Основы финансовых вычислений

Потоки платежей. Ренты.

Поток платежей – это последовательность величин самих платежей (со знаками) и моментами времени, когда они осуществлены.

Платеж со знаком: + поступление;

– выплата.

Поток может быть конечным или бесконечным.

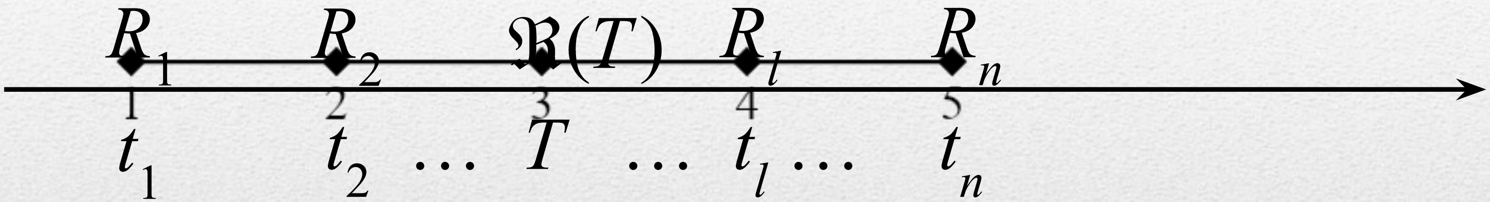
$\Re = \{R_k, t_k\}$ - поток платежей;

t_k - момент платежа R_k.

Ставка процента i обычно неизменна в течение всего потока.

Величина потока в момент времени T:

$$\Re(T) = \sum_k R_k (1+i)^{T-t_k}$$



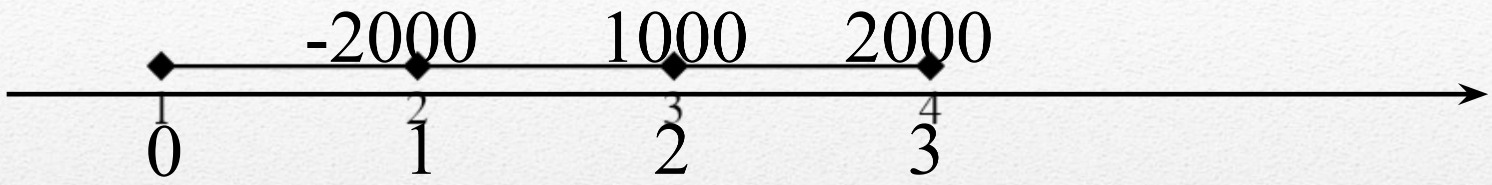
$$\Re(T') = \Re(T)(1+i)^{T'-T}$$

Обобщающие характеристики:

$\Re(0)$ – *современная величина потока*;

Если есть последний платеж, то величина потока в момент этого платежа называется *конечной величиной потока*.

Пример.



$$\Re = \{(-2000; 1); (1000, 2)\ (2000, 3)\}, \quad i = 0{,}1$$

$$\Re(0) = -2000 \cdot (1+0{,}1)^{-1} + 1000 \cdot (1+0{,}1)^{-2} +$$

$$+ 2000 \cdot (1+0{,}1)^{-3} = 510{,}8$$

$$\Re(3) = -2000 \cdot (1+0{,}1)^{2} + 1000 \cdot (1+0{,}1) + 2000 =$$

$$= \Re(0) \cdot (1+0{,}1)^{3} = 679{,}8$$

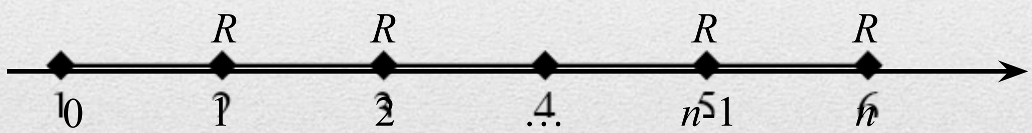
Поток положительных платежей одинаковой величины
с постоянными промежутками между ними называется *рентой* (*аннуитетом*).

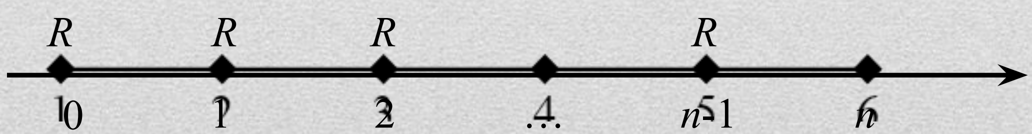
Параметры ренты:

- R – величина отдельного платежа;
- период ренты – временной интервал между двумя соседними платежами;
- срок ренты (n) – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода;
- i – процентная ставка, используемая при наращении и дисконтировании платежей;
- m – число начислений процентов в году;
- p – число платежей в году;
- моменты платежа внутри периода.

