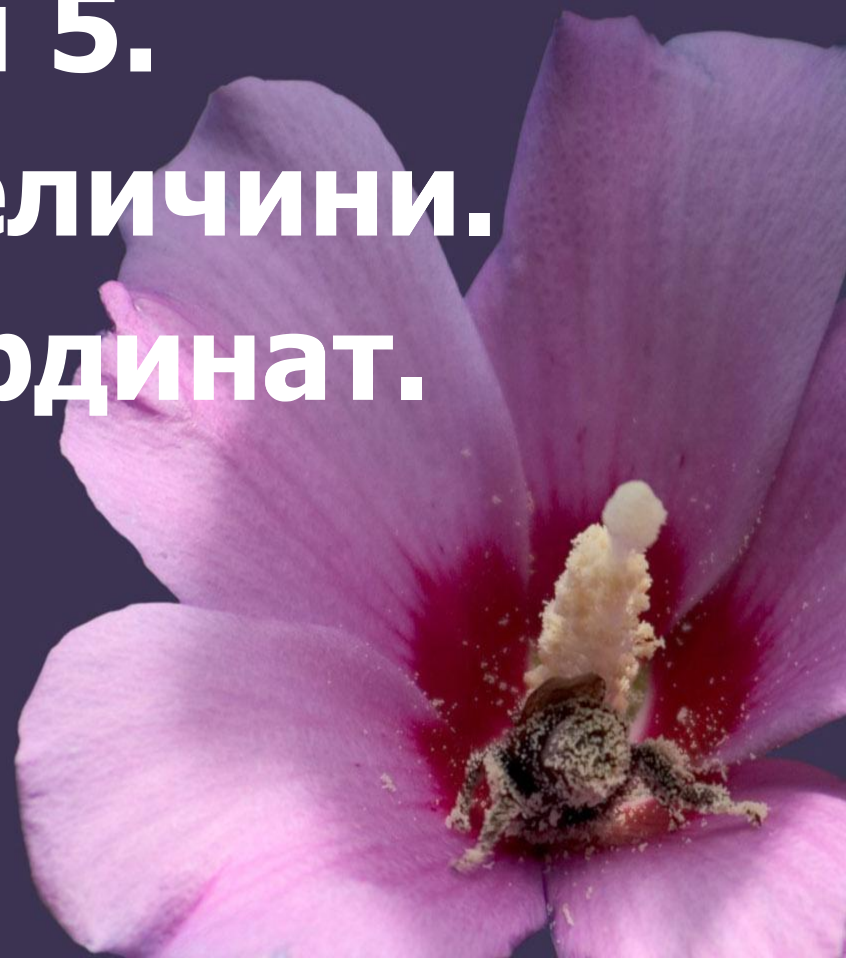
Тема 2.
Векторна алгебра

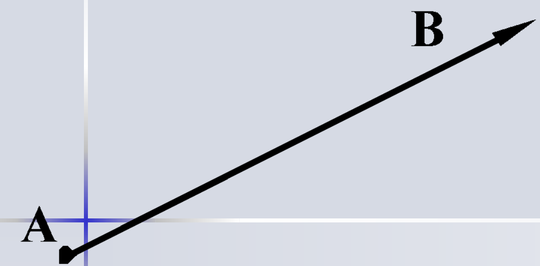
Лекція 5.
Векторні величини.
Метод координат.

