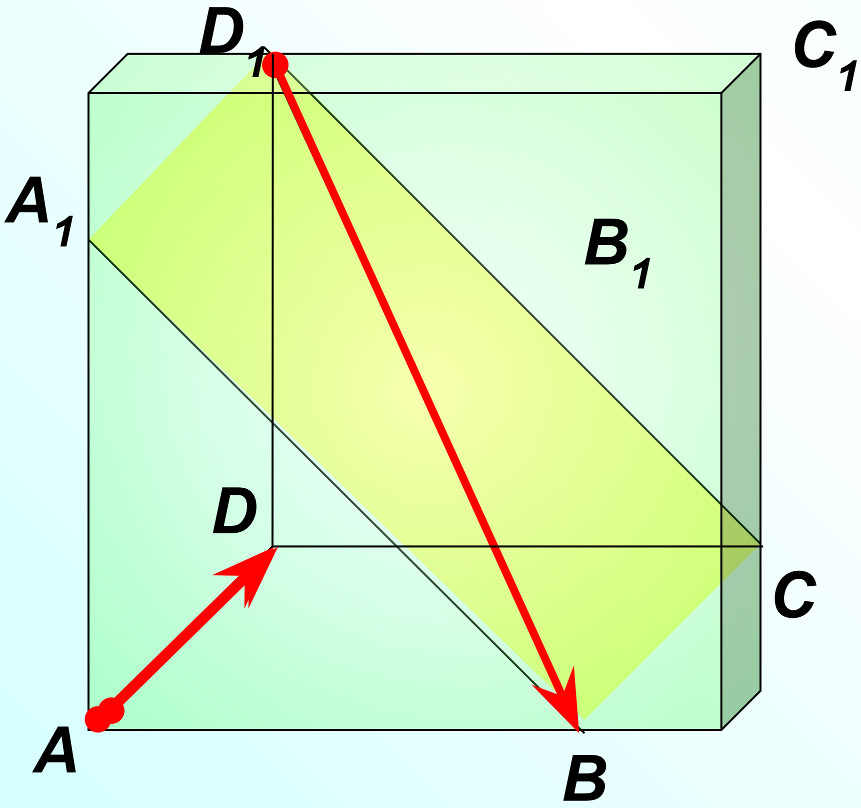
Векторы $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ лежат в плоскости $A_1D_1C_1$.

Вектор $\overrightarrow{D_1B}$ не лежит в этой плоскости.

Векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{D_1B}$ не компланарны.

Являются ли векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{D_1B}$ компланарными?

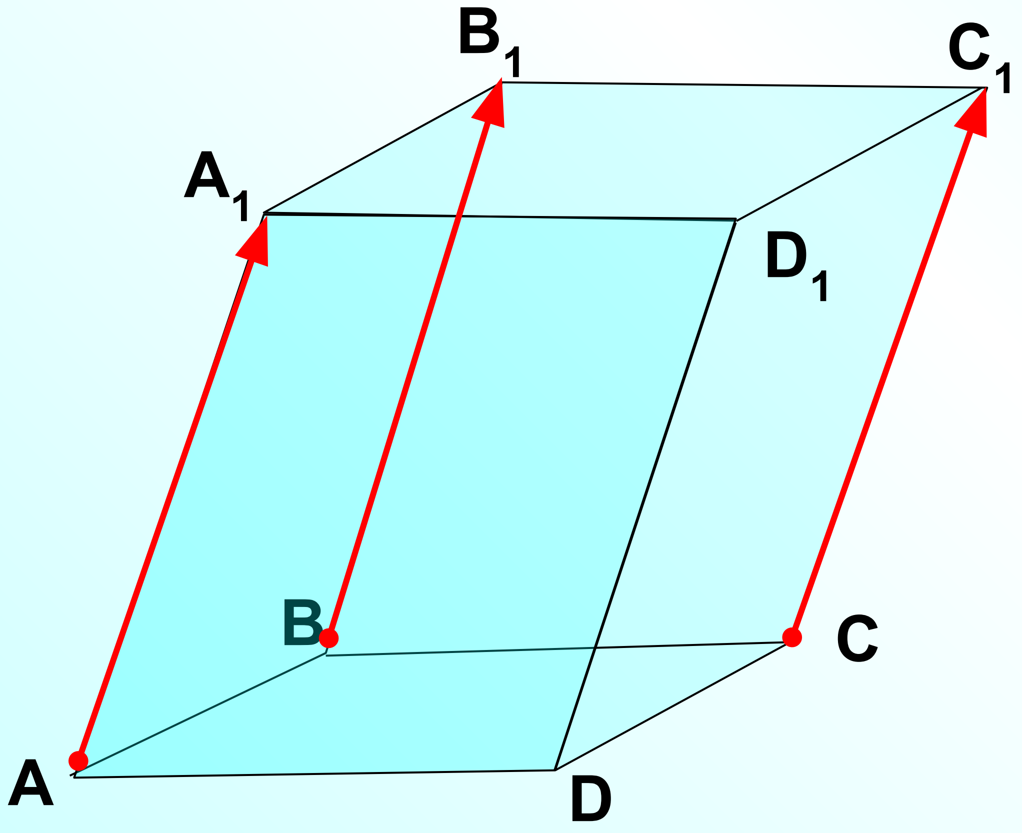
Любые два вектора компланарны.



Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.
Компланарны ли векторы?

$\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{BB_1}$

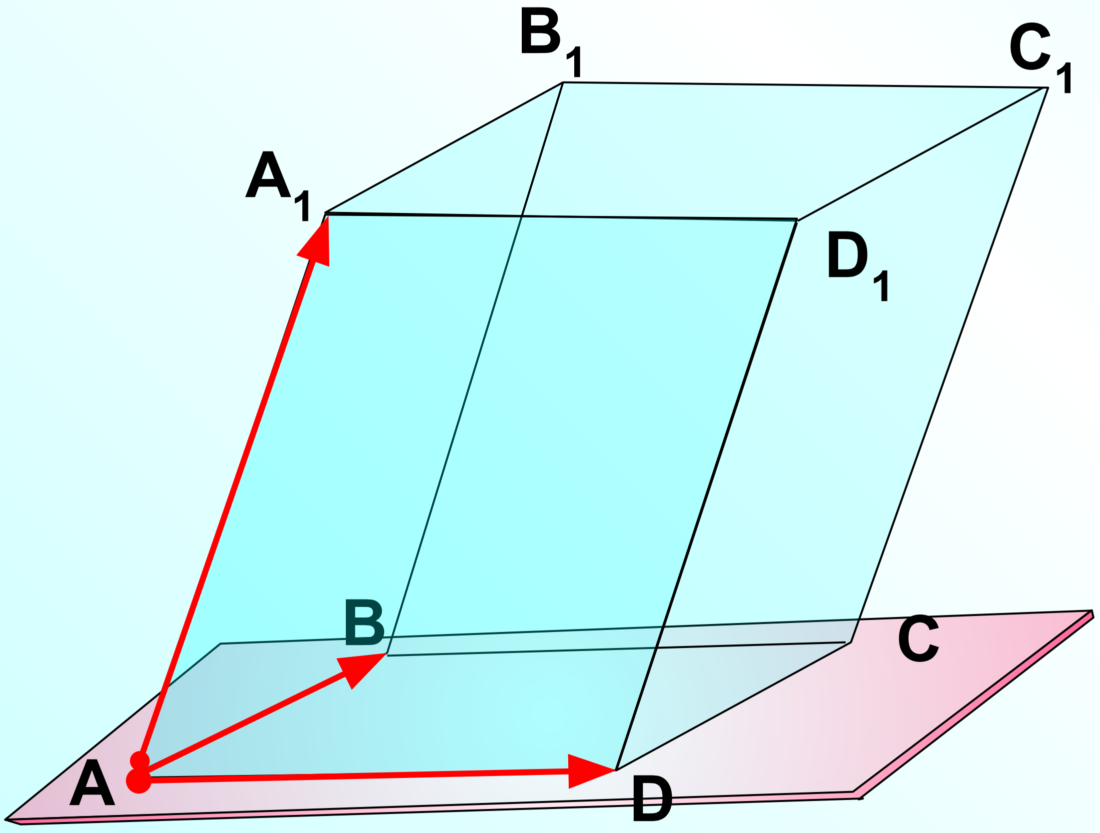
Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.



Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.
Компланарны ли векторы?

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$

Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ не компланарны, так как вектор $\overrightarrow{AA_1}$ не лежит в плоскости ABC.