Моменты платежа внутри периода:

Если платеж поступает в конце очередного промежутка, то рента называется ***постнумерандо***, если в начале – ***пренумерандо***.



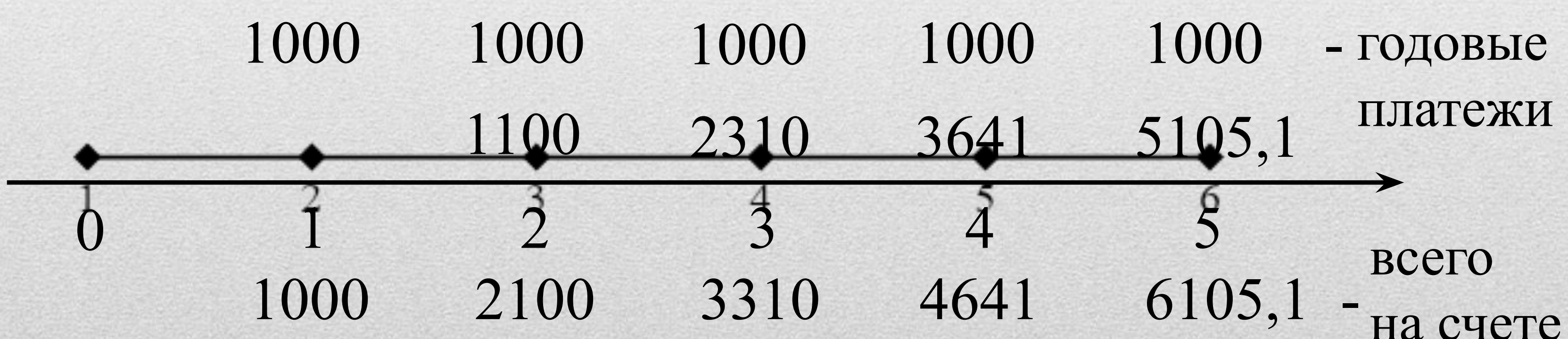


Конечная годовая рента постнумерандо

(p = 1; m = 1).

R – годовой платеж; n – длительность ренты;

i – годовая ставка.

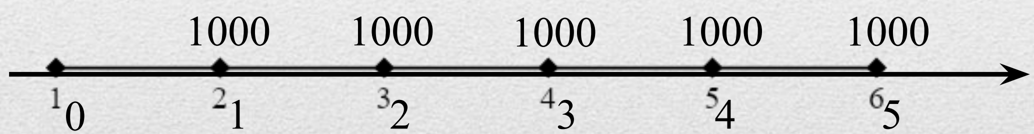


Наращенная величина конечной годовой ренты постнумерандо.

$$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \cdots + R(1+i)^2 + R(1+i) + R =$$

$$= R\left(1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right) =$$

$$= R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$



$$\boxed{S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$s(n,i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

множитель наращения ренты постнумерандо

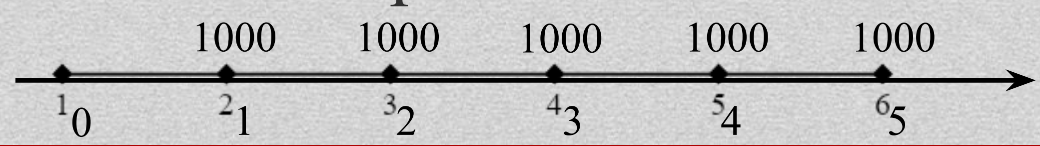
Современная величина конечной годовой ренты постнумерандо.

$$A=\frac{R}{(1+i)}+\frac{R}{(1+i)^2}+\dots+\frac{R}{(1+i)^n}=$$

$$=R\left((1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\dots+(1+i)^{-n}\right)=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\boxed{A=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$a(n,i)=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ – коэффициент приведения ренты



$$A(1+i)^n = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = S$$

$$a(n,i) = \frac{s(n,i)}{(1+i)^n}$$

$$s(n,i) = a(n,i)(1+i)^n$$

Как изменяются коэффициенты с ростом процентной ставки?

