

Работа и кинетическая энергия

Уравнение движения материальной точки

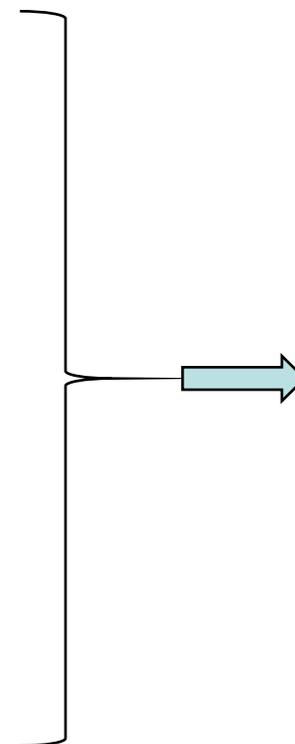
$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad \Big| \quad \times \mathbf{v} dt = d\mathbf{r} \quad \longrightarrow \quad m\mathbf{v}d\mathbf{v} = \mathbf{F}d\mathbf{r}$$

$$1) \quad m\mathbf{v}d\mathbf{v} = \frac{1}{2} m d(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad - \text{кинетическая энергия}$$

$$2) \quad dA = \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad - \text{элементарная работа}$$

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad - \text{работа на конечном перемещении}$$



Работа и кинетическая энергия

$$dK = dA$$

$$K_2 - K_1 = A_{12}$$

– закон изменения кинетической энергии
(неофициально)

Для системы материальных точек:

$$K = \sum K_i$$

– кинетическая энергия системы

$$A_{12} = \sum A_{12i}$$

– работа сил, действующих на систему

$$K_2 - K_1 = A_{12}$$

$$P = \frac{dA}{dt}$$

– мощность

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\mathbf{F}d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$



$$P = \mathbf{F} \mathbf{v}$$

Консервативные и неконсервативные силы



Примеры: сила тяжести – консервативная сила

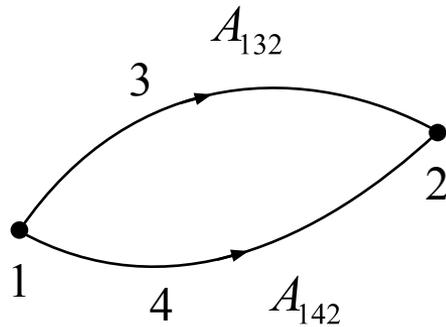
сила трения – неконсервативная сила

Определение:

Консервативные силы – это силы,

- 1) которые зависят только от координат материальных точек;
- 2) работа которых определяется только начальным и конечным положениями системы и не зависит от пути.

Консервативные и неконсервативные силы



Для консервативных сил:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad A_{132} = A_{142} \\ 2) \quad A_{142} = -A_{241} \end{array} \right\} \longrightarrow A_{142} + A_{241} = 0 \quad \text{или}$$

$$\oint dA = 0$$

Работа консервативных сил по замкнутому пути равна нулю.

Примечание: Центральные силы являются консервативными.

Потенциальная энергия

Консервативная система – это система, в которой действуют только консервативные силы.

Для консервативной системы A_{12} не зависит от пути $1 \rightarrow 2$ и поэтому можно определить функцию U :

Определение: $U_1 - U_2 = A_{12} \quad (-dU = dA)$

U – потенциальная энергия

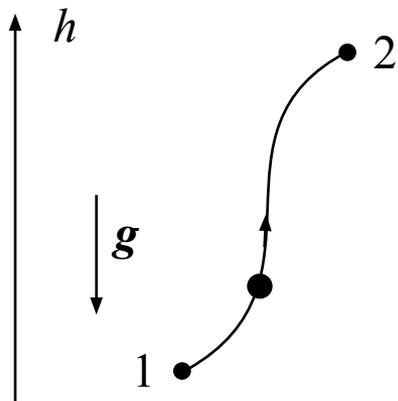
$$dK = dA = -dU \quad \longrightarrow \quad dK + dU = 0 \quad \longrightarrow$$