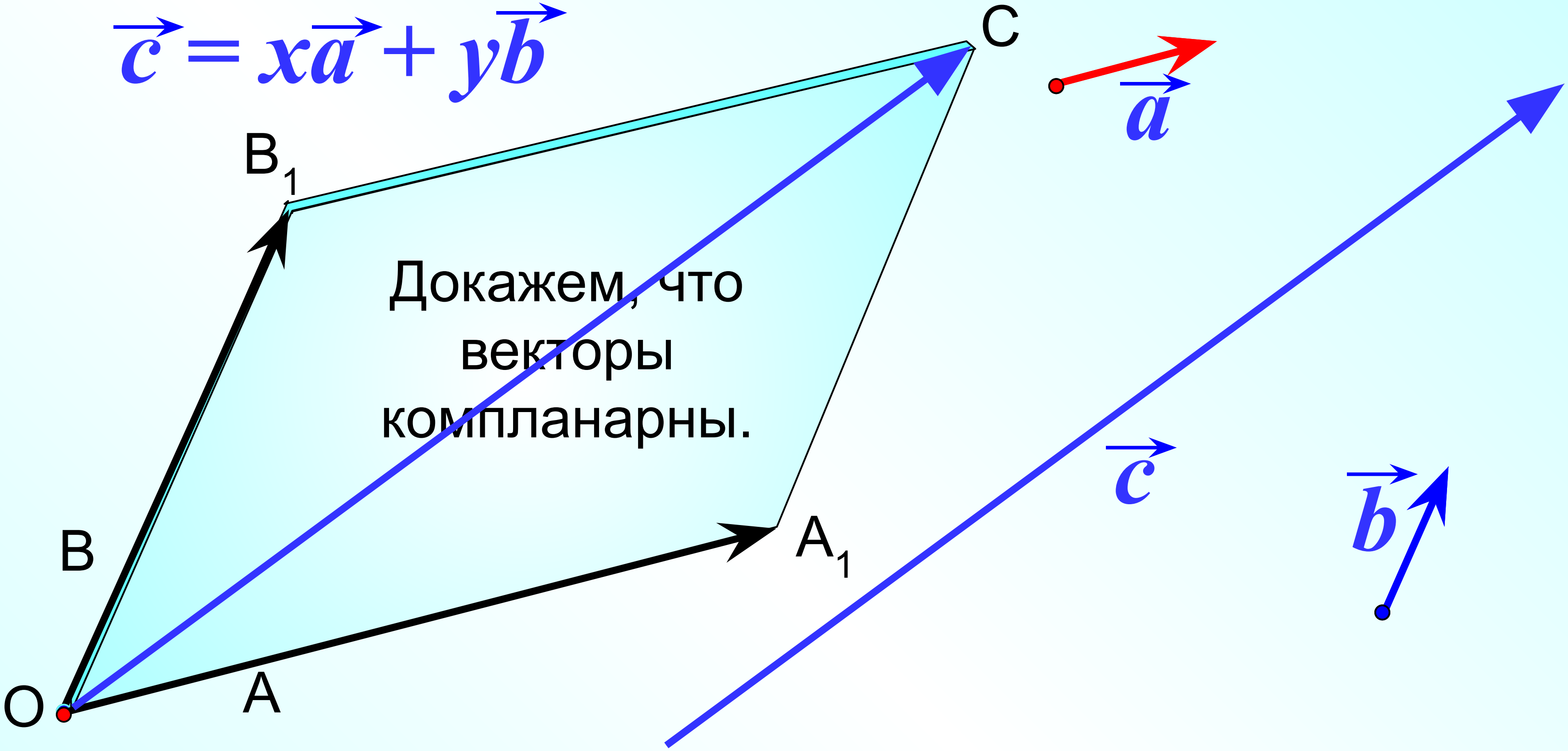


Признак компланарности

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

где х и у – некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$



Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ лежат в одной плоскости OAB.

$\overrightarrow{OA_1} = x\,\overrightarrow{OA}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OB_1} = y\,\overrightarrow{OB}$

Векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ также лежат плоскости OAB.

А следовательно, и их сумма – вектор $\overrightarrow{OC} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB}$, равный вектору $\vec{c}$.

Справедливо и обратное утверждение.