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1000 \cdot \frac{(1+0,1)^5 - 1}{0,1} = 6105,1$$

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 1000 \cdot \frac{1-(1+0,1)^{-5}}{0,1} = 3790,79$$

Характеристики конечной годовой ренты пренумерандо.

$$\ddot{S} = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + \dots + R(1+i)^3 + R(1+i)^2 + R(1+i) =$$

$$= R(1+i)\left(1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right)$$

$$\boxed{\ddot{S} = R(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$\ddot{s}(n,i) = (1+i)\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ – множитель наращения ренты пренумерандо

$$\ddot{A} = \frac{\ddot{S}}{(1+i)^n} = R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R\ddot{a}(n,i)$$

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\ddot{S} = S(1+i) = R(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$A = \frac{S}{(1+i)^n} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\ddot{A} = A(1+i) = \frac{\ddot{S}}{(1+i)^n} = R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$\{R;\, n;\, j\};\ (p = 1;\ m > 1)$

$$R(1 + j/m)^{m(n-1)};\ R(1 + j/m)^{m(n-2)};\ \ldots;\ R(1 + j/m)^{m};\ R$$

$$S = R\frac{\left(1 + j/m\right)^{mn} - 1}{\left(1 + j/m\right)^{m} - 1}$$

$\{R;\, n;\, i\};\ (p > 1;\ m = 1)$

R – годовая сумма, разовый платеж – R/p

$$S = \frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1 + i\right)^{(1/p)np} - 1}{\left(1 + i\right)^{1/p} - 1} = R\frac{\left(1 + i\right)^{n} - 1}{p\left(\left(1 + i\right)^{1/p} - 1\right)}$$

Наращенная стоимость ренты постнумерандо

$\{R;\ n;\ j\};\ (p = m > 1)$

$$S = \frac{R}{p}\frac{\left(1 + j/m\right)^{mn} - 1}{\left(1 + j/m\right) - 1} = R\frac{\left(1 + j/m\right)^{mn} - 1}{j}$$

R – годовой платеж!

Наращенная стоимость ренты постнумерандо

$\{R; n; j\}$; ($p \geq 1$; $m \geq 1$, возможно, $p \neq m$)

Общее число разовых платежей R/p – np.

Первый платеж R/p внесен спустя $1/p$ года после начала к концу срока будет равен

$$\frac{R}{p}\cdot(1+j/m)^{m\left(n-\frac{1}{p}\right)}=\frac{R}{p}\cdot(1+j/m)^{mn-\frac{m}{p}}.$$

Второй платеж

$$\frac{R}{p}\cdot(1+j/m)^{m\left(n-\frac{2}{p}\right)}=\frac{R}{p}\cdot(1+j/m)^{mn-2\frac{m}{p}}.$$

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+j/m)^{(m/p)np}-1}{(1+j/m)^{m/p}-1}=R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{p\left((1+j/m)^{m/p}-1\right)}$$

Наращенная стоимость ренты постнумерандо

$\{R; n; j\}$; ($p \geq 1$; $m \geq 1$, возможно, $p \neq m$)

$$S = R\frac{\left(1+j/m\right)^{mn}-1}{p\left(\left(1+j/m\right)^{m/p}-1\right)}$$

R – годовой платеж!

1. Как найти современную стоимость такой ренты?
2. Как изменится формула для ренты пренумерандо?

<u>Пример.</u> $R = 1000;\ n = 5;\ i = 0{,}1;\ m=p=1$

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1000 \cdot \frac{(1+0{,}1)^5 - 1}{0{,}1} = 6105{,}1$$

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 1000 \cdot \frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1} = 3790{,}79$$

$$\ddot{S} = R(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1000 \cdot (1+0{,}1) \cdot \frac{(1+0{,}1)^5 - 1}{0{,}1} =$$

$$= S(1+i) = 6105{,}1 \cdot 1{,}1 = 6715{,}61$$

$$\ddot{A} = R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 1000 \cdot (1+0{,}1) \cdot \frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1} =$$

$$= \ddot{S}/(1+i)^n = A(1+i) = 3790{,}79 \cdot 1{,}1 = 4169{,}87$$

$\underline{\textit{Пример.}}$ $R = 1000;\ n = 5;\ i = 0{,}1;$

$m = p = 4;\ R_q = 250$

$$S = \frac{R}{p}\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j/m} = 250\cdot\frac{(1+0{,}1/4)^{4\cdot 5}-1}{0{,}1/4} = 6386{,}16$$

$$A = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j/m} = 250\cdot\frac{1-(1+0{,}025)^{-20}}{0{,}025} = 3897{,}29$$

$$\ddot{S} = S(1+j/m) = 6386{,}16\cdot 1{,}025 = 6545{,}82$$

$$\ddot{A} = A(1+i) = 3897{,}29\cdot 1{,}025 = 3994{,}72$$

Определение параметров годовой ренты.

$\{R; n; i\}$ $(p = m = 1)$

1) Если заданы R; n; i, то $A=R\cdot a(n, i)$; $S=R\cdot s(n, i)$

2) Если заданы R; A или S; i, то из формул

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}; \qquad S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

получим:

$$n = \frac{-\ln\left(1-\frac{A}{R}i\right)^{*}}{\ln(1+i)}; \qquad n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i+1\right)}{\ln(1+i)}$$

*Имеет смысл только при $R \geq Ai$

округление n:

у p-срочной ренты результат округляется до ближайшего целого.

