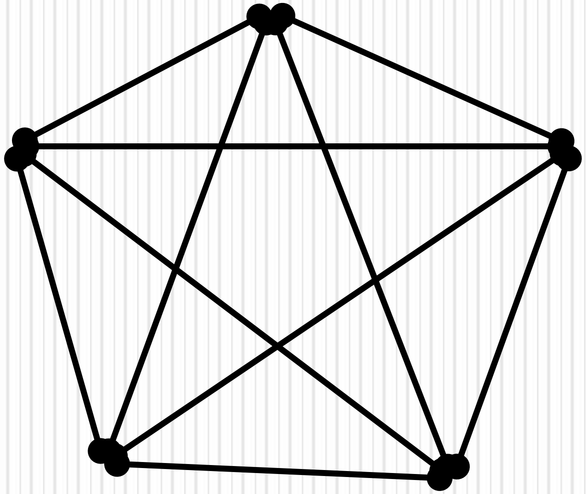
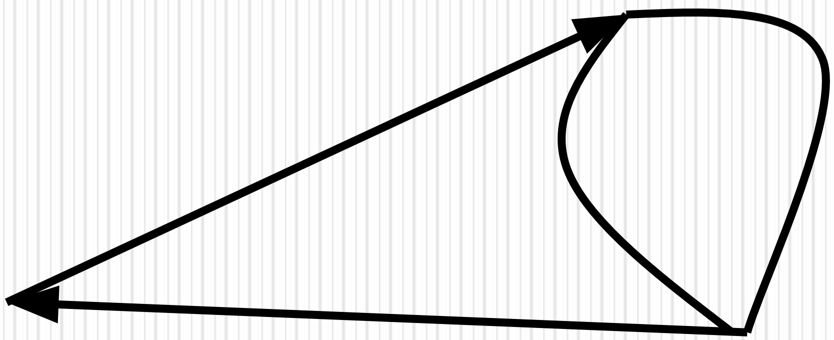
Графы. Элементы графов. Виды графов и операции над ними





ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ:

- ***Сведения из истории графов. Граф и его элементы.***
- ***Пути и маршруты в графах***
- ***Связные графы. Деревья***
- ***Операции над графами.***

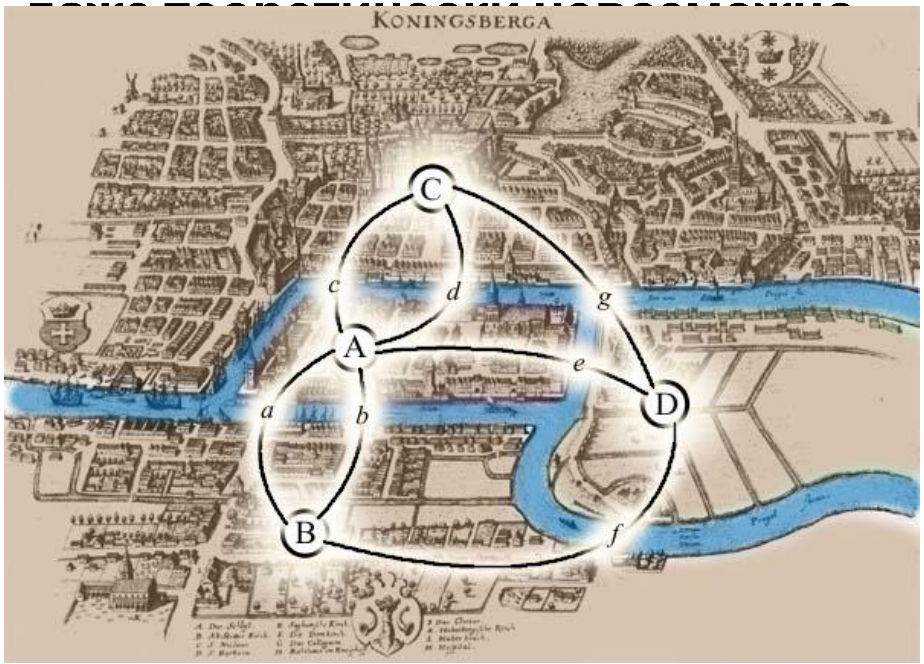
- ***Теория графов*** *представляет собой раздел математики, имеющий широкие практические приложения.*

- ***Теория графов*** *– область дискретной математики, особенностью которой является геометрический подход к изучению объектов.*

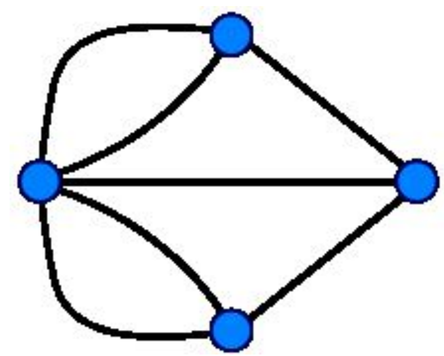
ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ГРАФОВ

- Впервые основы теории графов появились в работах **Леонарда Эйлера** (1707-1783; *швейцарский, немецкий и российский математик*) , в которых он описывал решение головоломок и математических развлекательных задач.
- **Теория графов** началась с решения Эйлером задачи о семи мостах Кёнигсберга.

Издавна среди жителей Кёнигсберга была распространена такая загадка: как пройти по всем мостам (через реку Преголя), не проходя ни по одному из них дважды? Многие пытались решить эту задачу как теоретически, так и практически, во время прогулок. Но никому это не удавалось, однако не удавалось и доказать, что это даже теоретически невозможно.



На упрощённой схеме части города (графе) **мостам соответствуют линии** (дуги графа), а **частям города** — точки соединения линий **(вершины графа).**



В ходе рассуждений Эйлер пришёл к следующим выводам: Невозможно пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды.

ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ГРАФОВ

Термин "*граф*" впервые появился в книге венгерского математика Д. Кенига в **1936** г., хотя начальные важнейшие теоремы о графах восходят к Л. Эйлеру.

В основе теории лежит понятие графа.

Граф - совокупность конечного числа точек, называемых **вершинами графа**, и попарно соединяющих некоторые из этих вершин линий, называемых ребрами или **дугами графа**. Иногда граф в целом можно обозначать одной заглавной буквой.

Графом $G = \langle V, X \rangle$ называется пара двух конечных множеств: **множество точек V** и **множество линий X (*ребер, дуг*)**, соединяющих некоторые пары точек.

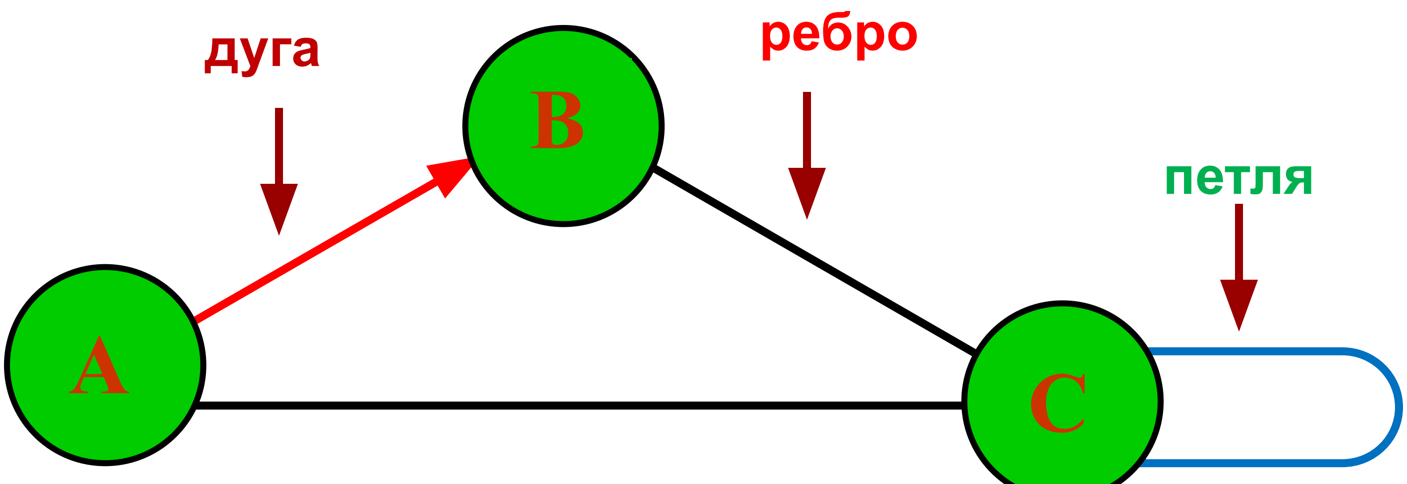
СОСТАВ ГРАФА

Граф состоит из ***вершин***, связанных линиями. ***Вершины графа*** обозначают латинскими буквами **A, B, C, D** или цифрами.

Направленная линия (***со стрелкой***) называется ***дугой***.

