Финансовый Университет при Правительстве РФ

Кафедра «Прикладная математика».

Угрозов Валерий Вячеславович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ФИНАНСОВЫХ РЕШЕНИЙ

Тема1. Финансовые инструменты.

1.1. Процентные вычисления. Простые и сложные проценты.
1.2.Потоки платежей. Рента.
1.3.Облигация. Дюрация.
1.4. Производные финансовые инструменты.

Методология финансово-экономических расчетов

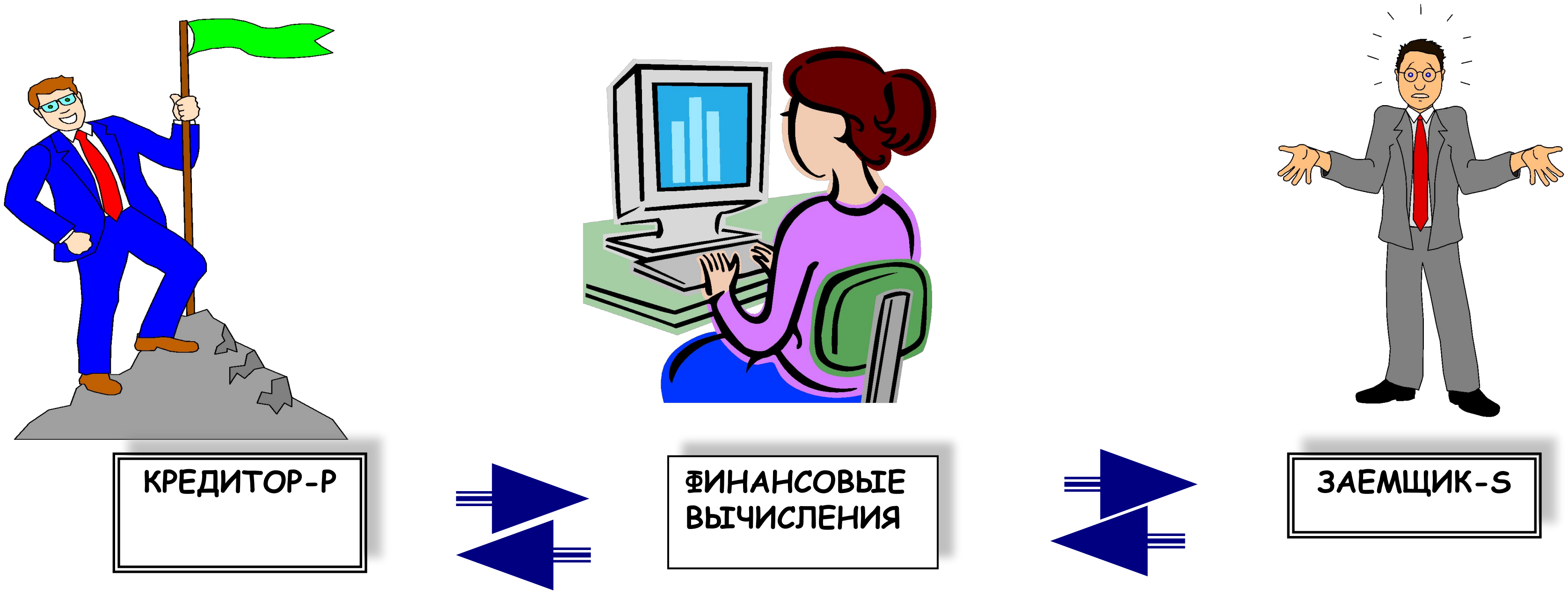


Рис.1. Схема взаимодействия кредитора и заемщика

- Заключая финансово-экономические сделки, договаривающиеся стороны оговаривают определенные условия, изменение которых сопряжены с выгодой для одной стороны и убытками с другой стороны. Учитывая это обстоятельство, обе стороны заинтересованы в объективной и грамотной количественной оценке условий сделки, которая строится на **основе финансовых вычислений.**