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

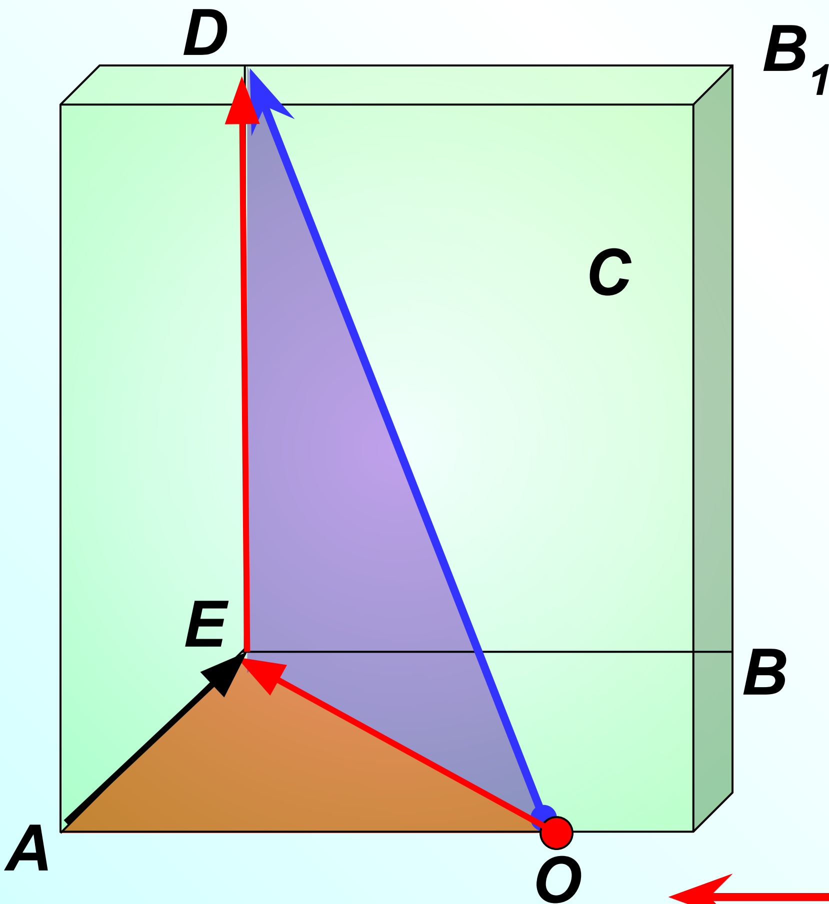
, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

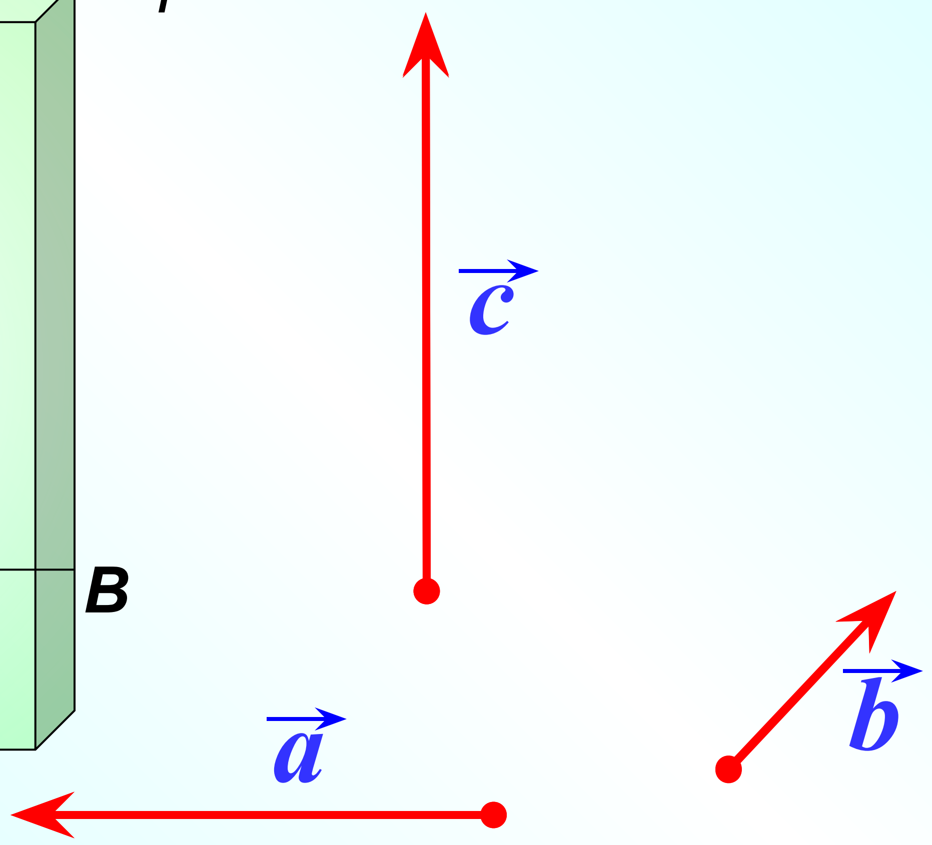
Правило параллелепипеда. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD}$