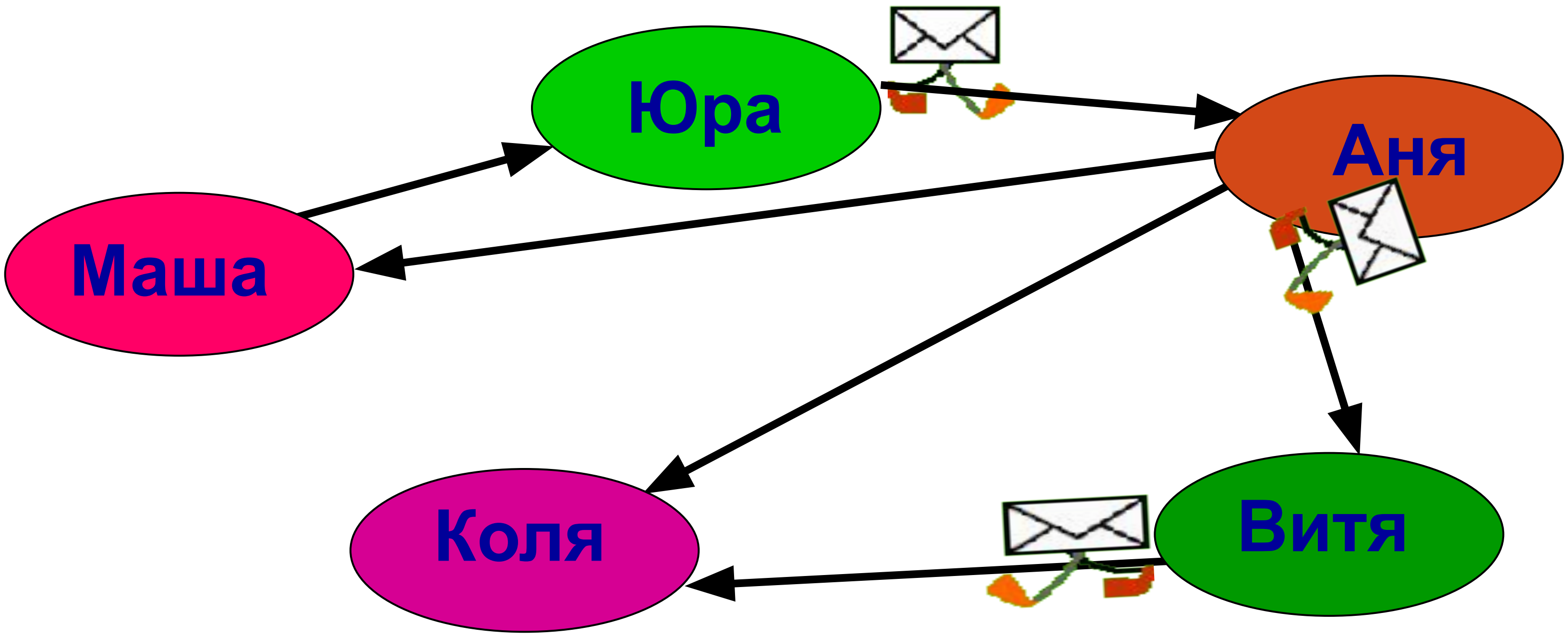
Линия ***ненаправленная*** (***без стрелки***) называется ***ребром***.

Линия, выходящая из некоторой вершины и входящая в неё же, называется ***петлей***.



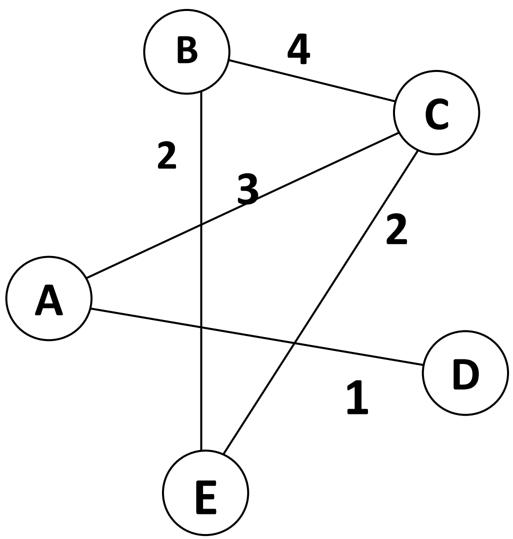
Ориентированный граф -

граф, вершины которого соединены *дугами*. С помощью таких графов могут быть представлены схемы односторонних отношений.



Взвешенный граф

- **Это граф, рёбрам или дугам которого поставлены в соответствие *числовые величины*** (они могут обозначать, например, расстояние между городами или стоимость перевозки).
- **Вес *графа равен сумме весов его рёбер*.**

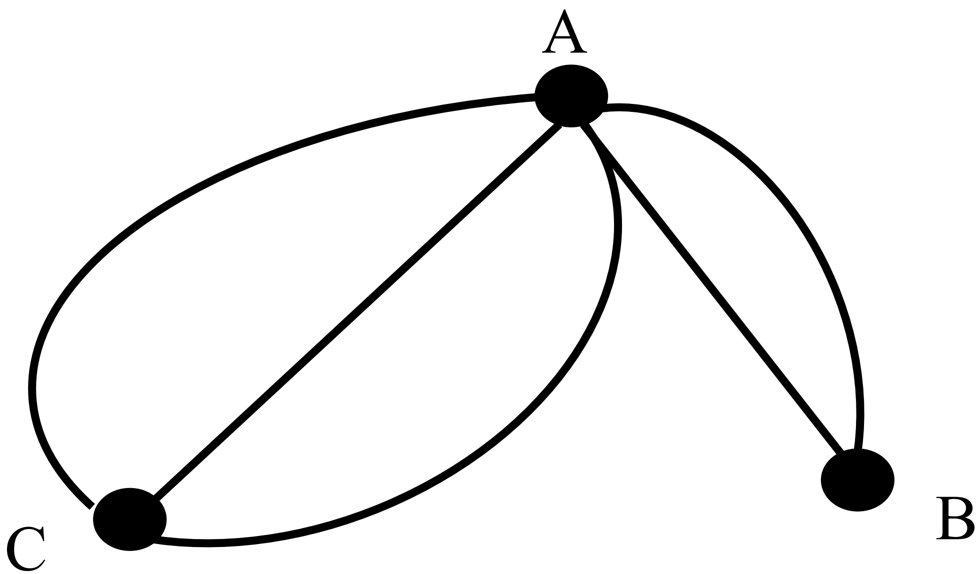


	A	B	C	D	E
A			3	1	
B			4		2
C	3	4			2
D	1				
E		2	2		

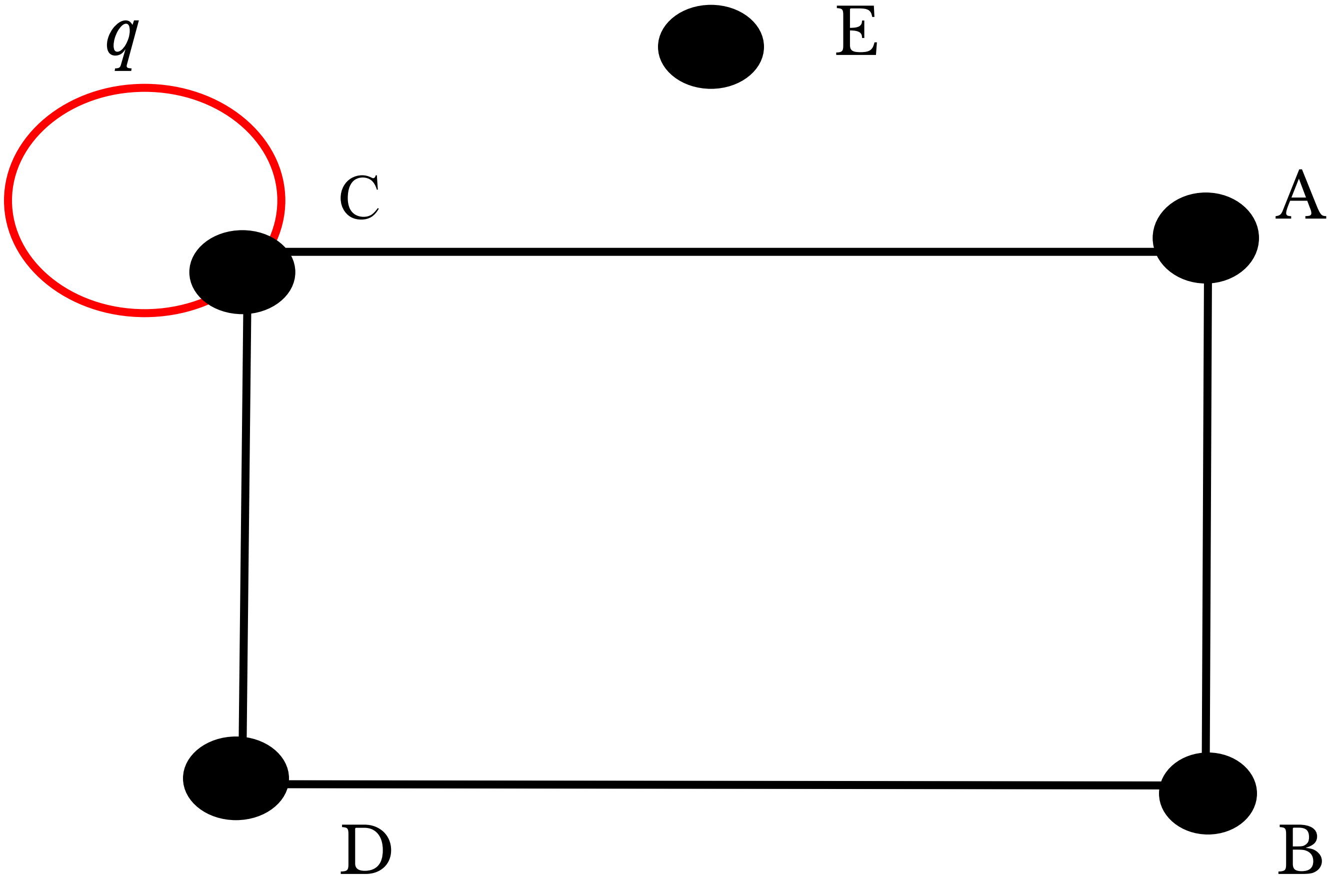
Таблице (она называется ***весовой матрицей***) соответствует граф.

- Если ребро графа G соединяет две его вершины V и W, (т.е. $(V, W) \in X$), то говорят, что это ребро им <u>инцидентно</u>.

- Две вершины графа называются <u>смежными</u>, если существует инцидентное им ребро: на рисунке смежными являются вершины A и B, A и C.

