15.3. РЯД ФУРЬЕ

Для тригонометрического ряда, как и для степенного ряда, можно установить условия разложения функций.

Теорема

Если функция y=f(x) интегрируема на отрезке [-П,П] и разлагается в тригонометрический ряд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot\sin nx)$$

который можно интегрировать почленно при умножении его на ограниченную функцию, то это разложение единственно.

Доказательство:

Для определения коэффициентов разложения будем использовать ортогональность системы тригонометрических функций.

Проинтегрируем (3) на отрезке [-П,П].

Все интегралы, кроме интеграла от первого слагаемого, обращаются в нуль.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)\right)dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)dx}_{0} =$$

$$= \frac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi}dx = \frac{1}{2}a_0 x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi a_0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}$$

- Для определения коэффициентов a_n и b_n последовательно умножим обе части (3) на сначала на cos(nx), а потом на sin(nx) и проинтегрируем на отрезке [-П,П].
- Все интегралы в правой части, кроме содержащих квадраты этих функций, равны нулю.
- Полученные формулы будут определять единственным образом коэффициенты разложения функции в ряд.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx = a_n\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = a_n\cdot\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx = b_n\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx = b_n\cdot\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx}$$

Для функции f(x), интегрируемой на отрезке
[-П,П] числа a_0, a_n, b_n называются коэффициентами ряда Фурье, а ряд (3) с этими коэффициентами называется рядом Фурье функции f(x).

Для определения сходимости ряда Фурье вводится понятие периодического продолжения функции, заданной на отрезке [-П,П].

Функция F(x), определенная на всей числовой

оси и периодическая с периодом T, является

периодическим продолжением функции f(x),

если F(x)=f(x) на отрезке [-П,П].

Если ряд Фурье сходится к функции f(x) на

отрезке [-П,П], то он сходится на всей числовой прямой к ее периодическому продолжению.

Теорема

Пусть функция y=f(x) непрерывна вместе со своей производной на отрезке [-П,П], или они имеют на этом отрезке конечное число точек разрыва.

Тогда

1

Ряд Фурье функции f(x) сходится на всей

числовой прямой, и в каждой точке

непрерывности f(x) в интервале (-П, П]

сумма ряда равна значению f(x)

в этой точке.

2

В каждой точке разрыва функции x /
сумма ряда равна полусумме
односторонних пределов f(x) в этой
точке:

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x'-0} f(x)+\lim_{x\to x'+0} f(x)\right)$$

3

На концах отрезка [-П,П] сумма ряда равна

$$\frac{1}{2}\Big(f(-\pi)+f(\pi)\Big)$$

4

Для любой точки х, не принадлежащей

отрезку [-П,П] утверждения 1-3 справедливы для периодического продолжения F(x) функции f(x).