МІНІМІЗАЦІЯ ФОРМУЛ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

Складність ДНФ оцінюється індексом (коефіцієнтом) простоти L.

Найчастіше оцінюють: L_1 -кількість символів змінних, L_2 -кількість елементарних конюнкійд, L_3 -кількість символів інверсій.

ДНФ, що містить найменшу кількість букв $x_1,\dots,x_n$ у порівнянні з всіма іншими ДНФ, еквівалентними даній функції, називається мінімальною ДНФ (МДНФ). Проблема мінімізації зводиться до відшукання форми представлення логічної функції з мінімальним індексом простоти.

Нехай в будь-якому наборі аргументів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ функція f набуває значення a_1, а функція φ на цьому наборі –значення a_2. Це означає, що функція f своїм значенням a_1 покриває значення a_2. Досконала ДНФ будується так, що кожна одиниця логічної функції покривається одиницею тільки одного добутку, що є конституєнтою одиниці(мінтермом). Тому ДДНФ складається з такої кількості мінтермів, що відповідає кількості наборів, на яких логічна функція дорівнює одиниці.

Скорочені та мінімальні форми містять елементарні добутки, які покривають своїми одиницями кілька одиниць початкової функції.

$f(x, y) = \overline{xy} \vee x\overline{y} \vee xy = x \vee \overline{y}$.

Якщо деяка логічна функція φ (наприклад, елементарний добуток) дорівнює нулю в тих наборах , на яких дорівнює нулю інша функція f , то вважають, що функція φ входить у функцію f , тобто функція φ входить у функцію f тоді, коли вона покриває нулями всі нулі функції f , а одиниці функції можуть бути накриті як нулями, так і одиницями функції φ. Отже, коли f =0, то й φ =0, зворотнє не є істиною. Функція φ має не меншу кількість нулів, ніж функція f . Константа 0 входить у будь-яку логічну функцію, а в констнту 1 входять усі функції. Функція φ , що входить у задану функцію, є її імлікантою.

Імплікація $\varphi \to f$ дорівнює 1 , коли функція φ входить у функцію f .

Імплікація $\varphi \to f$ дорівнює 1, коли функція φ входить у функцію f.

Таблиця

φ	f	$\varphi \to f$
0	0	1
0	1	1
1	1	1

Імпліканта φ логічної функції f, що є елементарною кон'юнкцією, називається простою, якщо жодна частина імпліканти φ не є імплікантою функції f. Будь-яка логічна функція f еквівалентна диз'юнкції усіх своїх простих імплікант.

Така форма представлення логічної функції називається скороченою ДНФ. Одержання скорочених ДНФ є першим етапом відшукання мінімальних форм логічних функцій. Виключення зайвих простих імплікант зі скорочених ДНФ – другий етап мінімізації.

Метод Квайна

Якщо в ДНФ логічної функції виконати всі операції неповного склеювання, а потім всі операції поглинання, то дістанемо скорочену ДНФ, тобто диз'юнкцію всіх простих імпликант.

$$xy \vee x\bar{y} = x$$

$$xy \vee x = x(1 \vee y) = x$$

Приклад.

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$$

$$\vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$$

Таблиця 4 Застосування методу Квайна. Побудова мінтермів третього порядку

Таблиця 4 Застосування методу Квайна. Побудова мінтермів третього порядку

		$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$
		1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	1	1			$\bar{x}_1x_3x_4$		$\bar{x}_2x_3x_4$		
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	2		1	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$				$x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	3		$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	1	$\bar{x}_1x_2x_4$				$x_2\bar{x}_3x_4$
$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	4	$\bar{x}_1x_3x_4$		$\bar{x}_1x_2x_4$	1				
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	5					1	$x_1\bar{x}_2x_4$		$x_1\bar{x}_3x_4$
$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	6	$\bar{x}_2x_3x_4$				$x_1\bar{x}_2x_4$	1		
$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	7		$x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$					1	$x_1x_2\bar{x}_3$
$x_1x_2\bar{x}_3x_4$	8			$x_2\bar{x}_3x_4$		$x_1\bar{x}_3x_4$		$x_1x_2\bar{x}_3$	1