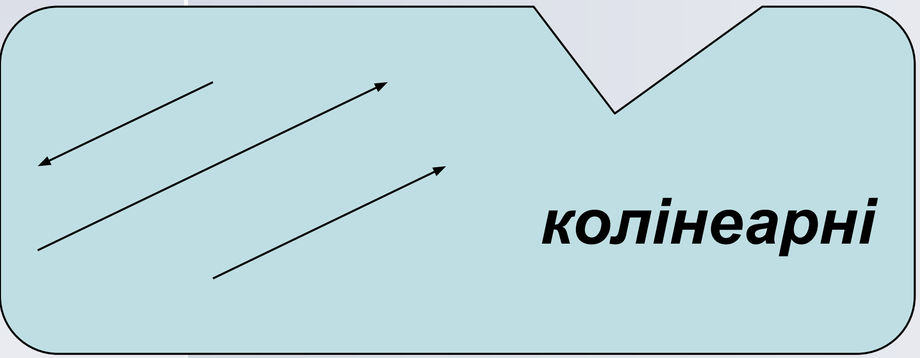


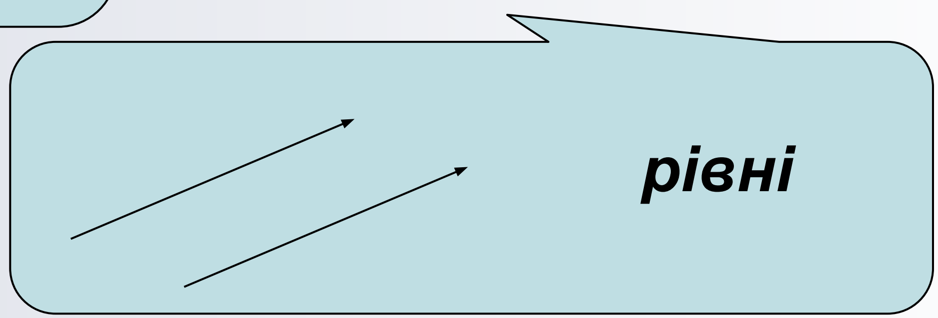
План

- Лінійні операції над векторами
- Проекція вектора на вісь
- Лінійна залежність та незалежність векторів
- Метод координат

Вектор – це впорядкована пара точок.







Відстань між початком і кінцем вектора називається його ***довжиною***, або ***модулем***.

Лінійні операції над векторами

Добуток вектора на число

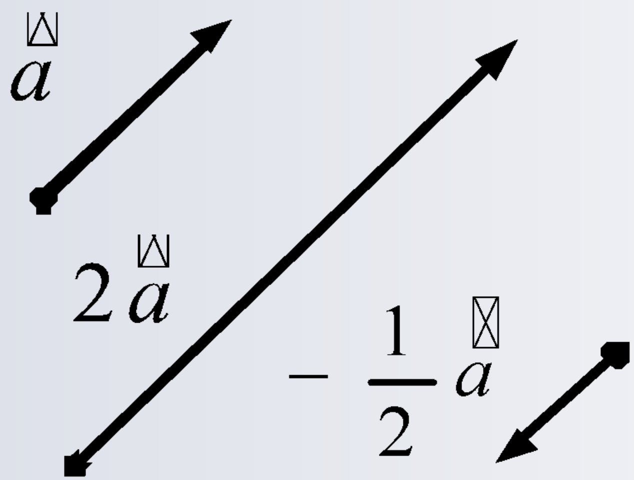
Сума двох векторів

Різниця двох векторів

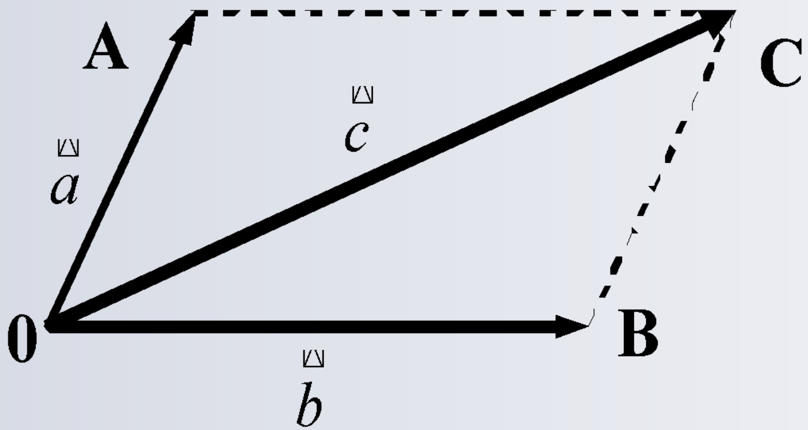
Правило паралелограма

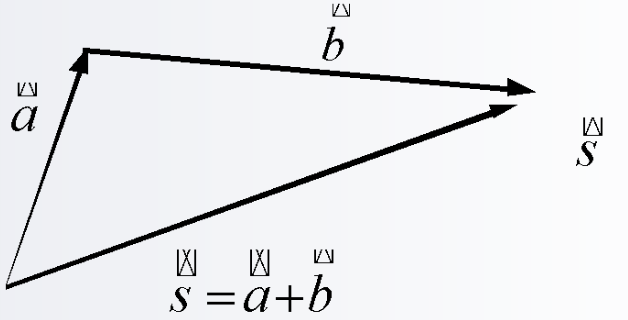
Правило трикутника

Добутком вектора $\vec{a}$ на число m називається вектор, який має напрямок вектора $\vec{a}$, якщо $m > 0$, і протилежний напрямок, якщо m від'ємне.



Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий третій вектор $\vec{c}$, який виходить із їх спільного початку і є діагоналлю паралелограма, сторонами якого є вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$



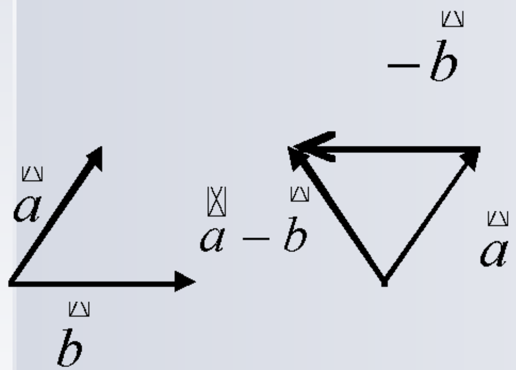


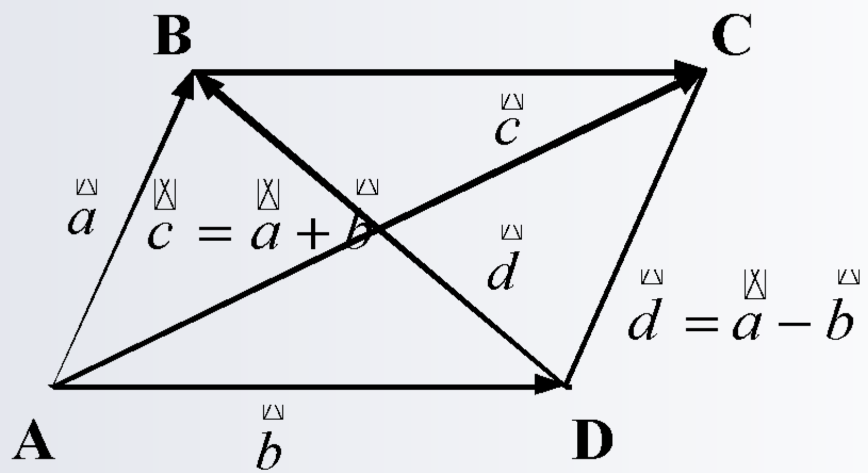
Властивості:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - комутативність;
- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ - асоціативність;
- $m\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = m\vec{a} + m\vec{b}$ - дистрибутивність по відношенню до множення на число

$$(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$$

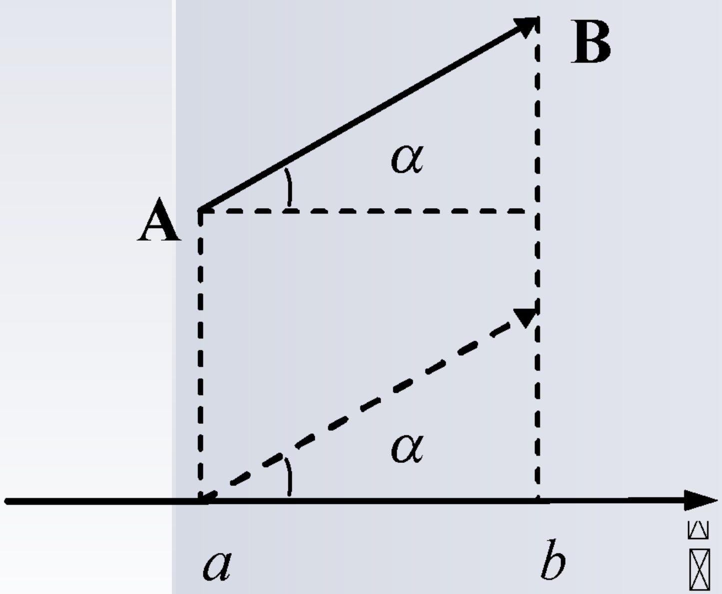
Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{d}$, який при додаванні до вектора $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$. Тобто $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$ якщо $\vec{b} + \vec{d} = \vec{a}$.