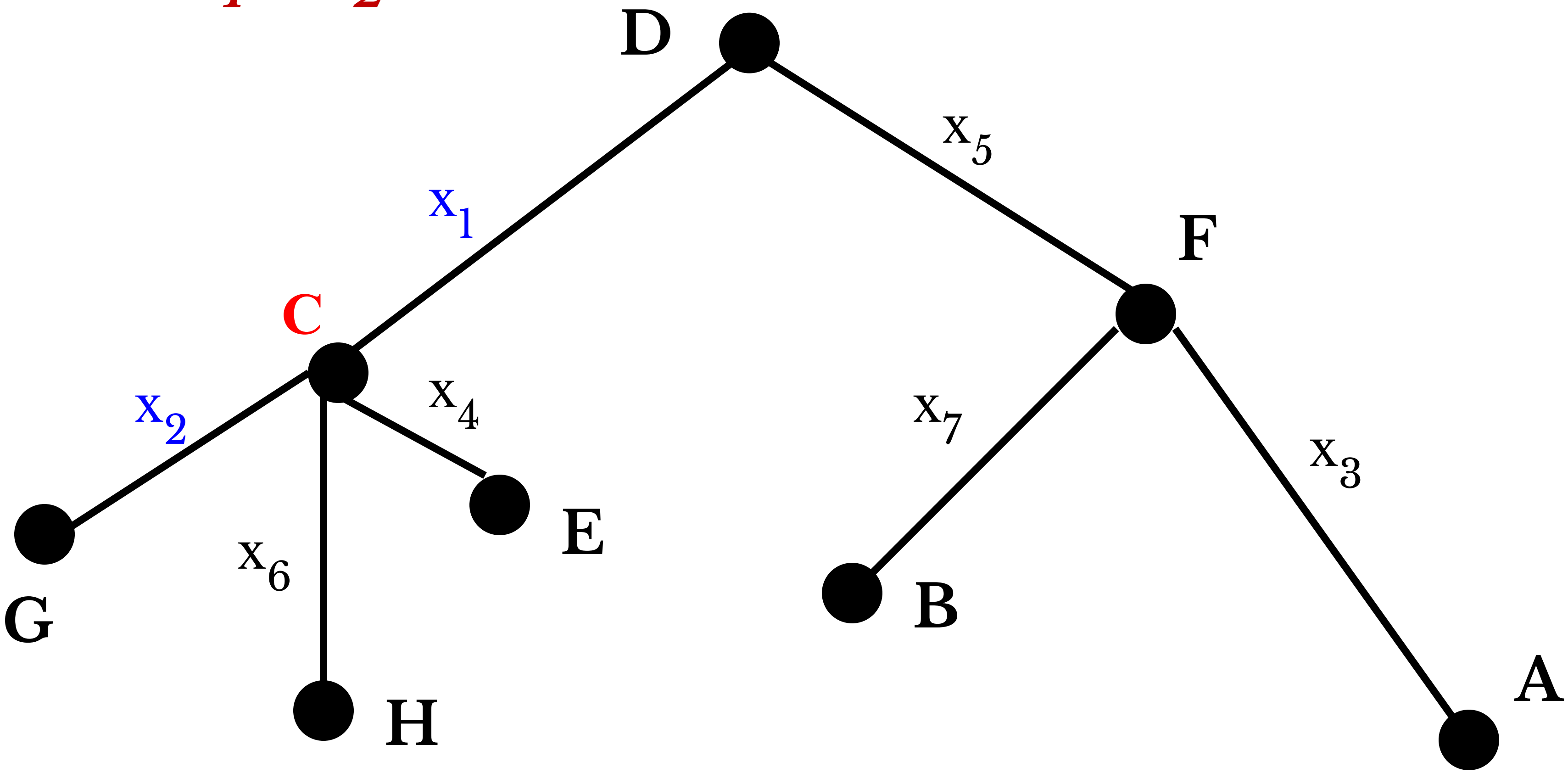


Если граф G имеет ребро , у которого начало и конец совпадают, то это ребро называется петлёй. На рисунке ребро q(C, C) – петля.



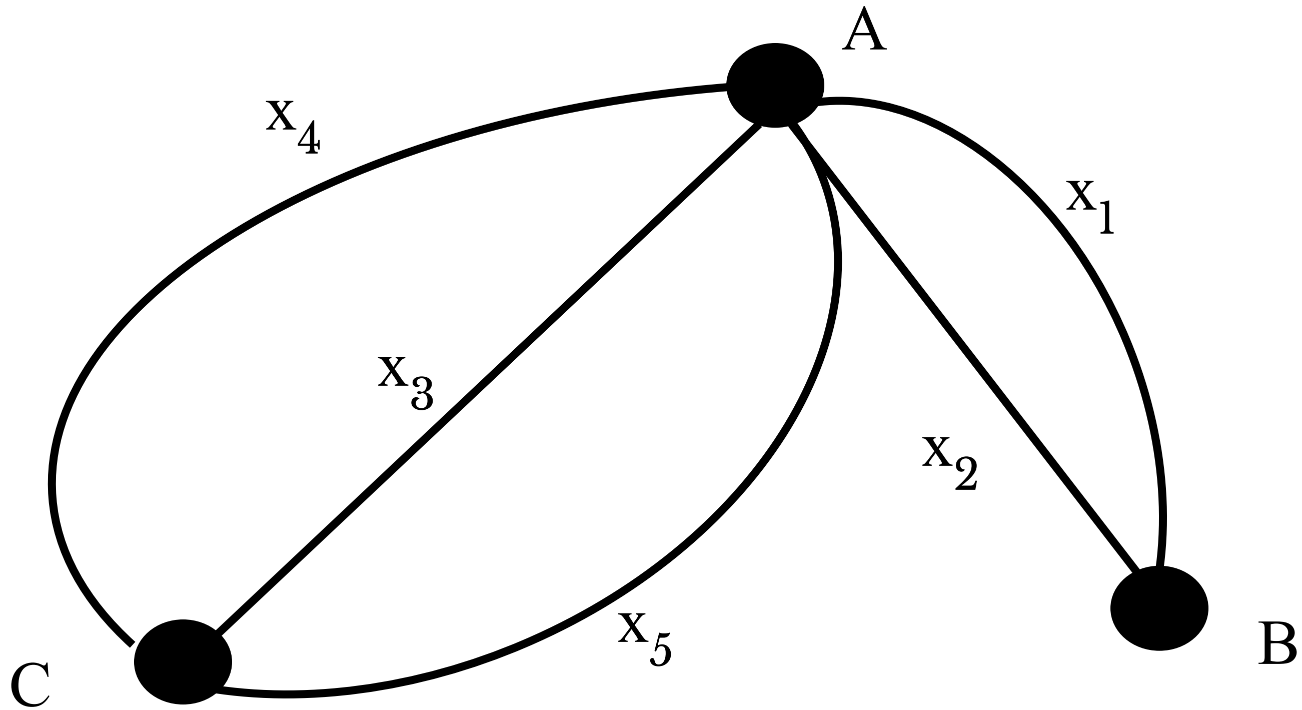
Два ребра называются **<u>смежными</u>**, если они имеют **общую вершину**.

На рисунке **смежными** являются, например, рёбра x_1 и x_2 с общей вершиной **С**.

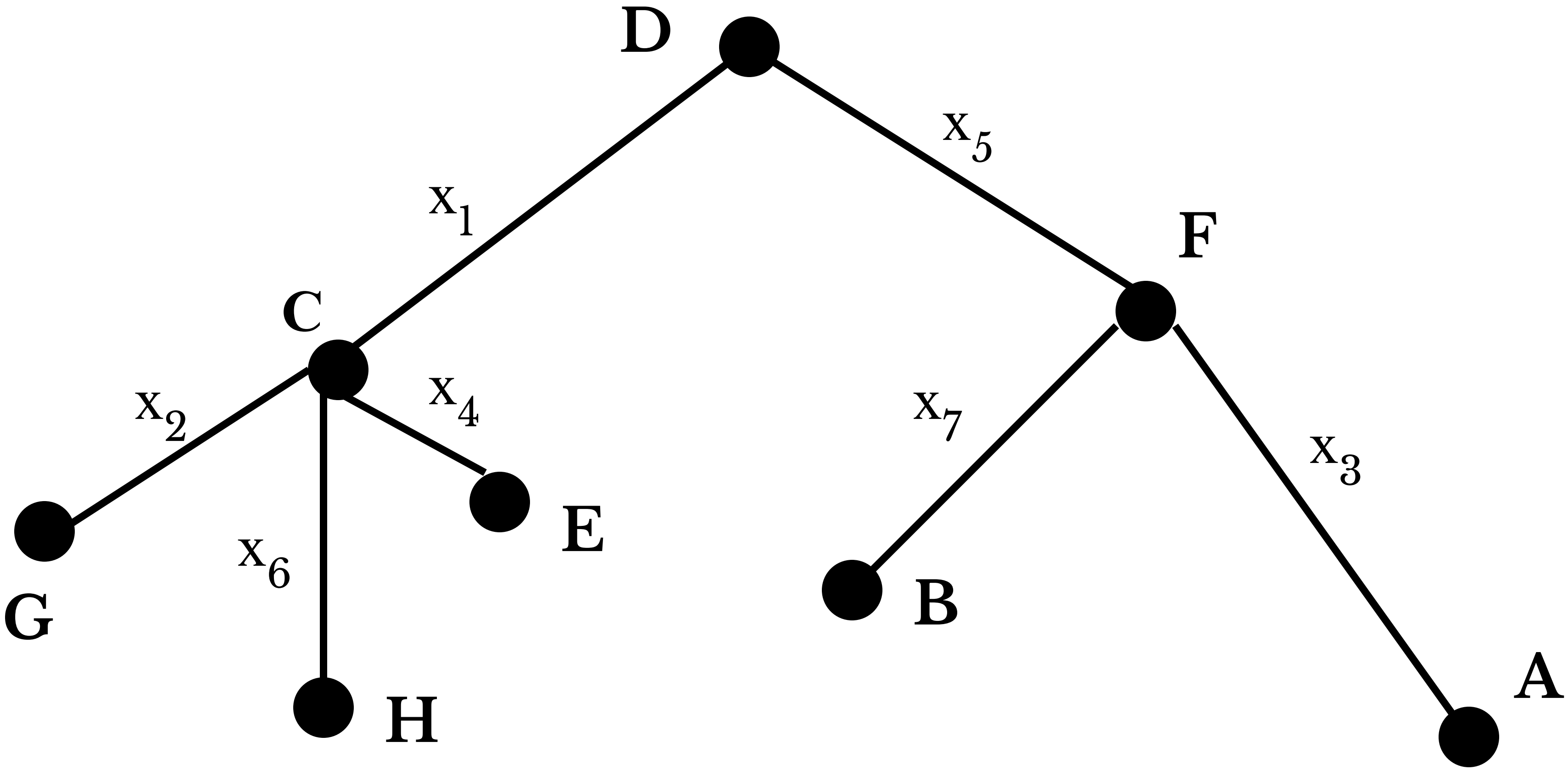


- **Рёбра**, которые начинаются в одной и той же вершине, заканчиваются также в одной и той же вершине, называются **кратными**, или **параллельными**.
- **Количество одинаковых пар** вида (V,W) называется **кратностью ребра** (V,W)
- **Число рёбер**, **инцидентных вершине A**, называется **степенью** этой вершины и обозначается $\deg(A)$ (от англ. ***degree*** – степень).

