# Различные методы решения неравенств

**«МЕТОД РЕШЕНИЯ ХОРОШ,
ЕСЛИ С САМОГО НАЧАЛА
МЫ МОЖЕМ ПРЕДВИДЕТЬ –
И ВПОСЛЕДСТВИИ ПОДТВЕРДИТЬ,
ЧТО, СЛЕДУЯ ЭТОМУ МЕТОДУ,
МЫ ДОСТИГНЕМ ЦЕЛИ.»
ЛЕЙБНИЦ**

# Общие методы решения неравенств

1. Обобщенный метод интервалов.
2. Метод замены переменной.
3. «Расщепление» неравенств.
4. Использование свойств функции.
   4.1. Исследование области определения функции.
   4.2. Использование свойства ограниченности функции.
   4.3. Использование свойства монотонности функции.
5. Метод рационализации.

# 1. Обобщенный метод интервалов

- Применимость метода интервалов не ограничивается решением рациональных неравенств.
- Применяя метод интервалов к решению иррациональных, трансцендентных, комбинированных неравенств, говорят об обобщенном методе интервалов.

# Алгоритм обобщенного метода интервалов

1) Привести неравенство к виду $f(x) \vee 0$
2) Найти область определения функции $f(x)$ (она же ОДЗ переменной).
3) Найти нули функции $f(x)$ решив уравнение $f(x) = 0$
4) Изобразить на числовой прямой область определения и нули функции.
5) Определить знаки функции на промежутках, входящих в область определения функции.
6) Записать ответ, включив в него промежутки в соответствии со знаком неравенства (не забыть включить в ответ изолированные точки).

# Обобщенный метод интервалов. Примеры

1. $$\frac{(2x-5)(32^{\frac{1}{x}}-4)}{(3^x-1)(x^4+4x+20)} \geq 0$$

2. $$(x^2-8x+12)\sqrt{x^2-10x+21} \geq 0$$

3. $$\frac{lgx}{x^2-x-6} \geq 0$$

# 2.Метод замены переменной. Примеры.

1. $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x} - 2} \le 3$

2. $5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} \le 8 \cdot 15^{x}$

3. $\log_2^2(x^2 - 2x) + \log_{0,5}(x^2 - 2x)^3 + 2 \le 0$

# 3.«Расщепление» неравенств.

- Если левая часть неравенства представляет собой произведение двух выражений, а правая равна нулю, то схема решения неравенства опирается на правило знаков при умножении (делении) положительных и отрицательных чисел.

Пример 1. $f(x)\cdot g(x)\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)\leq 0, \\ g(x)\leq 0. \end{cases}$

Пример 2. $\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)< 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)\leq 0, \\ g(x)> 0. \end{cases}$

# «Расщепление» неравенств. Примеры.

1. $(x^2 - 8x + 12)\sqrt{x^2 - 10x + 21} \geq 0$

2. $\frac{log_3{}^2(2x^2 - 5x + 2)}{2x^2 + 6x} \leq 0$

3. $2^{\frac{1}{x^2}}(2x - 3) > 0$

# 4.Использование свойств функции.
## 4.1. Исследование области определения функции.

- Предварительный анализ области определения функций, входящих в неравенство (ОДЗ неизвестной), иногда позволяет получить решение без преобразований.

# 4.1. Исследование ОДЗ неизвестной. Примеры.

1. $\sqrt{-x^2+3x-2} > x^3 - 9$

2. $\left(\sqrt{x^2-6x+5}+1\right)\cdot \log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}(\sqrt{12x-2x^2-10}+1) > 0$

3. $arcsinx \geq \sqrt{x-\frac{\pi}{2}}$

# 4.2. Использование ограниченности функции. Метод оценки.

- Иногда неравенство $f(x) \vee g(x)$ устроено так, что на всей ОДЗ неизвестной $x$ имеют место неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \leq A$.

  В этом случае:

  а) решение неравенства $f(x) \leq g(x)$ сводится к нахождению тех значений $x$, для которых $f(x) = A$ и $g(x) = A$.