Проекція вектора на вісь

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{e}$ називається довжина відрізка ab цієї осі, що міститься між основами проекцій початку і кінця вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{e}$.



$$пр_{\vec{e}}\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\alpha$$

Властивості :

- рівні вектори мають рівні проекції;
- при множенні вектора $\overrightarrow{AB}$ на число m його проекція на вісь також множиться на це ж саме число;
- проекція суми двох векторів на вісь дорівнює сумі проекцій цих векторів

Означення

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ називається ***лінійно залежною***, якщо існують такі сталі $c_1, c_2, ..., c_m$, серед яких є хоча б одна відмінна від нуля, і для яких виконується рівність $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + ... + c_m\vec{a}_m = 0$.

Теорема Якщо система векторів лінійно залежна, то хоча би один з них можна представити у вигляді лінійної комбінації інших.

Теорема (обернена). Якщо один з векторів даної системи можна представити у вигляді лінійної комбінації інших, то така система векторів лінійно залежна.

Означення

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ називається ***лінійно незалежною***, якщо рівність $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + ... + c_m\vec{a}_m = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли усі сталі c_i дорівнюють нулю $(i = 1,2,...,m)$.

Теорема . Довільні два колінеарні вектори лінійно залежні і, навпаки, два неколінеарних вектори лінійно незалежні.

Теорема . Три компланарних вектори лінійно залежні і, навпаки, три некомпланарних вектори лінійно незалежні.

Теорема . Довільні три ненульові вектори на площині є лінійно залежними.

Теорема . Довільні чотири вектори у просторі лінійно залежні.

Базисом на прямій називається будь-який ненульовий вектор на цій прямій.

Базисом на площині називаються два не колінеарні вектори зі спільним початком на цій площині, взяті в певному порядку.

Базисом в просторі називаються довільні три не компланарні вектори, які беруться в певній послідовності.

Теорема

Якщо вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ утворюють базис в просторі, то будь-який вектор $\vec{a}$ цього простору може бути представлений до того ж єдиним чином, як лінійна комбінація векторів базису.

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 .$$

Теорема

Якщо на площині вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ утворюють базис, то будь-який з ними компланарний вектор $\vec{a}$ можна представити і при тому єдиним чином як лінійну комбінацію векторів базису.

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 .$$

Означення

Якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис і вектор

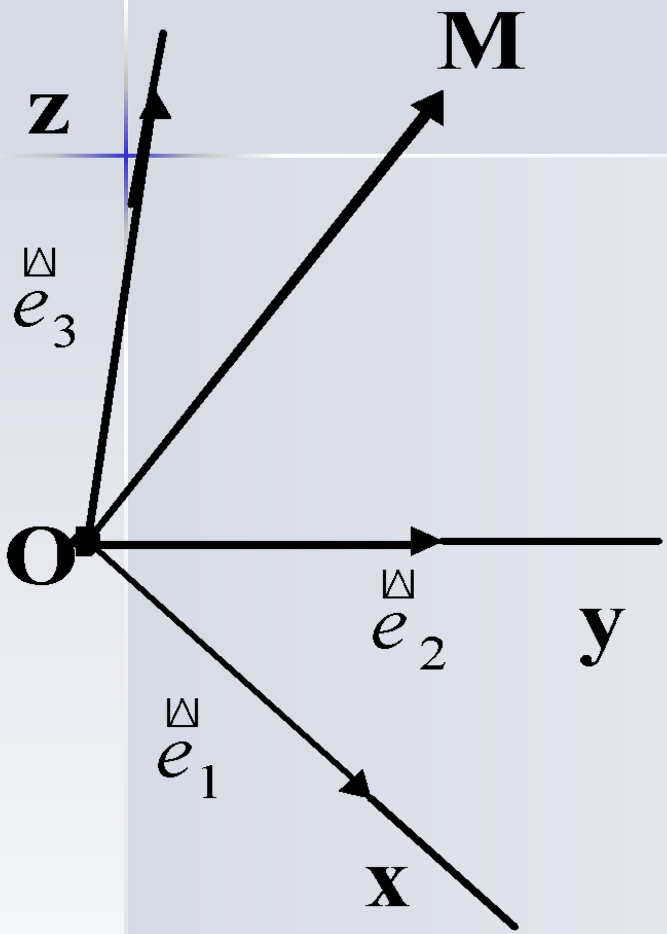
$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$, то числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

називаються ***координатами вектора*** $\vec{a}$ в

даному базисі.