На рисунке кратными являются, например, рёбра x_1(A, B), x_2(A, B). Вершинам A и C инцидентны рёбра x_3, x_4, x_5. Следовательно, ребро AC имеет *кратность, равную* 3, а ребро AB – *кратность, равную* 2.

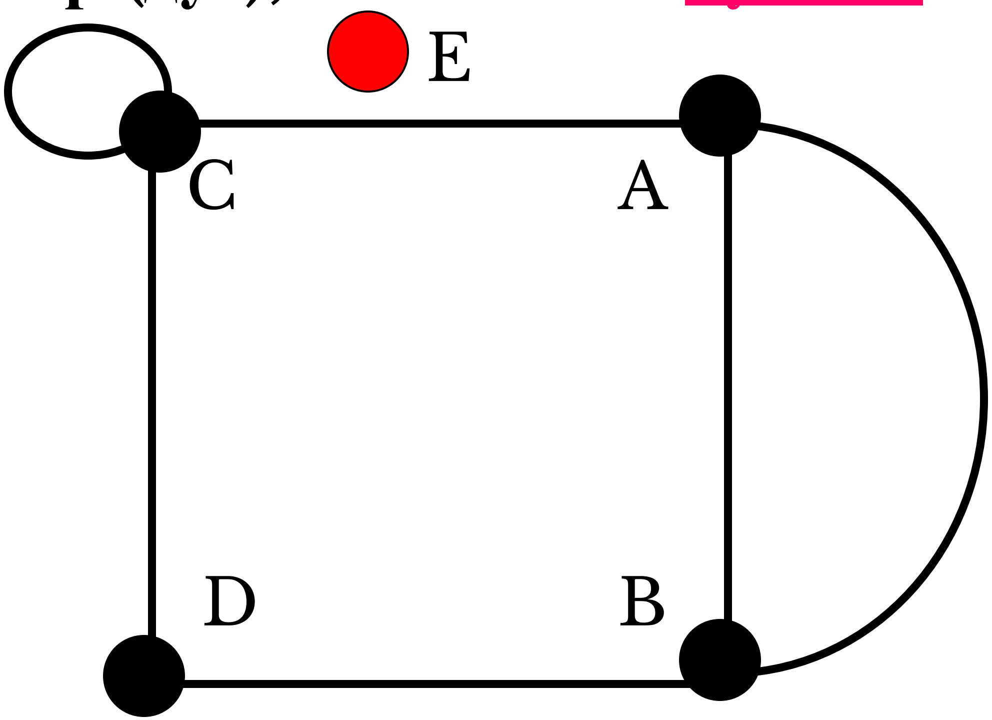


На рисунке вершина A имеет степень, равную 1, вершина C – 4, вершина D – 2. Записывается это в виде: deg(A)=1, deg(C)=4, deg(D)=2.

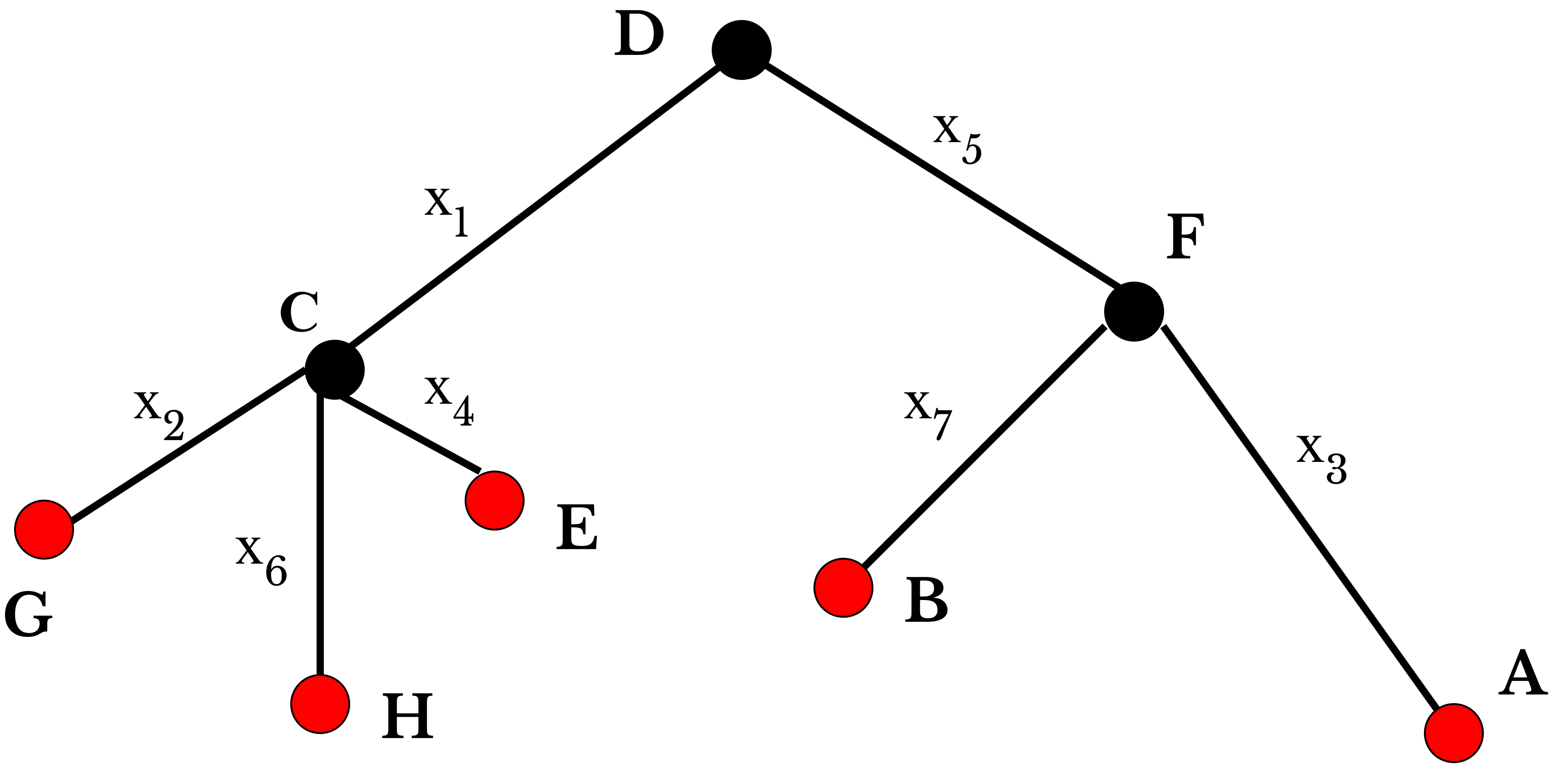


- **Вершина графа**, имеющая степень, равную нулю, называется **изолированной**.
- **Граф**, состоящий из изолированных вершин, называется **нуль-графом**.
- **Вершина графа**, имеющая степень, равную 1, называется **висячей**.
- **Граф**, не имеющий ребер (дуг), называется **пустым**.

На рисунке вершина
E – изолированная:
deg(E)=0.



На рисунке вершины A, B, E, G, H – висячие.



Теорема 1. ***В графе*** $G = \langle V, X \rangle$ ***сумма степеней всех его вершин – число чётное, равное удвоенному числу рёбер графа:***

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) = 2m$$

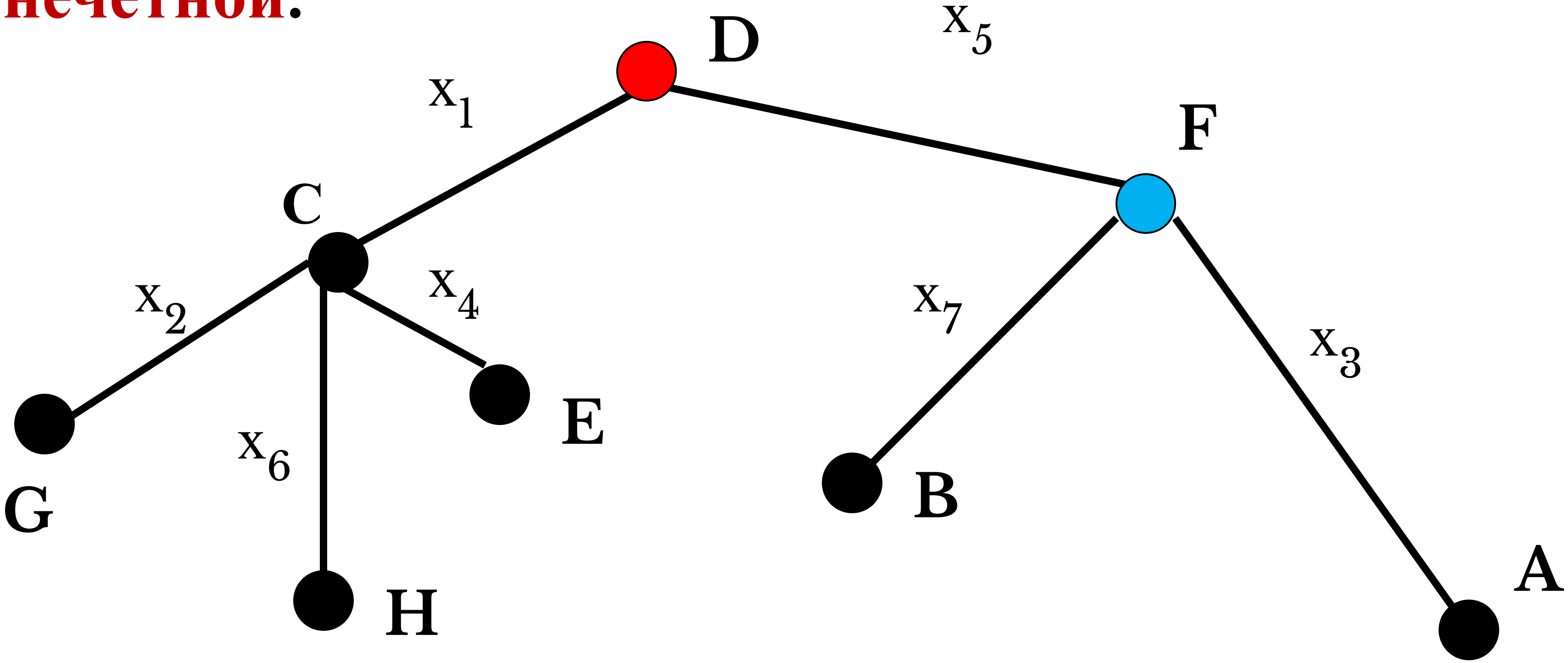
Количество ребер в любом графе равно половине суммы степеней его вершин.

