Показательные уравнения и их системы.

…

Определение. *Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется* ***показательным уравнением.***

Например:

$2^x = \frac{1}{16}$;

$\sqrt[3]{5^x} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}}$;

$3^{x+1} + 3^x = 108$ и т. д.

Показательные уравнения в основном решаются тремя способами:

1) способ приведения к одинаковому основанию;
2) способ введения новой переменной;
3) графический способ.

Способ приведения к одинаковому основанию.

АЛГОРИТМ

При решении показательных уравнений данным способом применяется следующий алгоритм:

1) обе части уравнения приводим к одинаковому основанию;

2) приравниваем показатели степеней левой и правой частей уравнения, в результате чего получаем равносильное уравнение, способ решения которого известен;

3) решаем полученное уравнение;

4) с помощью проверки определяем, какие из полученных значений переменной являются корнями данного показательного уравнения;

5) записываем решение исходного показательного уравнения.

ПРИМЕР

1. Решим уравнение $27^x = \frac{1}{81}$.

Решение. Обе части уравнения приводим к основанию 3, тогда $3^{3x} = 3^{-4}$.

Приравниваем показатели степеней левой и правой частей последнего уравнения, т. е. получим равносильное уравнение: $3x = -4$.

Решив полученное уравнение имеем: $x = -\frac{4}{3}$.

Проверим, удовлетворяет ли найденное значение переменной данному показательному уравнению: $27^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{81}$ или $\frac{1}{\sqrt[3]{27^4}} = \frac{1}{81}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{3^{12}}} = \frac{1}{81}$; $\frac{1}{81} = \frac{1}{81}$. Значит, удовлетворяет данному уравнению.

Ответ: $-\frac{4}{3}$.

Способ введения новой переменной.

АЛГОРИТМ

При решении показательного уравнения данным способом используется следующий алгоритм:

1) делаем замену переменной, приводящую к алгебраическому уравнению;

2) решаем полученное алгебраическое уравнение;

3) найденные значения корней алгебраического уравнения подставим в равенство, определяющее замену; найдем корни полученного уравнения;

4) с помощью проверки определяем, какие из этих корней являются корнями данного показательного уравнения;

5) записываем ответ.

ПРИМЕР

2. Решим уравнение $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$.

Решение. Прежде всего степени, входящие в уравнение, запишем в следующем виде:

$3^{2x+5} = 3^{2x} \cdot 3^5 = 243 \cdot 3^{2x}$; $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$.

Тогда данное уравнение примет вид: $243 \cdot 3^{2x} - 9 \cdot 3^x - 2 = 0$.

Положим, что $y = 3^x$. Тогда последнее показательное уравнение можно записать в виде: $243y^2 - 9y - 2 = 0$.

Решив это уравнение имеем: $y_1 = \frac{1}{9}$, $y_2 = -\frac{2}{27}$.

По условию замены в качестве решения последнего уравнения можем взять только первый корень $y_1 = \frac{1}{9}$. Второй корень $y_2 = -\frac{2}{27}$ отрицателен, а значение 3^x положительно при любом x.

Подставим найденное значение $y = \frac{1}{9}$ в равенство $y = 3^x$: $\frac{1}{9} = 3^x$ или $3^{-2} = 3^x$, отсюда следует, что $x = -2$.

Сделаем проверку: $3^{2\cdot(-2)+5} = 3^{-2+2} + 2$ или $3^1 = 1 + 2$, $3 = 3$.

Ответ: -2.

Графический способ решения.

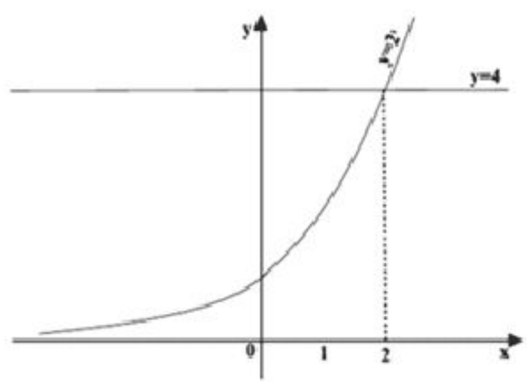
Графический способ решения. Данный способ используется в тех случаях, когда в показательном уравнении $a^x = b$ число b нельзя представить в виде степени числа a. Для решения уравнения на одной координатной плоскости строят графики функций $y = a^x$ и $y = b$. Абсциссы точек пересечения графиков указанных функций будут решениями показательного уравнения.