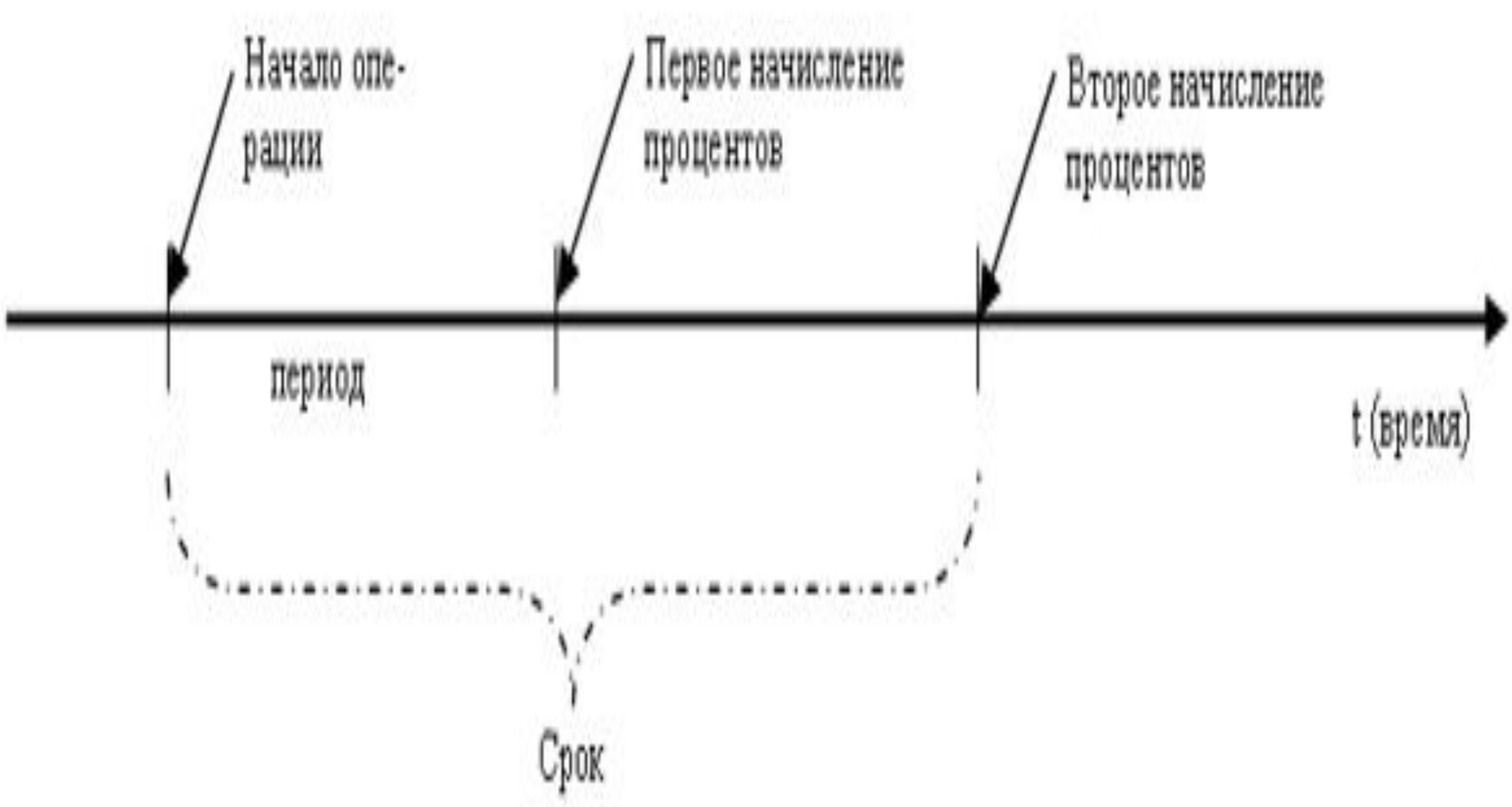
Время как фактор в финансовых расчетах.

- Учет фактора времени обусловлен **неравноценностью денег**. Равные по абсолютной величине «сегодняшние деньги ценнее будущих. Зависимость ценности денег от времени объясняется тремя причинами:
- 1. Деньги могут эффективно использоваться, как финансовый актив, **приносящий доход**, то есть их можно инвестировать и тогда они будут приносить доход.
- 2. **Инфляционные процессы** обесценивают деньги во времени, то есть сегодня на рубль можно купить товара больше чем завтра.
- 3. Неопределенность будущего и связанный с этим **риск повышают ценность имеющихся денег.** Имея рубль сегодня его уже можно израсходовать на потребление, а будет ли он завтра – еще вопрос.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

- ***1.P– первоначальная сумма долга или современная (текущая) стоимость (PV- present value);)***
- ***2. I- <u>проценты </u>(процентные деньги) I -*** абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в виде: выдачи денежной ссуды, продажи в кредит, учета векселя, помещения денег в банк и т.д.
- <u>***3.Наращение*** первоначальной суммы</u> - **процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга.**
- <u>***4.*** $\boxed{S=P+I}$ ***– наращенная сумма или будущая стоимость (FV- future value), т.е. первоначальная сумма долга с начисленными на нее процентами к концу срока ссуды***</u>