где $n = |V|$ - число вершин;

$m = |X|$ - число рёбер графа.

Вершина называется **чётной** (**нечётной**), если её степень – ***чётное*** (**нечётное**) число.

На рисунке **deg(D)=2**, **deg(F)=3**, значит у графа вершина **D** является **чётной**, а **F** – **нечётной**.



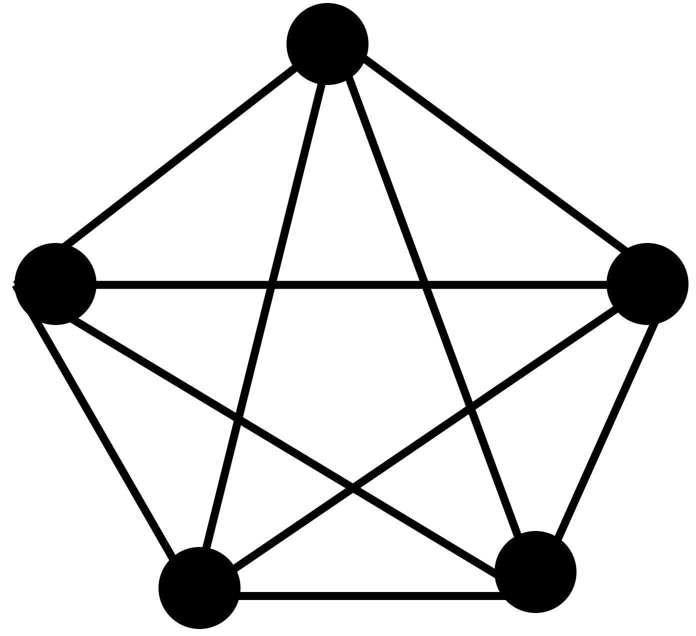
<u>Задача</u>. *В городе Маленьком* **15** *телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?*

Решение. В качестве вершин графа возьмем телефоны, а в качестве ребер – телефонные провода. Применим к этому графу теорему 1. Степень каждой вершины графа равна 5, значит, сумма степеней всех вершин равна $5 \cdot 15 = 75$. Это нечетное число, поэтому его половина – число нецелое. То есть в нашем графе нецелое число ребер, и в городе нецелое число проводов, чего быть не может.

Теорема 2. ***Всякий (неориентированный) граф содержит четное число нечетных вершин.***

Следствие. **Невозможно начертить граф с нечётным числом нечётных вершин.**

Граф G называется полным, если любые две его различные вершины соединены одним и только одним ребром.

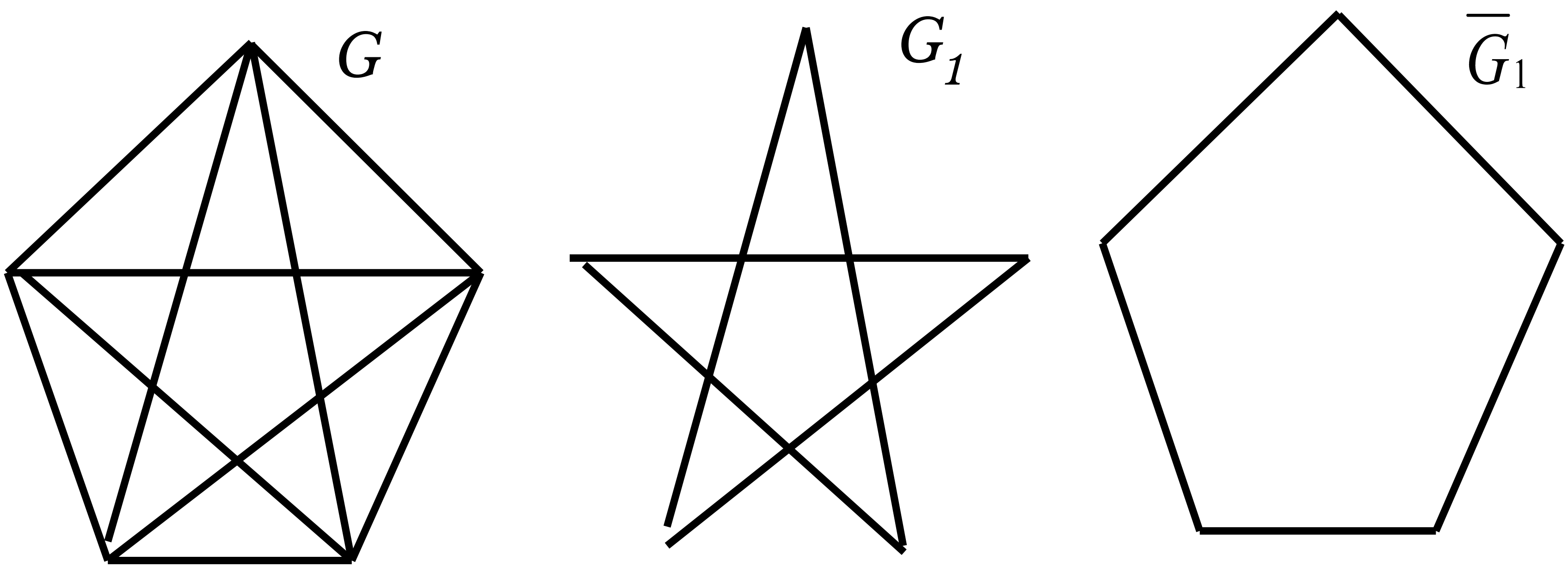


<u>Задача</u>. *В классе **30** человек. Может ли быть так, что **9** человек имеют по **3** друга, **11** — по **4** друга, а **10** — по **5** друзей?*

Решение. Сделаем учеников вершинами графа, а ребрами будем соединять тех из них, которые дружат между собой. По условию в таком графе четных вершин будет 11, а нечетных 9+10=19, то есть нечетное число, что противоречит теореме 2.

Дополнением графа $G = \langle V, X\rangle$, называется граф $\overline{G} = \langle V, X'\rangle$ с теми же вершинами V, что и граф G, и имеющий те и только те рёбра X', которые необходимо добавить к графу G, чтобы он стал полным. На рисунке дополнением графа G_1 до графа G является граф

$\overline{G}_1$



Закономерность 1.

- ***Степени вершин** полного графа **одинаковы**, и каждая из них на 1 меньше числа вершин этого графа*

Закономерность 2.

- ***Сумма степеней вершин графа** число **четное**, равное удвоенному числу ребер графа. Эта закономерность справедлива не только для полного, но и для любого графа.*

Закономерность 3.

- *Число **нечетных вершин** любого графа **четно**.*

Закономерность 4.

- ***Невозможно** начертить граф с **нечетным числом нечетных вершин**.*

Закономерность 5.

- *Если **все вершины** графа **четные**, то можно не отрывая карандаш от бумаги («одним росчерком»), проводя по каждому ребру только один раз, начертить этот граф. Движение можно начать с любой вершины и закончить его в той же вершине.*

Закономерность 6.

- ***Граф**, имеющий всего **две нечетные вершины**, можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги, при этом движение нужно начать с одной из этих нечетных вершин и закончить во второй из них.*

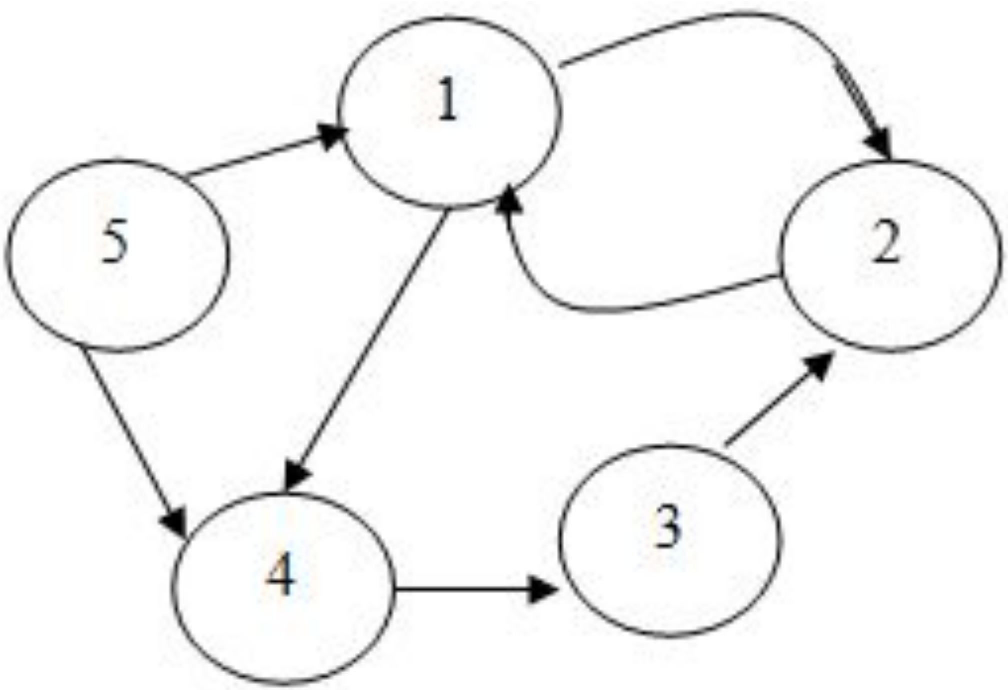
Закономерность 7.