  б) решение неравенства $f(x) \geq g(x)$ сводится к нахождению ОДЗ неизвестной неравенства.

# 4.2. Использование ограниченности функции.
## Метод оценки.

Примеры.

1. $\log_5 x \leq \sqrt{1 - x^4}$

2. $\sqrt{16 - (5x + 2)^2} \geq 4 + cos^2 \dfrac{15\pi x}{4}$

# 4.2. Использование ограниченности функции.

## Использование неотрицательности функций.

- Пусть левая часть неравенства $f(x) \vee 0$ есть сумма нескольких функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$.
  Установили, что каждая из этих функций неотрицательна на своей области определения. Тогда неравенство $f(x) \leq 0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_n(x) = 0. \end{cases}$$

- При тех же условиях неравенство $f(x) \geq 0$ сводится к нахождению области определения функции $f(x)$.

# 4.2. Использование ограниченности функции. Использование неотрицательности функций.

Примеры.

1. $\sqrt{x^3+8x^2-7x-26}+\sqrt{x^2+3x-10}\le 0$

2. $\sqrt{x^3+8x^2-7x-26}+\sqrt{x^2+3x-10}\ge 0$

# 4.3. Использование монотонности функции.

- Если функция $f(t)$ возрастает на своей области определения, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ на ОДЗ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.
- Если функция $f(t)$ убывает на своей области определения, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ на ОДЗ равносильно неравенству $h(x) < g(x)$.

# Использование монотонности. Примеры.

1. $(\sin 91^\circ)^{3x-8} \geq (\sin 89^\circ)^4$

2. $\log_{2x+3} x^2 < 1$

3. $\arcsin(3x^2 - 2x) \leq \arcsin(3x+2)$

# 5. Метод рационализации.

- Метод рационализации заключается в замене сложного выражения *F(x) на более* простое выражение *G(x) (в конечном счете рациональ-ное)*, при которой неравенство *G(x)* $\vee 0$ *равносильно неравенству F(x)* $\vee 0$ *в области определения выражения F(x)* .
- Выделим некоторые выражения *F и* соответст-вующие им рационализирующие выражения *G*.

# Метод рационализации.

| Выражение F(x) | Выражение G(x) |
|---|---|
| $\log_h f - \log_h g$ | $(h-1)(f-g)$ |
| $\log_f h - \log_g h$ | $(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$ |
| $h^f - h^g$ | $(h-1)(f-g)$ |
| $f^h - g^h$ | $(f-g)h$ |
| $\lvert f \rvert - \lvert g \rvert$ | $(f-g)(f+g)$ |
| $\log_h f \cdot \log_p g$ | $(f-1)(g-1)(h-1)(p-1)$ |
| $\sqrt{f} - \sqrt{g}$ | $f - g$ |

# Метод рационализации. Примеры.

1. $\log_{2x+3} x^2 < 1$

2. $\log_{\frac{x}{3}}(\log_x \sqrt{3-x}) \geq 0$

3. $\log_{84-2x-2x^2}(cosx) \leq \log_{x+19}(cosx)$

# Домашнее задание.

1. $\log_{\frac{\pi}{3}}(x^2-2x-9) \geq \log_{\frac{\pi}{3}}(x+1)$

2. $\dfrac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)} < 0$

3. $\dfrac{2\log_{2x-1}|x|}{\log_{2x-1}(x+7)} \leq \dfrac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}$

4. $\left(x+\dfrac{x}{3}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \geq 4\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2$

5. $\dfrac{1}{6x^2-5x} \geq \dfrac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}$

# Домашнее задание.

6. $7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x - x^2 - 7) \geq 1$

7. $\sqrt{4x - x^2 - 3} \geq \sqrt{x^2 - 7x + 12} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

8. $\dfrac{12^x - 4^{x+1} - 3^{x+1} + 12}{x^2 - 2x + 1} < 0$

9. $(3 + 2\sqrt{2})^x + 3 < 4 \cdot (3 - 2\sqrt{2})^x$