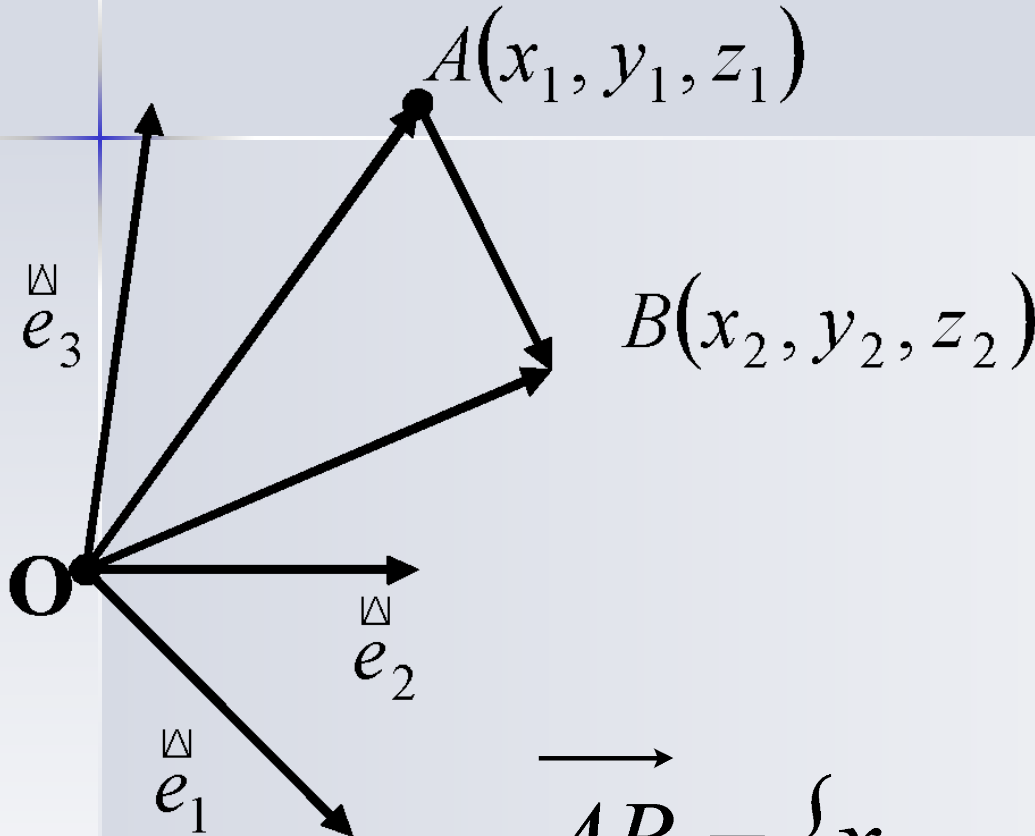
Декартова системи координат

Декартовою системою координат в просторі називається сукупність точки O та базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.