Схема начисления процентов



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

- ***Процентная ставка i*** - **отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды.**
- $\boxed{i=(S-P)/P}$
- **Период начисления** n- **интервал времени, к которому относится процентная ставка.**
- **Коэффициент наращения или множитель наращения K, – это отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга**
- $\boxed{K=S/P}$

Способы начисления процентных ставок

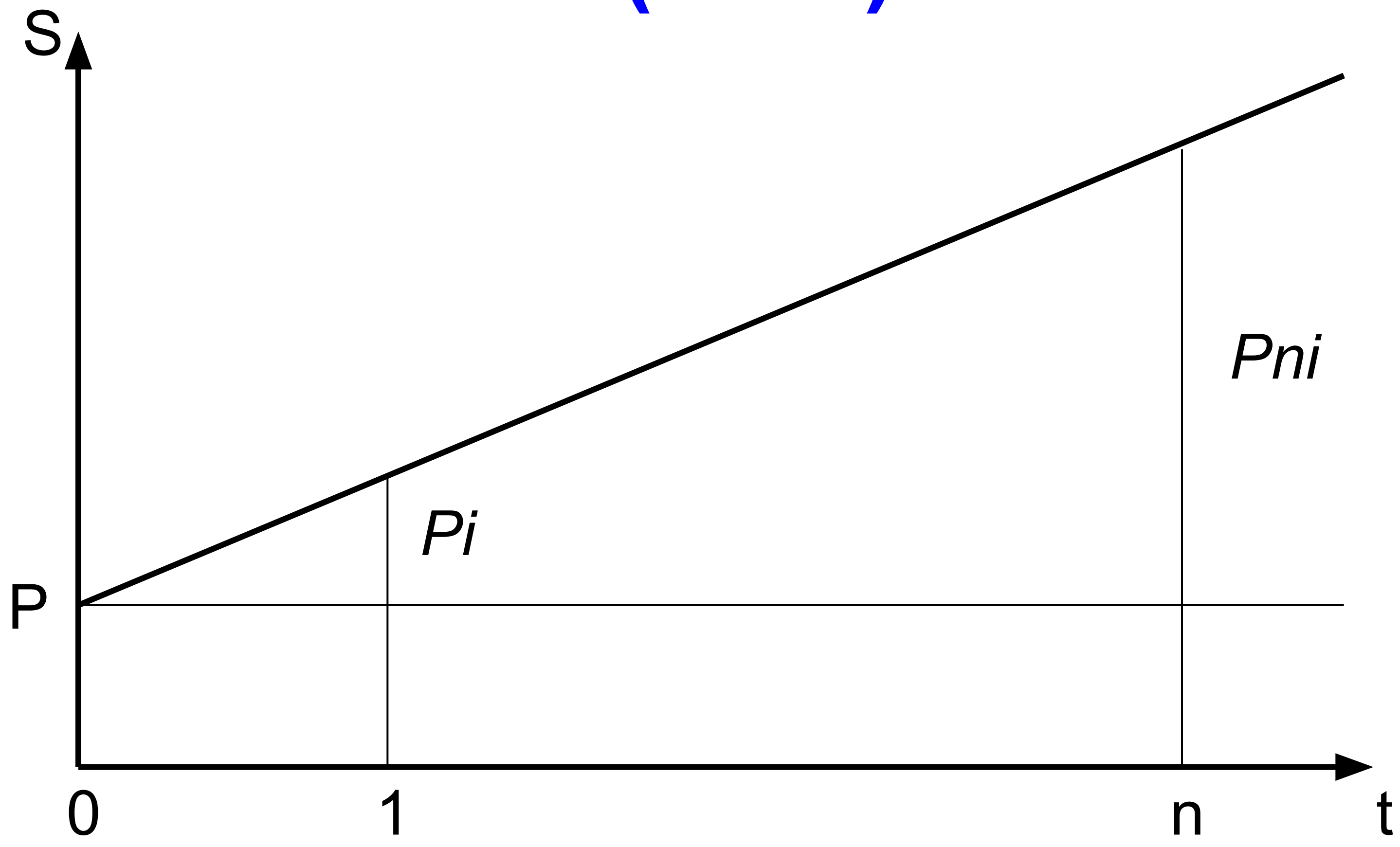
- ***Простые*** ставки процентов применяются к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды;
- ***Сложные*** ставки процентов применяются к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами.
- Процентные ставки, указываемые в контрактах, могут быть:
- ***Постоянными*** – их величина не изменяется с течением времени;
- ***Переменными («плавающими»)*** – значение ставки может быть равно сумме некоторой изменяющейся во времени базовой величины и надбавки к ней ***(маржи).***