- ***Граф*, имеющий более *двух нечетных вершин*, невозможно начертить «одним росчерком».** Фигура (граф), которую можно начертить не отрывая карандаш от бумаги, называется ***уникурсальной.***

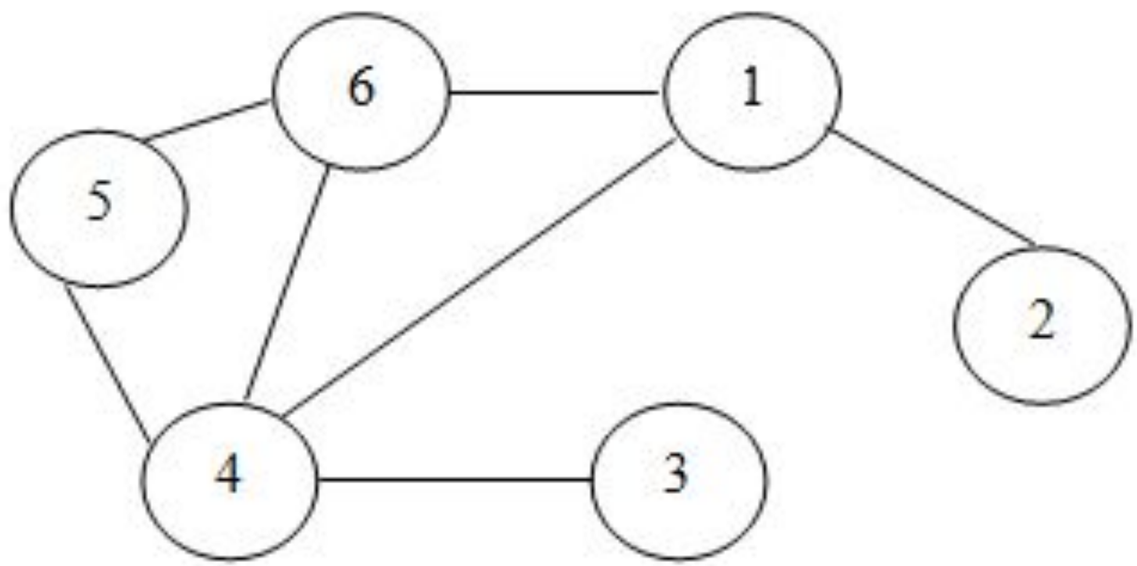
ПУТИ И МАРШРУТЫ В ГРАФАХ

- ***Путем*** **в ориентированном графе называется последовательность дуг, в которой конечная вершина любой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей дуги.**
- **Вершина, от которой проложен маршрут, называется *началом пути*, вершина в конце маршрута — *конец пути*.**
- **Путь, в котором каждая вершина используется не более одного раза, называется *простым путем*.**
- ***Длиной пути*** **в графе называется количество дуг (ребер), составляющих этот путь.**

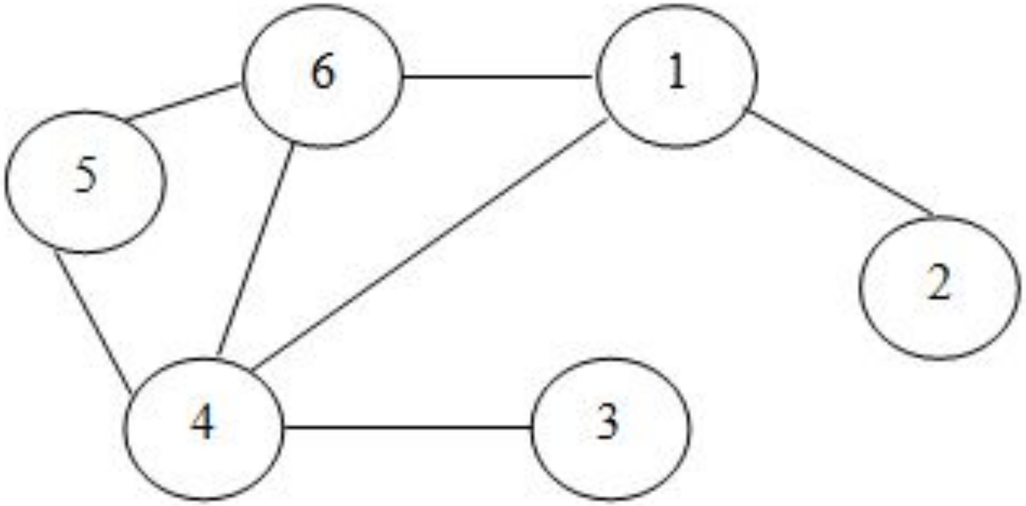
В качестве примера рассмотрим ***орграф***, представленный на рисунке. Одним из существующих **путей**, соединяющих вершины **1** и **3**, является последовательность вершин **1, 2, 1, 4, 3**. Единственным **простым путем** для той же пары вершин является последовательность **1, 4, 3**. Пути из вершины **1** в вершину **5** для того же графа не существует.



- ***Неориентированный граф*** **называется** ***связным***, **если существует хотя бы один путь между каждой парой вершин.**
- ***Орграф*** **называется** ***связным***, **если связен неориентированный граф, который получается из исходного ориентированного заменой всех дуг на ребра.**



- ***Путь*** называется ***замкнутым***, если начальная и конечная вершины совпадают.
- Замкнутый путь называется ***циклом***, если все его вершины (кроме начальной и конечной) различны.
- Рассмотрим граф. Для него путь 2, 1, 6, 5, 4, 1, 2 является **замкнутым**; а путь 1, 6, 5, 4, 1 является **циклом**.

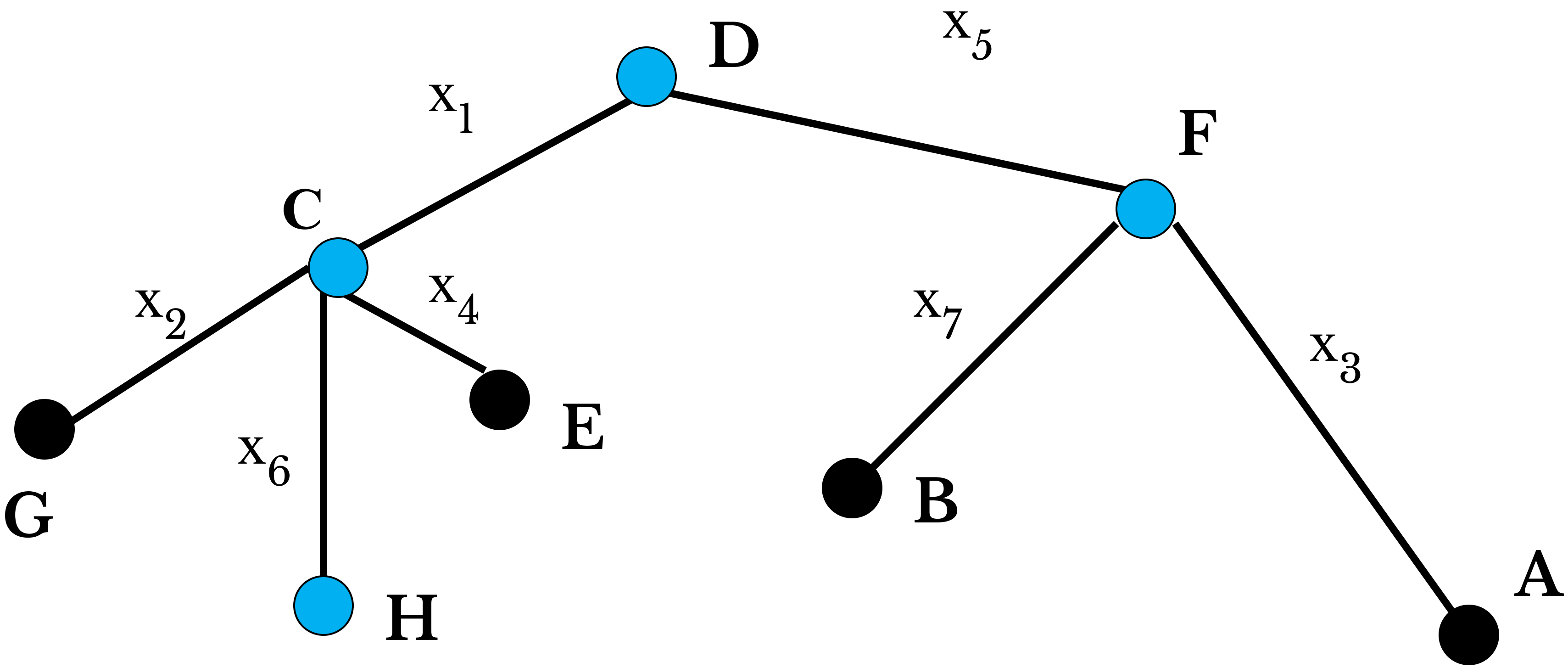


- **Последовательность попарно смежных вершин неориентированного графа, т.е. последовательность рёбер неориентированного графа, в которой вторая вершина предыдущего ребра совпадает с первой вершиной следующего, называется <u>маршрутом</u>.**

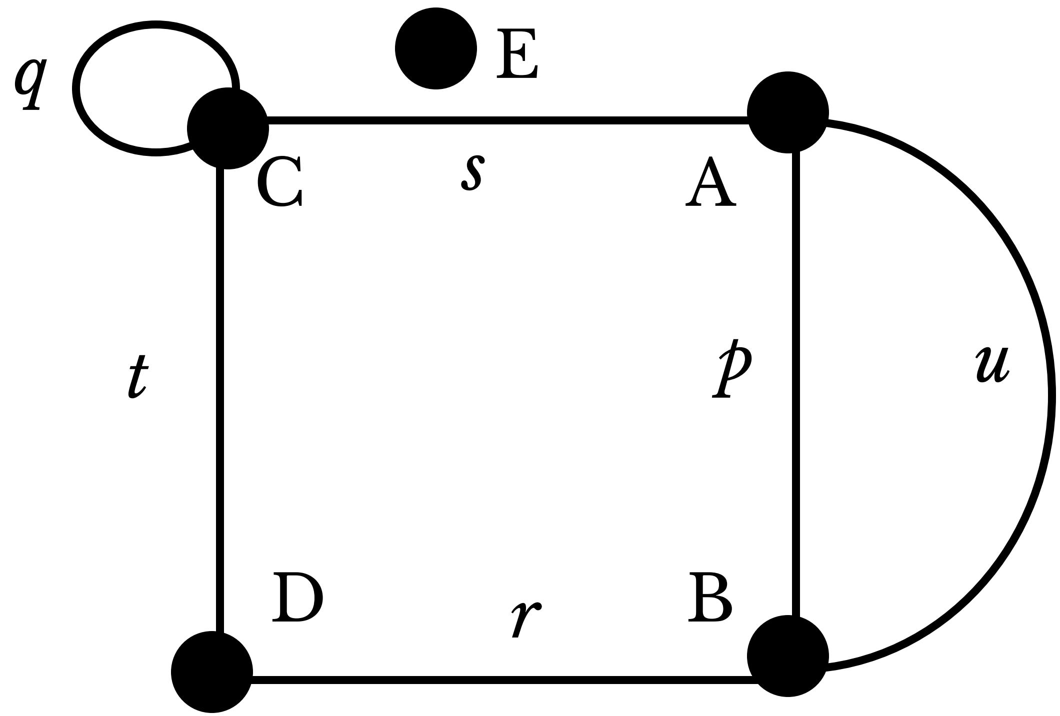
- **Число рёбер маршрута называется <u>длиной</u> маршрута.**

- **Если начальная вершина маршрута совпадает с конечной, то такой маршрут называется <u>замкнутым</u> или <u>циклом</u>.**

На рисунке HCDFD – **маршрут длиной 4**. Обозначение: **|HCDFD|=4**. Маршрут принято задавать как последовательность рёбер, поскольку это удобно при наличии кратных рёбер.



