

15.3. РЯД ФУРЬЕ

Для тригонометрического ряда, как и для степенного ряда, можно установить условия разложения функций.

Теорема

Если функция $y=f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и разлагается в тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

который можно интегрировать почленно при умножении его на ограниченную функцию, то это разложение единственно.

Доказательство:

Для определения коэффициентов разложения будем использовать ортогональность системы тригонометрических функций.

Проинтегрируем (3) на отрезке $[-\pi, \pi]$.

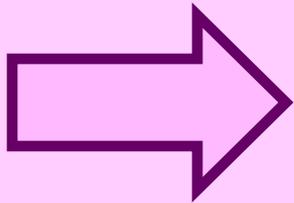
Все интегралы, кроме интеграла от первого слагаемого, обращаются в нуль.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx) \right) dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx) dx =$$

$$= \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{1}{2} a_0 x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi a_0$$

0



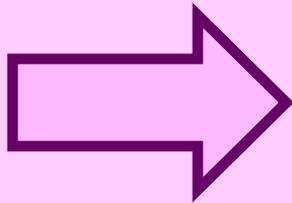
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Для определения коэффициентов a_n и b_n последовательно умножим обе части (3) сначала на $\cos(nx)$, а потом на $\sin(nx)$ и проинтегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Все интегралы в правой части, кроме содержащих квадраты этих функций, равны нулю.

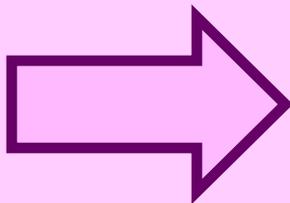
Полученные формулы будут определять единственным образом коэффициенты разложения функции в ряд.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \cdot \pi$$

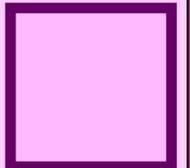


$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx = b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = b_n \cdot \pi$$



$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx$$



Для функции $f(x)$, интегрируемой на отрезке

$[-\pi, \pi]$ числа a_0, a_n, b_n называются коэффициентами ряда Фурье, а ряд (3) с этими коэффициентами называется рядом Фурье функции $f(x)$.

Для определения сходимости ряда Фурье вводится понятие периодического продолжения функции, заданной на отрезке

~~Функция $F(x)$, определенная на всей числовой~~

~~оси и периодическая с периодом T , является~~

~~периодическим продолжением функции $f(x)$,~~

~~если $F(x)=f(x)$ на отрезке $[-\Pi, \Pi]$.~~

***Если ряд Фурье сходится к функции $f(x)$
на
отрезке $[-\pi, \pi]$, то он сходится на всей
числовой прямой к ее периодическому
продолжению.***

Теорема

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[-\Pi, \Pi]$, или они имеют на этом отрезке конечное число точек разрыва.

Тогда



**Ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на
всей
числовой прямой, и в каждой точке
непрерывности $f(x)$ в интервале $(-\pi,$
 $\pi]$
сумма ряда равна значению $f(x)$
в этой точке.**



В каждой точке разрыва функции x' сумма ряда равна полусумме односторонних пределов $f(x)$ в этой точке:

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x' - 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x' + 0} f(x) \right)$$

*На концах отрезка $[-\pi, \pi]$
сумма ряда равна*

$$\frac{1}{2}(f(-\pi) + f(\pi))$$



Для любой точки x , не принадлежащей отрезку $[-\Pi, \Pi]$ утверждения 1-3 справедливы для периодического продолжения $F(x)$ функции $f(x)$.