$$K + U = \text{const}$$

– закон сохранения механической энергии
(для консервативных систем)

$$E \equiv K + U \quad \text{– механическая энергия}$$

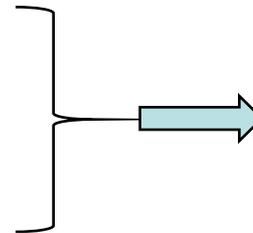
Потенциальная энергия силы тяжести



$$F = mg$$

$$A_{12} = \int_1^2 mg \, dr = -mg \int_1^2 dh = -mg(h_2 - h_1)$$

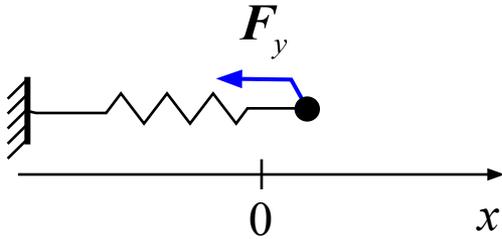
$$A_{12} = -(U_2 - U_1)$$



$$U = mgh + C \overset{=0}{\nearrow} \left[\text{Нормировка } h = 0, U = 0 \right] \longrightarrow$$

$$U = mgh$$

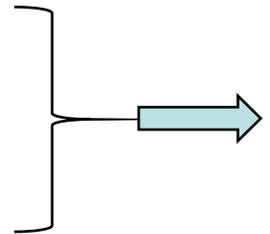
Потенциальная энергия силы упругости



$$F_y = -kx$$

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = -k \int_1^2 x dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

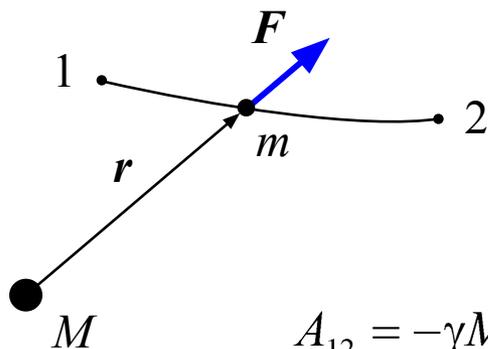
$$A_{12} = -(U_2 - U_1)$$



$$U = \frac{kx^2}{2} + C \stackrel{=0}{\swarrow} \quad \left[\text{Нормировка } x = 0, U = 0 \right] \longrightarrow$$

$$U = \frac{kx^2}{2}$$

Потенциальная энергия гравитационного (кулоновского) поля



M – неподвижна (центр) $F = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$

$$A_{12} = -\gamma Mm \int_1^2 \frac{r dr}{r^3} = -\gamma Mm \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = -\gamma Mm \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right)$$

$$A_{12} = -(U_2 - U_1)$$

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r} + C \stackrel{=0}{\leftarrow} \left[\text{Нормировка } r = \infty, U = 0 \right] \longrightarrow$$

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

– для кулоновского поля

Закон сохранения энергии

Закон изменения кинетической энергии:

$$dK = dA = dA_{\text{к}} + dA_{\text{д}} \quad \begin{array}{l} dA_{\text{к}} - \text{работа консервативных сил,} \\ dA_{\text{д}} - \text{работа диссипативных сил} \end{array}$$

$$dA_{\text{к}} = -dU \quad \longrightarrow \quad dE = d(K + U) = dA_{\text{д}} \quad \longrightarrow$$

$$\Delta E = \Delta(K + U) = A_{\text{д}}$$

– закон изменения механической энергии
(неофициально)

- 1) В замкнутой системе $dA_{\text{д}} \leq 0$, т.е. E уменьшается;
- 2) Уменьшение E сопровождается нагревание тел.

Закон сохранения энергии

Свяжем с внутренним состоянием тел новый вид энергии и положим, что ее убыль в точности равна работе диссипативных сил $dA_{\text{д}} = -dU_{\text{вн}}$.