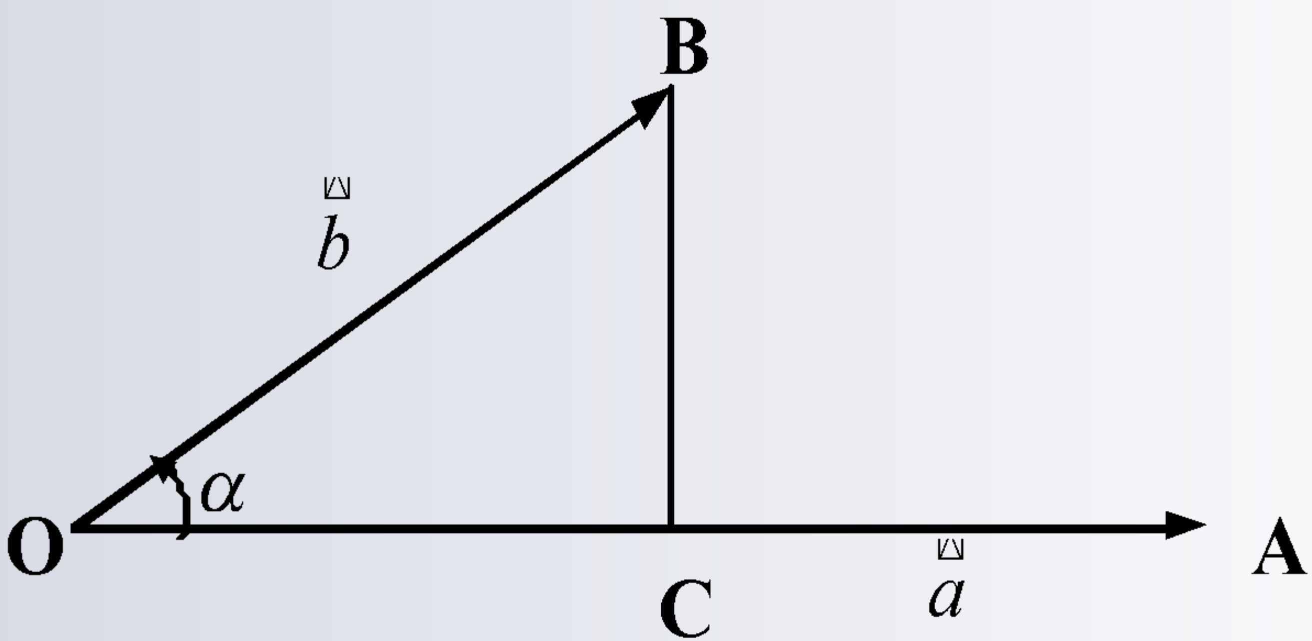
Координати радіус-вектора точки M по відношенню до початку координат ***називаються координатами точки*** M у даній системі координат.

Координати вектора



$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

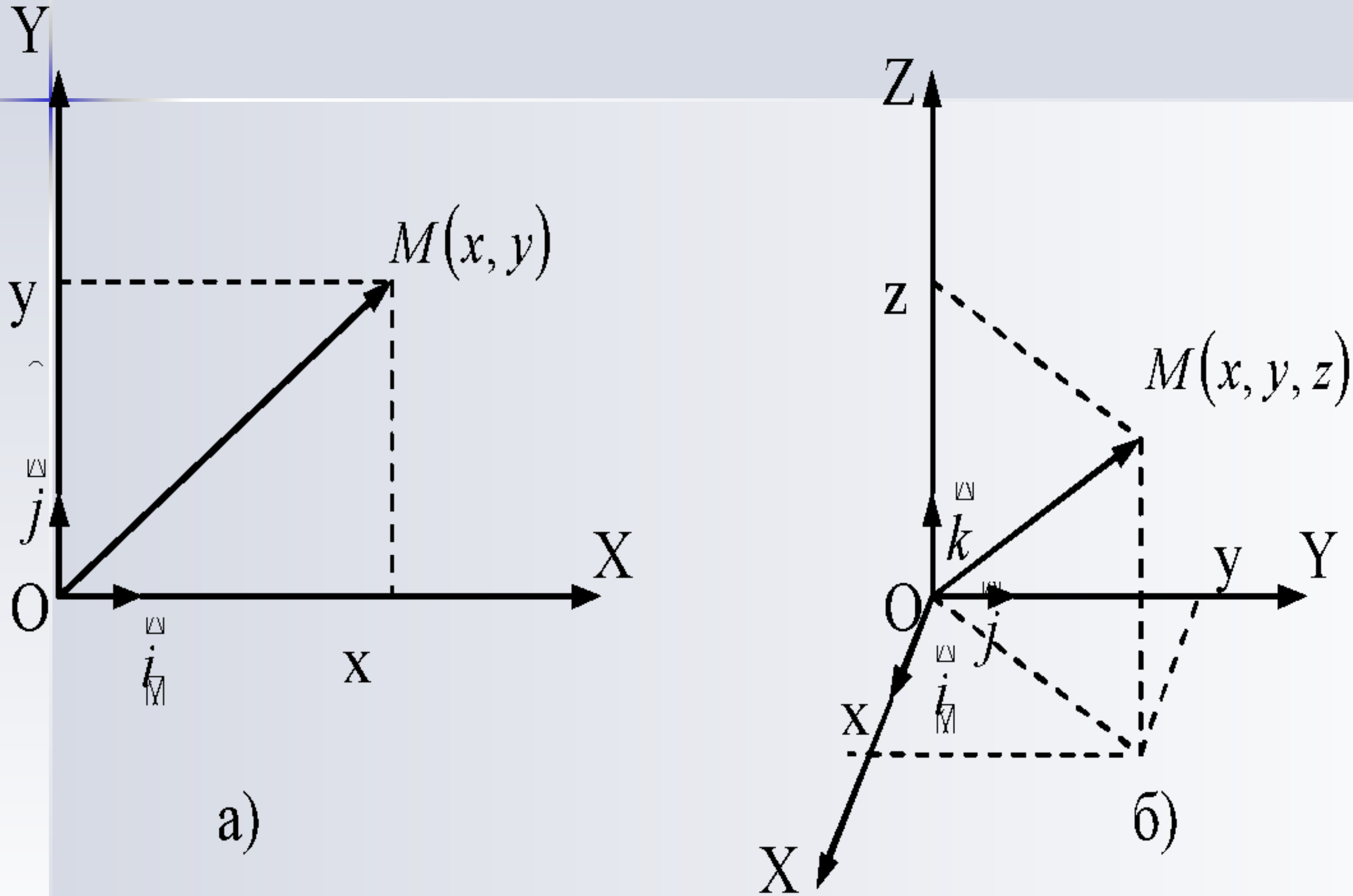
Кутом між двома векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається найменший кут AOB між цими векторами, зведеними до спільного початку O.