В графе на рисунке (t, s, p, r), (u, s, t, r) – циклы длиной 4, (r, t, q, s, u) – цикл длиной 5, (t, s, u, r, t, s, p, r) – 8-цикл, (p, u) – 2-цикл, петля (q) – 1-цикл.



ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

- ***Одноместные операции***

1. **Удаление ребра графа** — при этом все вершины графа сохраняются
2. **Добавление ребра графа** между двумя существующими вершинами.
3. **Удаление вершины** (вместе с инцидентными ребрами).
4. **Добавление вершины** (которую можно соединить с некоторыми вершинами графа).
5. **Стягивание ребра** — отождествление пары вершин, т.е. удаление пары смежных вершин, и добавление новой вершины, смежной с теми вершинами, которые были смежны, хотя бы одной из удаленных вершин)
6. **Подразбиение ребра с-** удаление ребра и добавление новой вершины, которая соединяется ребром с каждой из вершин удаленного ребра.

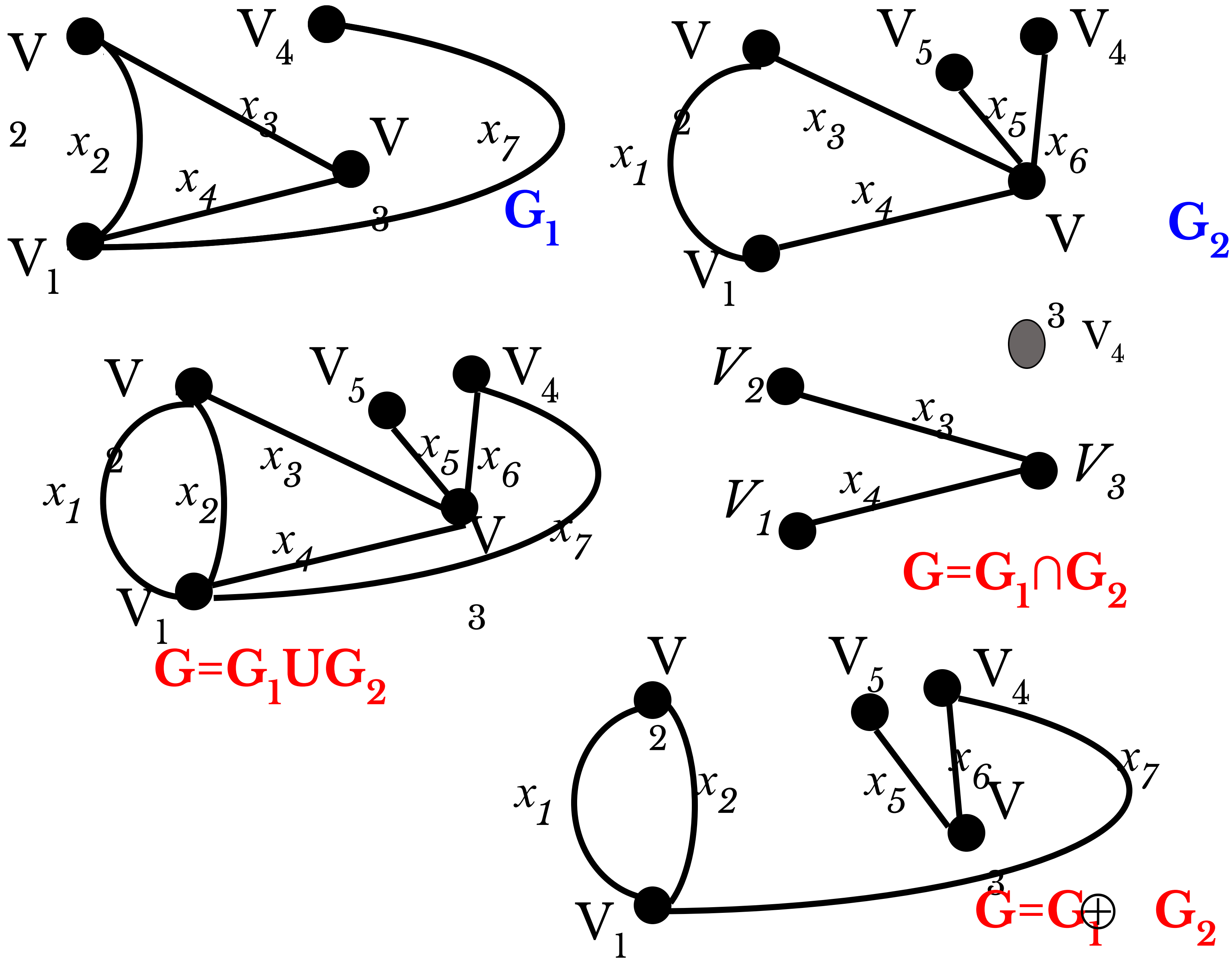
ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

- ***Двуместные операции***

Объединением графов $G_1=(V_1,X_1)$ и $G_2=(V_2,X_2)$ называется граф $G=G_1\cup G_2$, множество вершин которого $V=V_1\cup V_2$, а множество рёбер $X=X_1\cup X_2$.

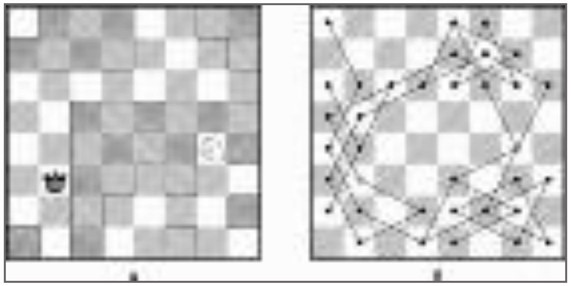
Пересечением графов G_1 и G_2 называется граф $G=G_1\cap G_2$, для которого $X=X_1\cap X_2$ – множество рёбер, а $V=V_1\cap V_2$ – множество вершин.

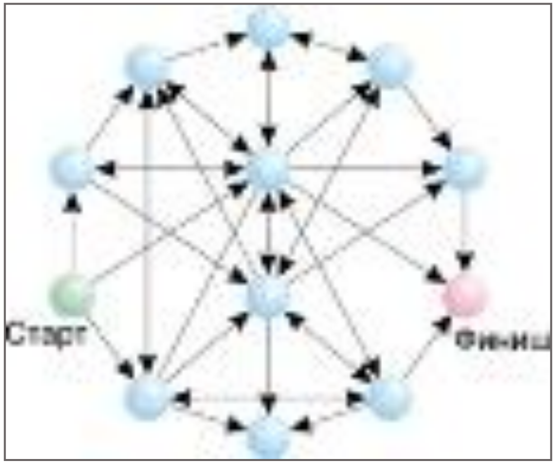
Кольцевой суммой двух графов называется граф $G=G_1\oplus G_2$, порождённый множеством вершин $V=V_1\cup V_2$ и множеством рёбер $(X_1\cup X_2)\setminus(X_1\cap X_2)$, т.е. множеством рёбер, содержащихся либо в G_1, либо в G_2, но не в $G_1\cap G_2$.

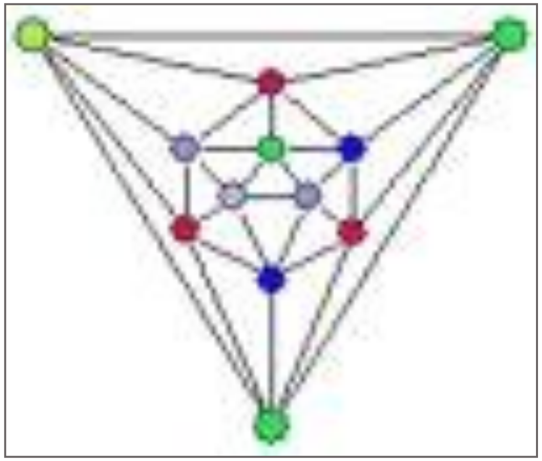

G1
G2
G=G1UG2
G=G1∩G2
G=G1⊕G2

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ

С помощью графов упрощается решение математических задач, головоломок, задач на смекалку.