1. Простые проценты

- ***Пусть : P - первоначальная сумма денег, ден. ед., i - ставка простых процентов, в % или долях.***
- ***Схема начисления простых % :***
- $$S= P + Pi + Pi + Pi + \dots + Pi$$
- ***S определяется по формуле простых процентов***
- $$S = P *(1 + n* i)= P + I \qquad (1.1)$$
- $$I=P*n*i \qquad (1.2)$$
- ***где $K_{n,i}$ =S/P=(1 + n i) - множитель наращения;***
- ***I –проценты (процентные деньги)***

Простые проценты

$$S=P(1+ni)$$



Пример 1.1. Ссуда размером P=100 000 руб. выдана на срок n=1,5 года при ставке простых процентов равной i=15% **годовых**. Определить **I - проценты** и S-**сумму накопленного долга**

- Для расчета процентов ***I*** за пользование ссудой в течение 1,5 лет воспользуемся формулой (1.2):
- $\boldsymbol{I = P * n * i} = 100\,000 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}15 = 22\,500$ руб.
- По формуле (1.1), находим сумму накопленного долга ***S*** по истечении 1,5 лет:
- $\boldsymbol{S = P + I} = 100\,000 + 22\,500 = 122\,500$ руб.

Практика начисления простых процентов

- Ставка процентов обычно устанавливается в расчете за год!!!
- При продолжительности ссуды менее года, величину n выражают в виде дроби:
- $$n = t / T \qquad (1.3)$$

где **n - срок ссуды** (измеренный в долях года), ***t*** **- срок операции** (срок пользования ссудой) в днях, Т - **число дней в году** (временная база).

Практика начисления простых процентов

- ***В практике используются три варианта расчета :***
- **а) точные проценты ("английская практика расчета"):**
- $$n=t_T/T_T \qquad (1.3.1)$$
- где t_T - точное число дней ссуды и T_T=365 или 366 дней.
- **б) обыкновенные (коммерческие) проценты ("французская практика расчета"**):
- $$n=t_T/To \qquad (1.3.2)$$
- где To=360 дней
- **в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды** ("германская практика расчета"),
- $$n=to/To \qquad (1.3.3)$$
- где to- продолжительность ссуды определяется числом месяцев, когда все месяцы содержат по 30 дней, и дней ссуды.)
- **Замечание.** *При расчетах дата выдачи и дата погашения долга считается* ***за один день****. Вариант расчета с приближенным измерением времени ссуды и точной временной базы* ***не применяется.***

Пример.1.2. Ссуда, размером 100 000 руб., выдана на срок с 21 января 2009 г. до 3 марта 2009 г. при ставке простых процентов, равной 15% годовых. Найти:а) **точные проценты** с точным числом дней ссуды; б) **обыкновенные проценты** с точным числом дней ссуды; в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

- **Решение.**
- Для вычисления воспользуемся формулами: $I = P\,n\,i = P\,(t\,/\,T)\,i; \quad n = t\,/\,T$
- а) T = 365, t = 41, I_a = 100 000 * 41 / 365 * 0,15 = 1 684,93 руб.
- б) T = 360, t = 41, $I_б$ = 100 000 * 41 / 360 * 0,15 = 1 708,33 руб.
- в) T = 360, t = 42, $I_в$ = 100 000 * 42 / 360 * 0,15 = 1 750,00 руб.

Наращение

?

Н А С Т О Я Щ ЕЕ

Исходная сумма (P)

Ставка процентов (i)

Б У Д У Щ Е Е…

Возвращаемая сумма (S)

Дисконтирование

(учет)

Приведенная сумма (P)

Ожидаемая к поступлению сумма (S)

Учетная ставка (d)

Дисконтирование и учет по простым ставкам

- В практике финансовых вычислений часто приходится решать задачу, обратную наращению процентов, когда по заданной сумме ***S***, соответствующей концу финансовой операции, требуется найти исходную сумму ***P****.*
- Расчет ***P*** по ИЗВЕСТНОМУ ЗНАЧЕНИЮ ***S*** называется ***дисконтированием*** суммы ***S***.
- Величину ***P****,* найденную дисконтированием, называют ***современной величиной (текущей стоимостью)*** суммы ***S***.
- Проценты в виде разности ***D = S - P*** называются ***дисконтом или скидкой.***
- В финансовых вычислениях используется два вида дисконтирования:
- **математическое дисконтирование;**
- **банковский (коммерческий) учет.**