Базис називається ***ортонормованим***, якщо довжина кожного базисного вектора дорівнює одиниці і вони попарно ортогональні.

Декартова система координат з ортонормованим базисом називається ***прямокутною системою координат***.

Прямокутна декартова система координат на площині та в просторі



Відстань між двома точками

- На площині

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

- В просторі

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$$

- $$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}$$
- $$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}.$$
- $$\lambda \vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

Напрямні косинуси

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Ділення відрізка в заданому відношенні

- Якщо $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M(x, y, z)$

Та

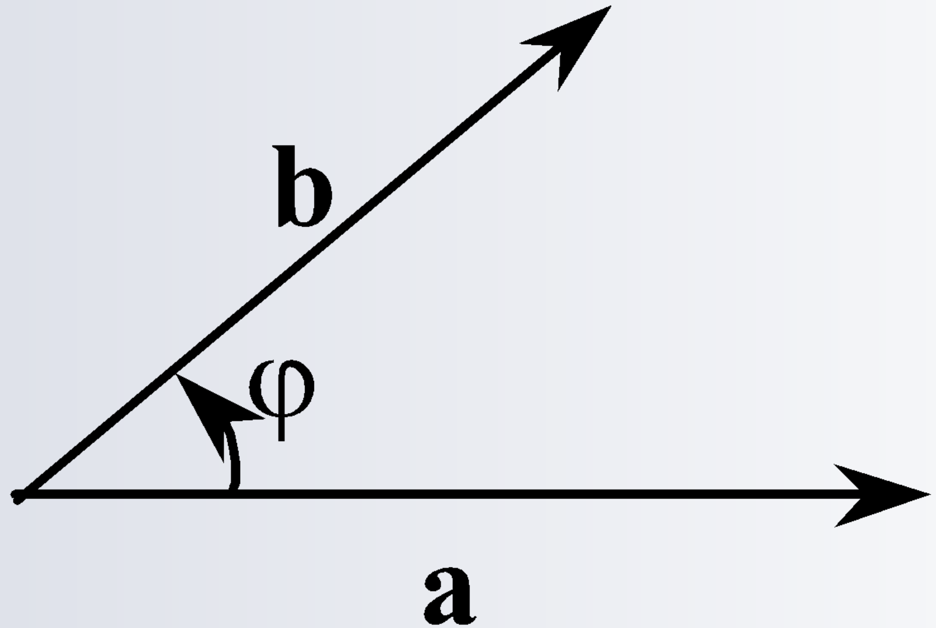
$$M_1M = \lambda \cdot MM_2$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Означення

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на косинус кута між ними.