из ΔOED из ΔOAE

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} =$

$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$





Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Если вектор представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

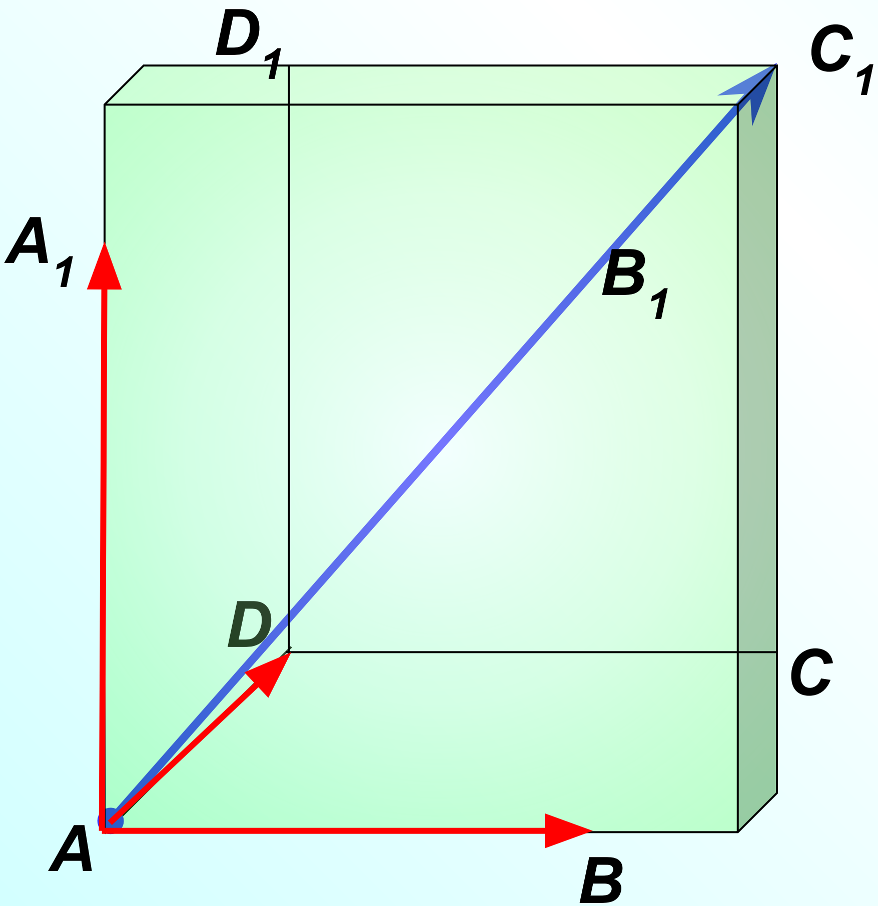
где x, y и z - некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Числа x, y и z называются коэффициентами разложения.

Теорема о разложении вектора по трем некомпланарным векорам.