Математическое дисконтирование

- ***Математическое дисконтирование*** - решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды.
- Если в прямой задаче рассчитывается наращенная сумма $S = P(1+ n*i)$, то в обратной находится
- $$\boxed{P = S* 1/ (1 + n*i)} \qquad (1.5)$$
- **Дисконт суммы *S*** равен
- $$\boxed{D = S - P} \qquad (1.6)$$

Пример 1.4. Через 90 дней после подписания договора должник уплатит 1 000 000 руб. Кредит выдан под 20% годовых (проценты обыкновенные). Какова первоначальная сумма и дисконт?

- Дано: $\boldsymbol{S}$ **=** 1 000 000 руб., $\boldsymbol{n}$ **=** t/K = 90/360, $\boldsymbol{i}$ **=** 0,20 или 20%. Найти $\boldsymbol{P}$ **= ?**
- **Решение: Во**спользуемся формулами (1.5) и (1.6):
- $\boldsymbol{P = S / (1 + n*i)}$ = 1 000 000 / (1+0,20*90/360) = 952 380,95 руб.
- $\boldsymbol{D = S - P}$ = 1 000 000 - 952 380,95 = 47 619,05 руб.

Банковский или ***коммерческий учет*** (учет векселя)

- ***Банковский*** *или* ***коммерческий учет*** *(учет векселя) заключается в том, что банк до наступления срока -**n** платежа по векселю или другому платежному обязательству покупает его у владельца (являющегося кредитором) по цене –**P** ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока-**S**, то есть приобретает (учитывает) его с дисконтом-**D**. Для расчета процентов при учете векселей применяется* ***учетная ставка****, которая обозначена символом **d**.*
- *Простая годовая* ***учетная ставка*** *рассчитывается по формуле: .*
- $$\boxed{d = (S-P)/S*n} \qquad (1.7)$$

Банковский или ***коммерческий учет***

- *Размер дисконта, удерживаемого банком, равен*
-
- $$D = S * n * d = S * (t / T) * d, \qquad (1.8)$$
- *откуда*
- $$P = S - D = S*(1 - (t / T)*d) \qquad (1.9)$$

- *Замечание :*
- ***1) n - измеряет период времени от момента учета векселя до даты его погашения в годах.***
- ***<u>2) Дисконтирование по учетной ставке производится чаще всего при условии, что год равен 360 дням.</u>***

Пример 1.5. Через 90 дней предприятие должно получить по векселю 1 000 000 рублей. Банк приобрел этот вексель с дисконтом. Банк учел вексель по учетной ставке 20% годовых (год равен 360 дням). Определить дисконт *D* и полученную предприятием сумму *P*.

- **Дано: *S* = 1 000 000 руб., *t* = 90 дней,*d* = 0,20 или 20% .Найти *D* = ? , *P* = ?**
- **Решение.**
- **Для вычисления дисконта воспользуемся формулой (1.8)**
- **$D = S*(t / T)*d$ = 1 000 000 *(90/360) * 0,20 = 50 000 руб.**
- **По формуле (1.9) рассчитаем сумму, которую предприятие получит в результате учета векселя:**
- **$P = S - D$ = 1 000 000 – 50 000 = 950 000 руб.**