Например: $n = 6{,}28$; $p = 4$. Тогда $np = 25{,}12$; $[np] = 25$. Окончательно имеем $n = 6{,}25$.

3) Если заданы *A* или *S*; *n*; *i*, то

$$R = \frac{A}{a\left(n,i\right)}; \qquad R = \frac{S}{s(n,i)}$$

Если заданы R; A или S; n, то надо подобрать i.

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}; \qquad S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A}{R} = a(n,i); \qquad \frac{(1+i)^{n}-1}{i} = \frac{S}{R} = s(n,i)$$

Решение может быть найдено приближенно.

$$\frac{A}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots \frac{1}{(1+i)^n}$$

Следовательно, при $A/R \geq n$ уравнение решений не имеет, т.е. искомой ставки не существует.

$$\frac{A}{R} < \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Метод линейной интерполяции.

1. С помощью прикидочных расчетов находим нижнюю ($i_н$) и верхнюю ($i_в$) оценки ставки путём подстановки в одну из формул

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{A}{R}=a(n,i); \qquad \frac{(1+i)^{n}-1}{i}=\frac{S}{R}=s(n,i)$$

$$a(n,i)=a; \qquad s(n,i)=s$$

различных числовых значений ставки i и сравнения результата с правой частью выражения.

2. Корректировка нижнего значения осуществляется по формуле

$$i=i_н+\frac{s-s_н}{s_в-s_н}(i_в-i_н)$$

$s_н$, $s_в$ –значения коэффициента наращения для $i_н$ и $i_в$ соответственно.

Полученное значение ставки проверяют, подставляя его в левую часть исходного уравнения и сравнивая результат с правой частью. Если точность недостаточна, то повторно применяют последнюю формулу, заменив одно из значений ставки на более точное.

Вечные ренты или перпетуитеты

Чему равна будущая стоимость ренты такого рода?

$$A_\infty = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \dots \frac{R}{(1+i)^n} + \dots$$

$$A_\infty = \frac{R}{i}$$

$$R = A_\infty i$$

Пример. По условиям страхового договора компания обязуется выплачивать 5 тыс. рублей в год на протяжении неограниченного периода, т.е. вечно. Чему должна быть равна стоимость этой ренты, если уровень процентной ставки составит 25% годовых?

Решение. A_∞=5000/0,25=20000 руб.

Предположим, рассмотренная рента будет выплачиваться дважды в год по 2,5 тыс. рублей, столько же раз будут начисляться проценты (25% в этих условиях становится номинальной ставкой, m=2). Его стоимость останется неизменной 20 тыс. рублей

$$\left(A_\infty = \frac{5000/2}{0{,}25/2} = 20000 \text{ руб.} \right).$$

В наиболее общем виде (m > 1, p > 1, m ≠ p) формула приведенной стоимости вечной ренты:

$$A_{\infty} = \frac{R}{p\left(\left(1 + j/m\right)^{m/p} - 1\right)}$$

<u>*Пример.*</u> Требуется выкупить при ставке 25% годовых вечную ренту, член которой равен 5 млн. руб., выплачиваемых в конце каждого полугодия.

<u>Решение.</u>

$$A_{\infty} = \frac{5000}{\sqrt{1+0,25} - 1} = 42360,68 \text{ ттысруб.}$$

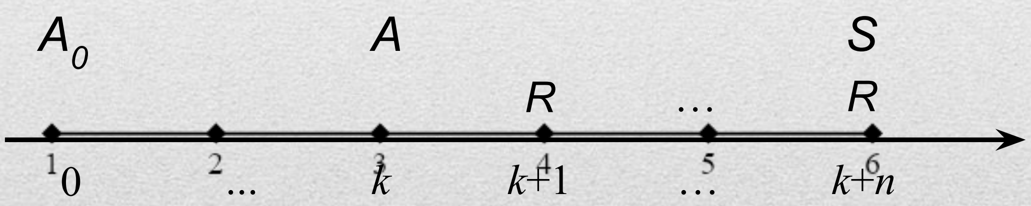
Связь между годовой вечной и годовой конечной рентами (аннуитетами).

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i} - \frac{R}{i}\cdot\frac{1}{(1+i)^{n}}$$

То есть современная величина конечной ренты, имеющей срок n периодов, может быть представлена как разница между современными величинами двух вечных рент, выплаты по одной из которых начинаются с первого периода, а по второй – после *n* периодов.

Немедленные ренты

Отложенные ренты



$$A_0 = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot\frac{1}{(1+i)^k}$$