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

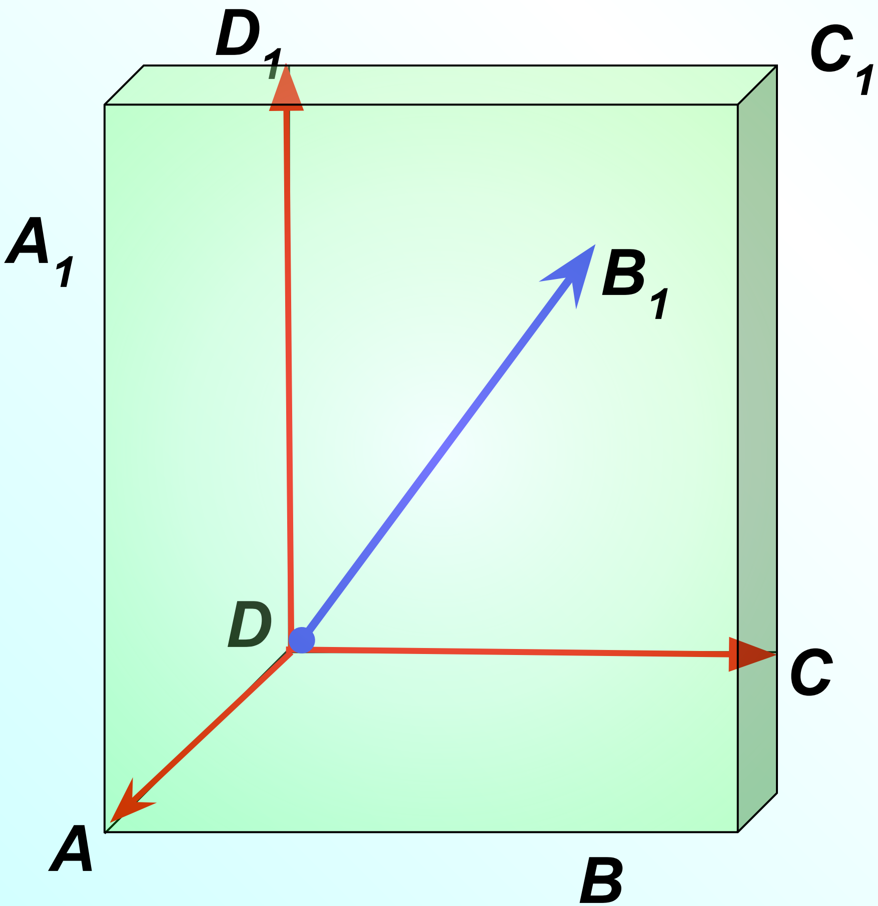
Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC_1}$$

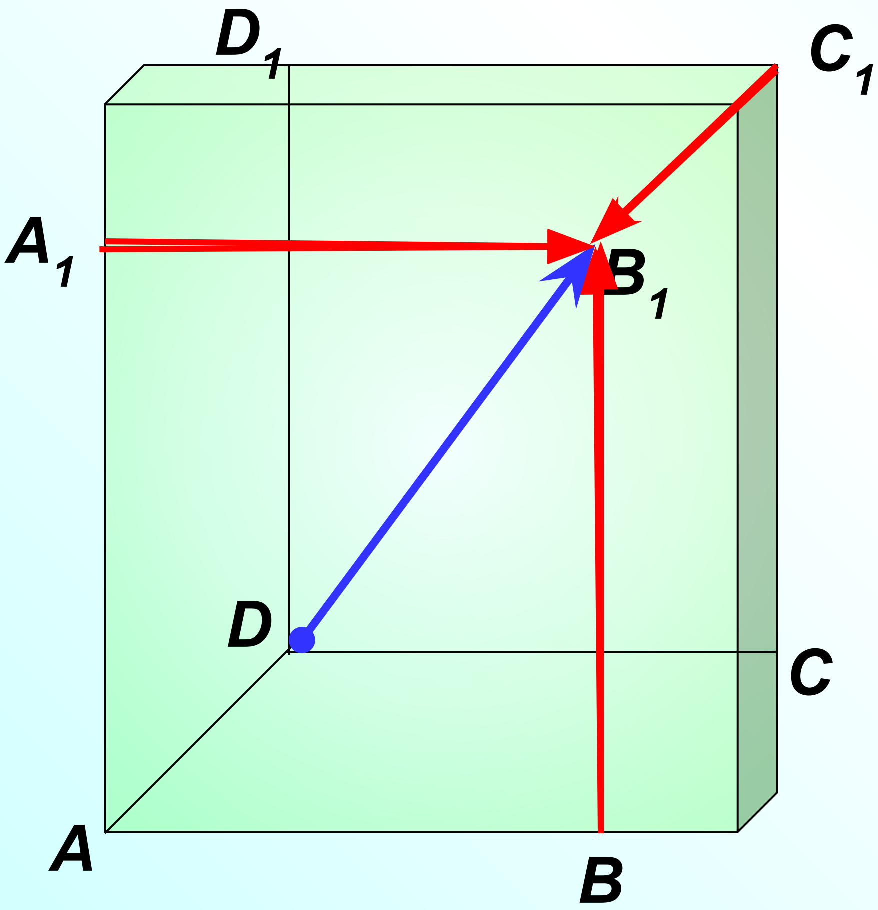


Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{DB_1}$$



Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:



$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{BB_1}$$

$$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{DB_1}$$

Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

$$\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1C}$$