2. Сложные проценты

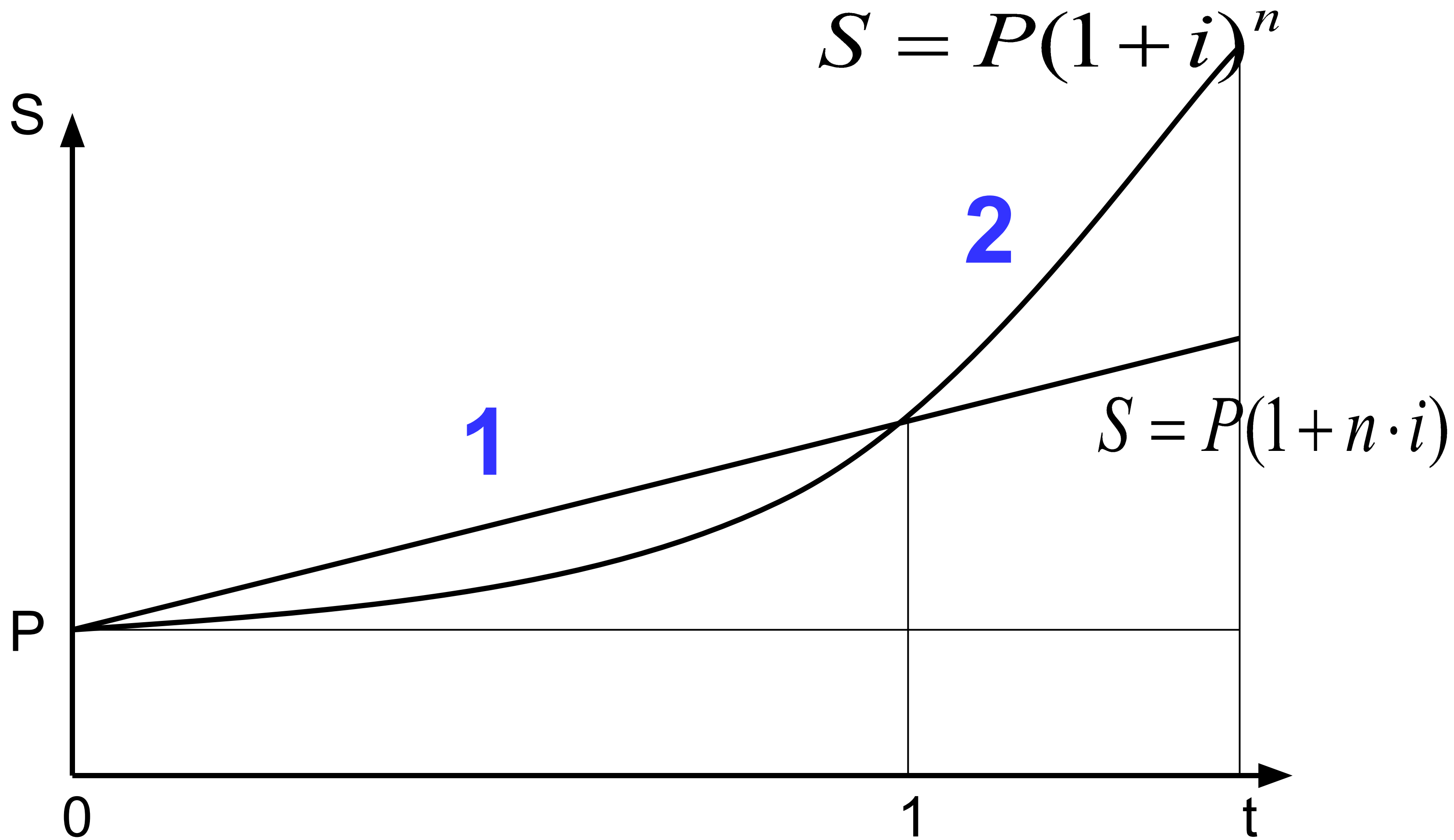
- **Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных операциях (сроком более 1 года), если проценты не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга.**
- **Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, называют *капитализацией процентов*.**

2.1. Наращение по сложным процентам с постоянной ставкой

- Пусть первоначальная сумма долга равна ***P***, тогда через один год сумма долга с присоединенными процентами составит S1=$\boldsymbol{P\,(1+i)}$, через 2 года:S2= $\boldsymbol{P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2}$,… через n лет:
- Схема начисления: $\{P + Pi\} + \{P(1+i) + P(1+i)i\} + \{P(1+i)^2 + P(1+i)^2 i\} + \ldots =$
-

Формула наращения для сложных процентов

-
- $$S = P*(1+ i)^n, \qquad (2.1)$$
- где ***S*** – наращенная сумма, ***i*** – годовая ставка сложных процентов, n – срок ссуды, $K_p = (1+ i)^n$ – множитель наращения.
- **Замечание.**
- На практике обычно используют дискретные проценты (проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени: год, полугодие, квартал).



Зависимость S от времени-n: 1-простые % и 2-сложные %.

Пример 2.1. В кредитном договоре на сумму 1 000 000 руб. и сроком на 4 года зафиксирована ставка сложных процентов, равная 20% годовых. Определить наращенную сумму по истечении указанного срока.

- Дано: $\boldsymbol{P} = 1\ 000\ 000$ руб., $\boldsymbol{n} = 4$ года, $\boldsymbol{i} = 0{,}20$ или 20% . Найти $\boldsymbol{S} = ?$

  Решение.
- Используя формулу(2.1) получим:
- $\boldsymbol{S = P\,(1 + i\,)^n} = 1\ 000\ 000 \cdot (1+0{,}20)^4 = 2\ 073\ 600$ руб.