$U_{\text{вн}}$ – внутренняя энергия.

$$K + U + U_{\text{вн}} = \text{const}$$

Для замкнутых систем сумма всех видов энергии (полная энергия) сохраняется.

В общем виде

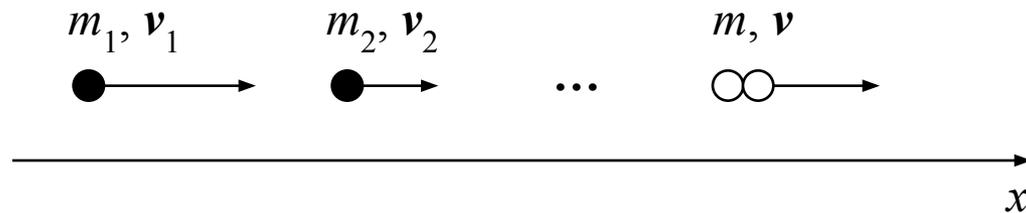
$$\sum_i U_i = \text{const}$$

– закон сохранения энергии
(для замкнутых систем)

где U_i – вид энергии

Абсолютно неупругий удар

Это столкновение тел, в результате которого они соединяются вместе и движутся дальше как одно тело.



По закону сохранения импульса $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$ 

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

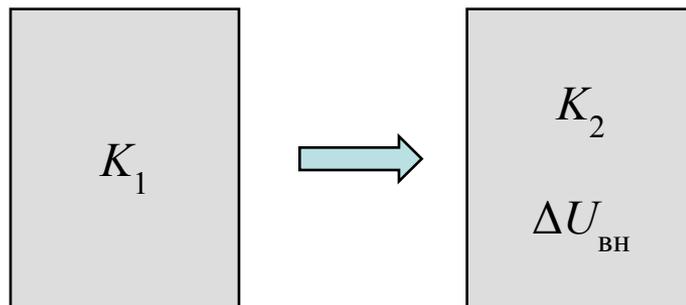
Абсолютно неупругий удар

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ K_2 &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \end{aligned} \right\} \longrightarrow$$

$$K_1 - K_2 = \frac{1}{2} \mu (v_1 - v_2)^2$$

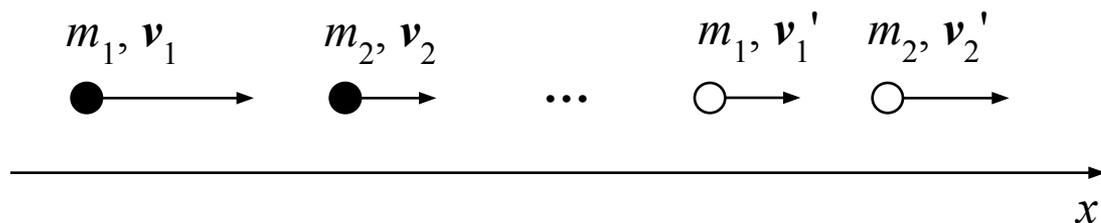
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad - \text{приведенная масса}$$

Неупругое столкновение шаров сопровождается потерей кинетической энергии – часть кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию соударяющихся тел.



Абсолютно упругий удар

Это столкновение тел, в результате которого их внутренние энергии (внутреннее состояние) не изменяются. Следовательно, при таком столкновении сохраняется кинетическая энергия системы.



По закону сохранения импульса и энергии

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \end{array} \right.$$

Система имеет два решения относительно неизвестных v_1' и v_2' :

Абсолютно упругий удар

1) $v'_1 = v_1, v'_2 = v_2$ – столкновения еще не было

$$2) \quad v'_1 = -v_1 + 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad v'_2 = -v_2 + 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Случай, когда второй шар был неподвижен $v_2 = 0$

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

a) $m_1 > m_2 \rightarrow v'_1 \uparrow\uparrow v_1$

б) $m_1 < m_2 \rightarrow v'_1 \uparrow\downarrow v_1$

с) $m_1 = m_2 \rightarrow v'_1 = 0, v'_2 = v_1$ – обмен скоростями