АЛГОРИТМ

1. Построить графики двух функций (левая и правая части уравнения);
2. Найти абсциссы точек пересечения графиков;
3. Записать ответ.

ПРИМЕР

Рассмотрим графический способ решения на примере уравнения $2^x = 4$. Построим графики функций $y = 2^x$, $y = 4$ и найдем абсциссу точки пересечения графиков: $x = 2$.



Ответ: $x = 2$

Рассмотрим примеры решения систем показательных уравнений

ПРИМЕР

3. Решим систему $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = \dfrac{11}{4}, \\ 2^x - 3^y = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Решение. Умножив обе части второго уравнения системы на 2, имеем:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = \dfrac{11}{4}, \\ 2 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -\dfrac{6}{4}. \end{cases}$$

Почленно сложим уравнения и получим: $5 \cdot 2^x = \dfrac{5}{4}$ или $2^x = 2^{-2}$, откуда $x = -2$.

Подставив значение $x = -2$ во второе уравнение системы, найдем значение переменной y: $2^{-2} - 3^y = -\dfrac{3}{4}$, $3^y = 1$, $3^y = 3^0$, $y = 0$.

Ответ: $(-2; 0)$.

ПРИМЕР

4. Решим систему показательных уравнений $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases}$

Решение. Первый способ. Первое уравнение системы почленно умножим на второе, тогда получится:

$$2^x \cdot 3^y \cdot 2^y \cdot 3^x = 12 \cdot 18,$$
$$2^{x+y} 3^{x+y} = 216,$$
$$(2 \cdot 3)^{x+y} = (2 \cdot 3)^3.$$

Отсюда имеем:

$$x + y = 3.$$

y выразим через x, тогда: $y = 3 - x$.

Подставив в первое уравнение системы найденное выражение y, имеем:

$$2^x \cdot 3^{3-x} = 12,\ \frac{2^x}{3^{x-3}} = 12,\ \frac{2^x}{3^x \cdot 3^{-3}} = 12,\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{12}{27},\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ или}$$

$x = 2$. Теперь найдем значение $y : y = 3 - 2 = 1$.

Решением системы является пара чисел (2; 1).

Второй способ. Первое уравнение системы почленно разделим на второе, тогда получается:

$$\frac{2^x \cdot 3^y}{2^y \cdot 3^x} = \frac{12}{18},\ 2^x \cdot 3^y \cdot 2^{-y} \cdot 3^{-x} = \frac{2}{3},\ 2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = \frac{2}{3},\ \frac{2^{x-y}}{3^{x-y}} = \frac{2}{3},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \text{ или } x - y = 1.$$

Далее выразив y через x и подставив найденное значение $y = x - 1$ в одно из уравнений системы, окончательно найдем решение системы.

Ответ: (2; 1).

Домашнее задание:

Выписать определение показательных уравнений

Решить задачи №№ 23.3, 23.5

Упражнения

Решите уравнения (23.1—23.4):

23.1. 1) $3^x = 81$; 2) $4^x = 256$; 3) $2^x = \frac{1}{32}$; 4) $5^{x+1} = 125$.

23.2. 1) $8^x = 16$; 2) $25^x = \frac{1}{5}$; 3) $4^{3-2x} = 4^{2-x}$; 4) $2^{x-2} = 1$.

23.3. 1) $2^x + 2^{x+1} = 12$; 2) $7^{x+2} - 7^x = 336$;

3) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$; 4) $5^{x-2} - 5^{x-1} + 5^x = 21$.

23.4. 1) $3^{2x+1} = 9^{2x}$; 2) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 2 = 0$;

3) $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 9 = 0$; 4) $25^x - 26 \cdot 5^x + 25 = 0$.

Решите системы уравнений (23.5—23.6):

23.5. 1) $\begin{cases} 5^x + 5^y = 30, \\ 5^x - 5^y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x - y = 1; \end{cases}$

23.6. 1) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 12, \\ 2^x - 3^y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 32, \\ x - y = 2. \end{cases}$