2.2. Наращение по сложным процентам при изменении ставки во времени

Если ставка сложных процентов меняется во времени, то формула наращения имеет вид:

$$S = P\cdot(1+i_1)^{n_1}\cdot(1+i_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(1+i_m)^{n_m} = P\cdot\prod_{k=1}^{m}(1+i_k)^{n_k} \qquad (2.2)$$

где i_1, i_2,..., i_k - значения ставок процентов, действующих в соответствующие периоды времени n_1 , n_2 , ... ,n_k , $\prod_{k=1}^{m}(1+i_k)^{n_k}$ - множитель наращения.

Номинальная ставка процентов

Пусть годовая ставка сложных процентов равна ***j***, а **число периодов начисления в году *m*.** При каждом начислении проценты капитализируются, то есть добавляются к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. Каждый раз проценты начисляют по ставке ***j/m*.**

Ставка ***j*** - называется ***номинальной.***

Начисление процентов по номинальной ставке производится по формуле:

$$S = P*(1+ j/m)^{N}, \qquad (2.3)$$

где ***N*** - число периодов начисления (***N = m*n***, может быть и дробным числом).

Пример 2.3. Ссуда 20 000 000 руб. предоставлена на **28 месяцев** под сложные проценты 18% годовых. Проценты начисляются **ежеквартально**. Вычислить наращенную сумму по истечении срока.

- Дано:***P*** = 20 000 000 руб.,***j*** **=** 0,18 (18%) ,
- ***n*** = 28 месяцев = 28/12 лет,***m*** = 4. Найти ***S=?***

Решение.

- ***Всего за n лет имеем N = m*n = 4*(28/12) = 28/3 периодов начислений при ежеквартальном (m = 4) начислении процентов в году.***
- ***Далее по формуле (2.3) находим: S = 20 000 000 * (1+ 0,18 / 4)*** $^{(28/3)}$ ***= 30 161 206,25 руб.***

Эффективная ставка

- ***Эффективная ставка* показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и *m*-разовое наращение в год по ставке *j/m.***
- Если проценты капитализируются ***m*** раз в год, каждый раз со ставкой ***j/m,*** то, по определению, можно записать равенство для соответствующих множителей наращения:

$$(1+ i_э)^n = (1+j/m)^{m*n} \qquad (2.4)$$

- где ***iэ***, ***j*** - эффективная и номинальная ставки.
- **Зависимость эффективной от номинальной ставки** выражается соотношением

$$i_э = (1 + j/m)^m - 1 \qquad (2.5)$$

- **Зависимость номинальной от эффективной ставки** выражена следующей формулой:

$$j = m\,[(1+ i_э)^{1/m} - 1] \qquad (2.6)$$

Пример 2.4. Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально – m=4, исходя из номинальной ставки j=0,16 или 16% годовых.

Решение

Вычисления проводим по формуле (2.5) и находим

$$i_э = (1 + 0{,}16/4)^4 - 1 = 0{,}170, \text{ или } 17{,}0\%.$$

Пример 2.5. Определить, какой должна быть номинальная ставка-j=? при ежеквартальном начислении процентов-m=4, чтобы обеспечить эффективную ставку iэ= 12% годовых.

Решение.

Вычисления произведем по формуле (2.6):

$$j = m\,[(1 + i_э)^{1/m} - 1] = 4 \cdot [(1+0{,}12)^{(1/4)} - 1] = 0{,}11495, \text{ т.е. } 11{,}495\%.$$

Дисконтирование по сложной ставке %

- Определение. Величина ***P*** полученная дисконтированием ***S***, называется ***современной (текущей) стоимостью,*** или ***приведенной величиной S.***
- $$P = S*1/(1 + i)^{n} \qquad (2.7)$$
- При начислении процентов ***m*** раз в году :
- $$P = S / (1 + j / m)^{n*m} \qquad (2.8)$$
- ***D = S - P - дисконт***

Пример 2.5. Через 5 лет предприятию будет выплачена сумма 1 000 000 руб. Определить его современную стоимость при условии, что применяется ставка сложных процентов в 14% годовых.

- Дано: $\boldsymbol{n}$ = 5 лет, $\boldsymbol{S}$ = 1 000 000 руб., $\boldsymbol{i}$ **=** 0,14 или 14%.
- Найти $\boldsymbol{P = ?}$ **Решение.**
- Вычисления выполним по формуле :
- $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S} / (1 + \boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}$ $=1\,000\,000/(1+0{,}14)^5 = 519\,368{,}66$ руб.