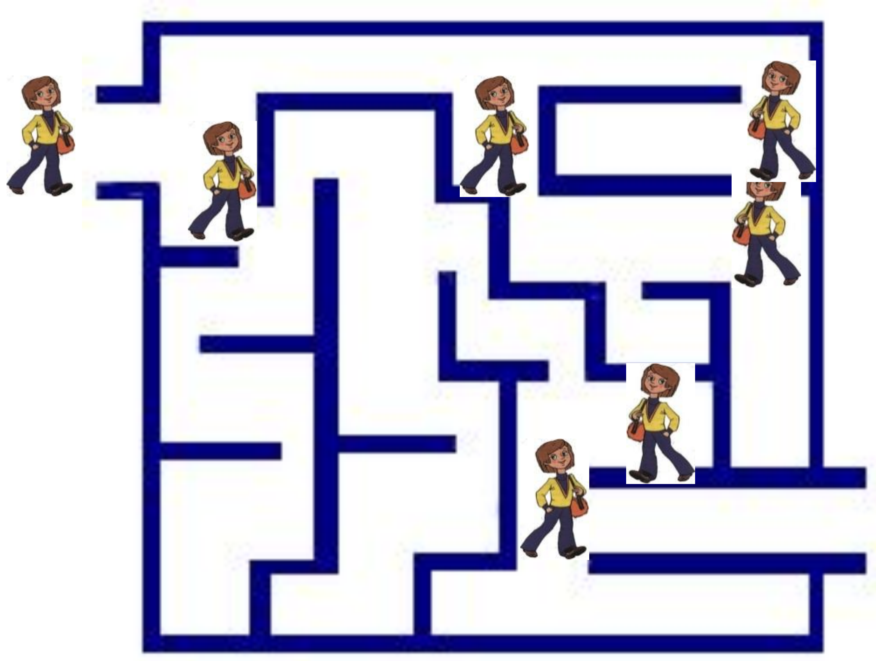


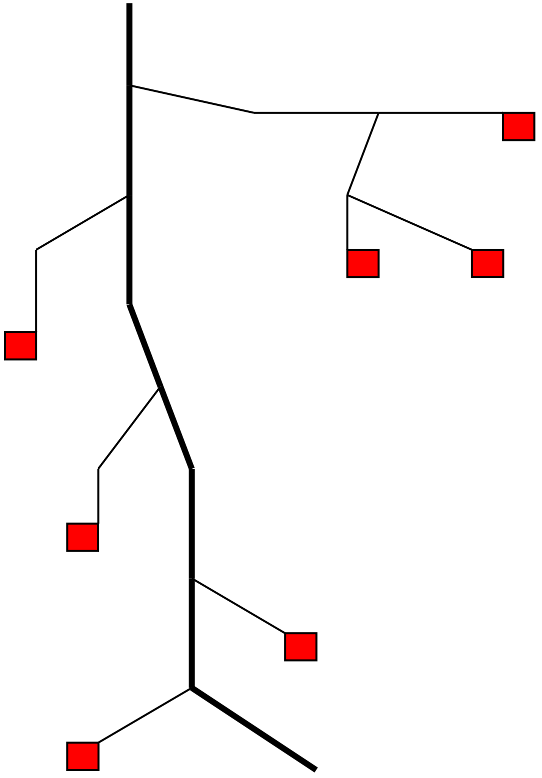


дальше

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ

Лабиринт - это граф. А исследовать его - это найти путь в этом графе.



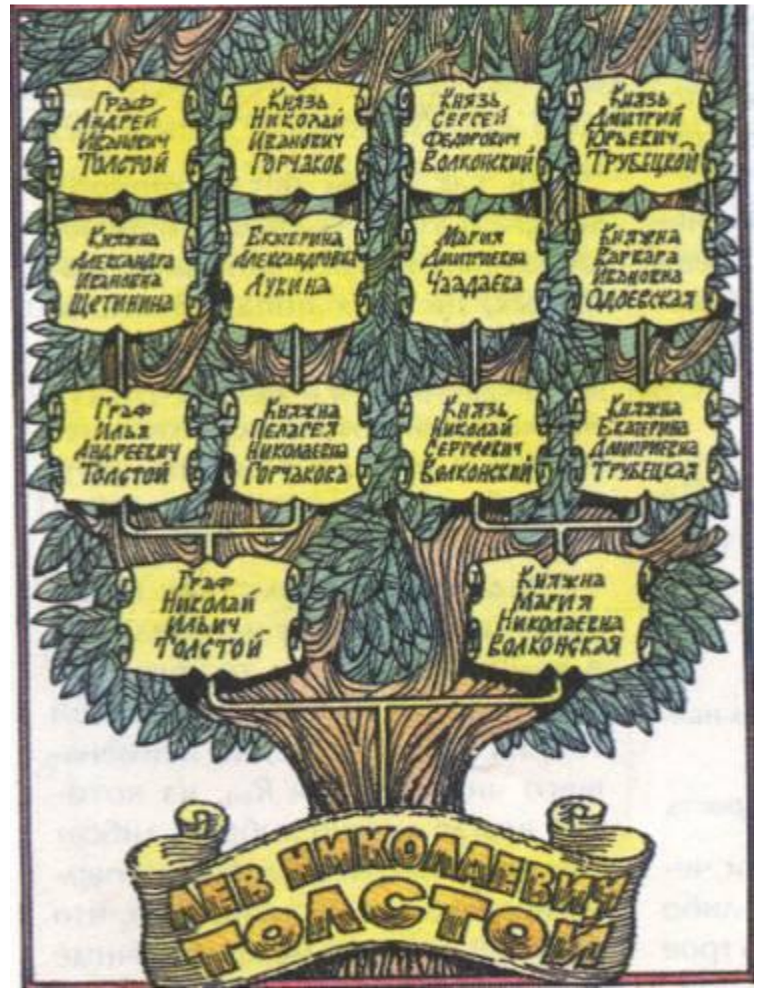


дальше

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ

Использует графы и дворянство.

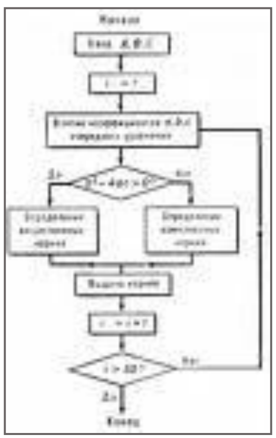
На рисунке приведена часть генеалогического дерева знаменитого дворянского рода Л. Н. Толстого. Здесь его вершины – члены этого рода, а связывающие их отрезки – отношения родственности, ведущие от родителей к детям.

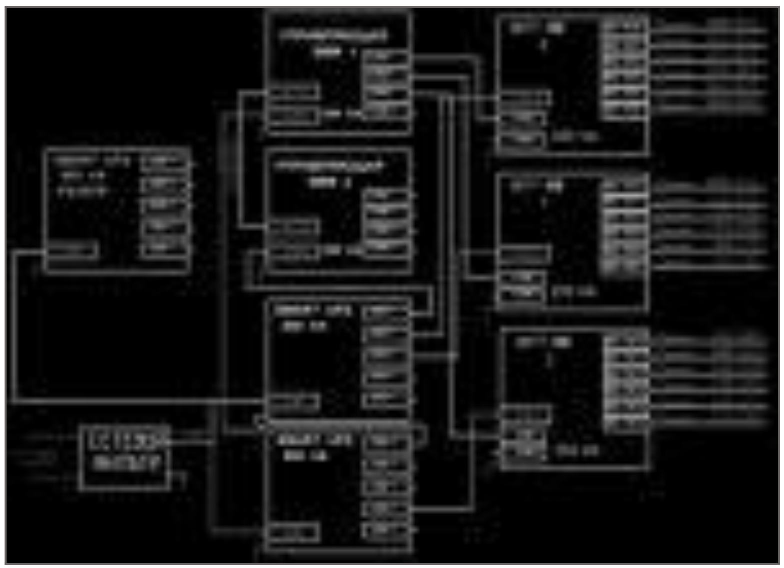


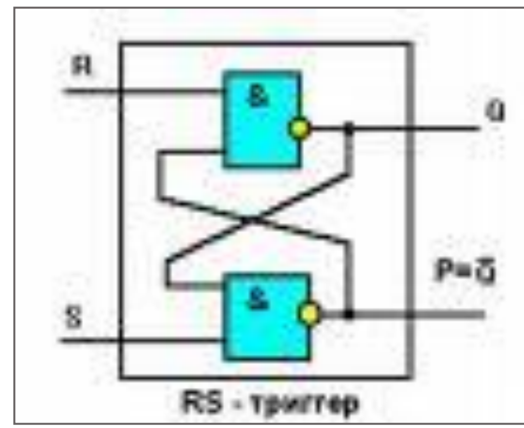
дальше

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ

Графами являются блок – схемы программ для ЭВМ.



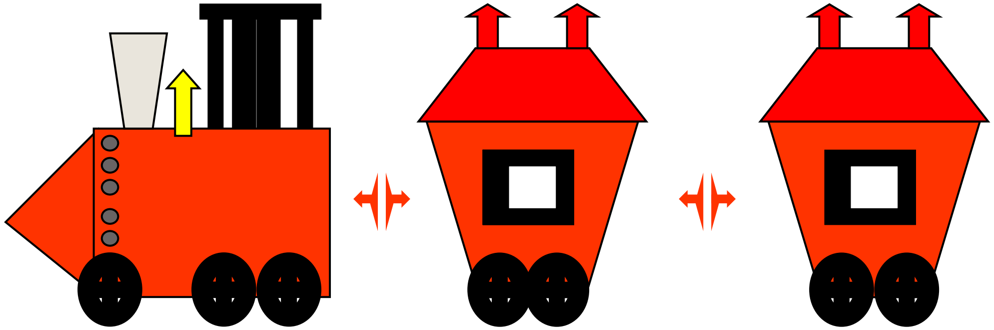




дальше

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ

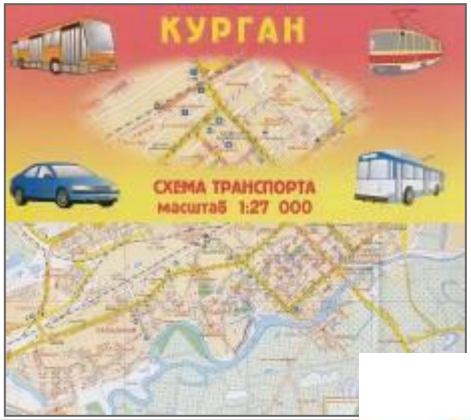
Типичными графами на географических картах являются изображения железных дорог.



дальше

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ

Типичными графами на картах города являются схемы движения городского транспорта.



дальше

ВЫВОДЫ

Графы – это замечательные математические объекты, с помощью, которых можно решать математические, экономические и логические задачи. Также можно решать различные головоломки и упрощать условия задач по физике, химии, электронике, автоматике. Графы используются при составлении карт и генеалогических древ.

В математике даже есть специальный раздел, который так и называется: «***Теория графов***».

содержание

Домашнее задание:

- Используя материал презентации данного занятия заполнить **РабочаяТетрадь-Занятие -1-2 семестр-1к_ЛД**, а также выполните упражнения.
- Заполненную **Рабочую тетрадь-Занятие №1** отправить фото-отчетом одним файлом преподавателю в личку в ВК.

Спасибо за внимание!