Таблиця 5 Продовження методу Квайна. Побудова мінтермів 2 порядку

		$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 x_4$	$\bar{x}_2 x_3 x_4$	$x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$x_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 x_4$	$x_1 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$	1	1								$x_2 \bar{x}_3$
$\bar{x}_1 x_3 x_4$	2		1							
$\bar{x}_1 x_2 x_4$	3			1						
$\bar{x}_2 x_3 x_4$	4				1					
$x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	5					1	$x_2 \bar{x}_3$			
$x_2 \bar{x}_3 x_4$	6					$x_2 \bar{x}_3$	1			
$x_1 \bar{x}_2 x_4$	7							1		
$x_1 \bar{x}_3 x_4$	8								1	
$x_1 x_2 \bar{x}_3$	9	$x_2 \bar{x}_3$								

Таблиця 6 Продовження методу Квайна. Вибір істотних імплікант

		$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4$	$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4$	$\overline{x_1}x_2x_3x_4$	$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	$x_1\overline{x_2}x_3x_4$	$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$x_1x_2\overline{x_3}x_4$
		1	2	3	4	5	6	7	8
$\overline{x_1}x_3x_4$	1	*			*				
$\overline{x_1}x_2x_4$	2			*	*				
$\overline{x_2}x_3x_4$	3	*					*		
$x_1\overline{x_2}x_4$	4					*	*		
$x_1\overline{x_3}x_4$	5					*			*
$x_2\overline{x_3}$	6		*	*				*	*

Мінімальна ДНФ

$$\overline{x_1}x_3x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_4 \vee x_2\overline{x_3}$$

Метод Квайна-Мак-Класкі

$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$
0011	0100	0101	0111	1001	1011	1100	1101

Утворимо групи двійкових номерів

1 група		2 група		3 група
0100		0011		0111
		0101		1011
		1001		1101
		1100		

Побудова мінтермів третього порядку для груп 1 та 2

	0011	0101	1001	1100
0100		010_		_100

Побудова мінтермів третього порядку для груп 2 та 3

	0011	0101	1001	1100
0111	0_11	01_1		
1011	_011		10_1	
1101		_101	1_01	110_

Побудова мінтермів 2 порядку

	0_11	110_	_011	01_1	10_1	_101	1_01
_100						_10_	
010_		_10_					

Вибір істотних імплікант

		0011	0100	0101	0111	1001	1011	1100	1101
		1	2	3	4	5	6	7	8
0_11	1	*			*				
_011	2	*					*		
01_1	3			*	*				
10_1	4					*	*		
1_01	5					*			*
_10_	6		*	*				*	*

0_11 ∨ 10_1 ∨ _10_

Мінімальна ДНФ

$$\overline{x_1} x_3 x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_4 \vee x_2 \overline{x_3}$$

Карти Карно

Для логічної функції двох змінних карта Карно має вигляд:

	x	$\bar{x}$
y	1	1
$\bar{y}$	1	0

або

xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\,\bar{y}$	$x\bar{y}$
1	1		1

$y \vee x$

Для логічної функції трьох змінних карта Карно:

	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$	$x\bar{y}$
z	1	1	1	
$\bar{z}$	1	1		

$$y \vee \bar{x}z$$

Для логічної функції чотирьох змінних карта Карно:

	xy 11--	$\bar{x}y$ 01--	$\bar{x}\bar{y}$ 00--	$x\bar{y}$ 10--
zd --11		1	1	1
$\bar{z}d$ --01	1	1		1
$\bar{z}\bar{d}$ --00	1	1		
$z\bar{d}$ --10				

1 група		2 група		3 група
0100		0011		0111
		0101		1011
		1001		1101
		1100		

0_11 ∨ 10_1 ∨ _10_

Мінімальна ДНФ

$$\bar{x}\,zd \vee x\bar{y}d \vee y\bar{z}$$