Банковский учет.

- Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле:
- $$P = S(1 - d_{сл})^n \qquad (2.9)$$

- где $d_{сл}$ - сложная годовая учетная ставка.

- Дисконт :
- $$D = S - P = S[1 - (1 - d_{сл})^n] \qquad (2.10)$$

Пример 2.6. Через 5 лет по векселю должна быть выплачена сумма 1 000 000 руб. Банк учел вексель по сложной учетной ставке в 10% годовых. Определить сумму, которую получит векселедержатель и дисконт, который получит банк по истечении срока векселя.

- Дано: $\boldsymbol{n}$ = 5 лет, $\boldsymbol{S}$ = 1 000 000 руб., $\boldsymbol{d_{сл}}$ **=** 0,10 или 10% . Найти ***P = ?***, ***D = ?***
- **Решение.**
- Расчет суммы, которую получит векселедержатель, выполним по формуле (2.9):
- $\boldsymbol{P = S}(1 - \boldsymbol{d_{сл}})^{n} = 1\,000\,000 * (1 - 0{,}10)^{5} = 590\,490{,}00$ руб.
- Расчет дисконта, который получит банк, выполним по формуле (2.10):
- $\boldsymbol{D = S - P} = 1\,000\,000 - 590\,490 = 409\,510{,}00$ руб.

Непрерывное начисление процентов

- *Непрерывное начисление процентов используется при анализе сложных финансовых задач, например, обоснование и выбор инвестиционных решений. Оценивая работу финансового учреждения, где платежи за период поступают многократно, целесообразно предполагать, что наращенная сумма непрерывно меняется во времени и применять*
- ***формулу для непрерывного начисления процентов***
- $\boldsymbol{S = P \cdot exp^{j \cdot n} = P \cdot exp^{\delta \cdot n}}$, *(2.11)*
- *где δ=j – сила роста*

Пример . Кредит в размере на 100 тыс. долларов получен сроком на 3 года под 8% годовых. Определить сумму подлежащего возврату в конце срока кредита, если проценты будут начисляться: а) один раз в год; б) ежедневно; в) непрерывно.

- Решение
- а)начисление один раз в год:
- $S = 100'000 \cdot (1 + 0{,}08)^3 = 125'971{,}2$ дол.;
- б)ежедневное начисление процентов:
- $S = 100'000 \cdot (1 + 0{,}08 / 365)^{365 \cdot 3} = 127'121{,}6$ дол.;
- в) непрерывное начисление процентов:
- $S = 100'000 \cdot \exp^{0{,}08 \cdot 3} = 127'124{,}9$ долларов.

ДОХОДНОСТЬ

- *Доходность — это относительный показатель,* который говорит о том, какой процент приносит рубль инвестированных средств за определенный период.
- В финансовой практике принято, что показатель доходности или процент на инвестиции обычно задают или определяют в расчета нагод, если специально не сказано о другом временном периоде. Поэтому, если говорится, что некоторая ценная бумага приносит 20%,то это следует понимать, как 20% годовых.

Доходность за период

- Доходность за период — это доходность, которую инвестор получит за определенный период времени.

$$r = \frac{P_n}{P} - 1$$

где: r — доходность за период;
P — первоначально инвестированные средства;
p_n — сумма, полученная через n лет.

Доходность в расчете на год

$$r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P}} - 1$$

где: r — доходность в расчете на год;

n — число лет.

- Если сложный процент начисляется *m* раз в год, то доходность за год определяется на формуле:

$$r = m\sqrt[mn]{\frac{P_n}{P}} - 1$$

Процентные ставки и инфляция

Номинальная процентная ставка — это процентная ставка без учета инфляции. В качестве номинальных выступают процентные ставки банковских учреждений. Номинальная ставка говорит об абсолютном увеличении денежных средств инвестора.

Реальная процентная ставка — это ставка, скорректированная на процент инфляции. Реальная ставка говорит о приросте покупательной способности средств инвестора.

$$1+\text{номинальная ставка}=(1+\text{реальная ставка процента})\cdot\frac{\text{уровень цен в конце рассматриваемого периода}}{\text{уровень цен в начале рассматриваемого периода}}$$

$$1+r=(1+y)(1+i)$$

$$1 + r = (1 + y)(1 + i)$$

где: r — номинальная ставка процента;

y — реальная ставка процента;

i — темп инфляции.

Выполнив преобразование получим

$$y = \frac{1 + r}{1 + i} - 1$$

Если yi<<1, то

$$y = r - i$$