Скалярний добуток



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

властивості:

1. Скалярний добуток комутативний, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^0 = |\vec{a}|^2,$

3. Скалярний добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли співмножники ортогональні або хоча б один з них дорівнює нулю.

4. Скалярний добуток асоціативний відносно скалярного множника, тобто

$$(\alpha \vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\alpha \vec{b}) = \alpha(\vec{a}\vec{b}).$$

5. Скалярний добуток дистрибутивний відносно додавання, тобто для довільних трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ $\vec{c}$ має місце рівність

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

6. Вектори ортонормованого базису задовольняють співвідношення

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

Вираз скалярного добутку через координати

Якщо $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,

тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Застосування:
1. Кут між векторами

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\cos\alpha \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}}$$

2. Умова ортогональності двох векторів

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

3. Фізичний зміст

якщо матеріальна точка, на яку діє сила, здійснила переміщення $\vec{s}$,

То робота дорівнює скалярному добутку сили на переміщення

$$A = \left(\vec{F}, \vec{s}\right)$$

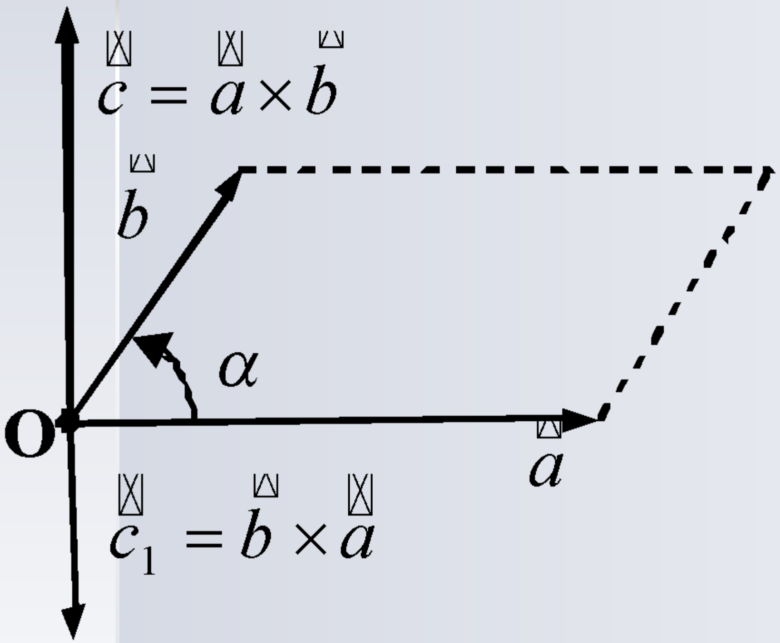
Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, в якого:

1) довжина чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованго на цих векторах;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ напрямлений таким чином, щоб найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до $\vec{b}$ здійснювався проти годинникової стрілки, якщо дивитись на нього з кінця вектора $\vec{c}$.

Векторний добуток



$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha$$

Властивості:

- $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$ - антикомутативність;
- $[\lambda\vec{a},\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]; [\vec{a},\lambda\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$

асоціативність відносно скалярного множника;

- $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$ дистрибутивність відносно додавання;
- $[\vec{a},\vec{b}]=0$ означає колінеарність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

векторний добуток основних ортів

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

Вираз векторного добутку через координати

Якщо $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, ,

тоді

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Застосування:
1. умова колінеарності векторів

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

2. Геометричний зміст

- Площа паралелограма

$$S = \left| \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \right|$$

- Площа трикутника

$$S = \frac{1}{2} \left| \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \right|$$

3. Фізичний зміст

Момент сили

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Мішаний добуток трьох векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ називається <u>число</u>, яке отримуємо, якщо перемножимо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ векторно, а потім отриманий вектор помножимо скалярно на вектор $\vec{c}$.

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)$$

Геометричний зміст

Мішаний добуток некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ по модулю дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ задані своїми координатами в прямокутній системі координат

$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$; $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Умова компланарності

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Властивості:

- $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = (\vec{a},[\vec{b},\vec{c}])$
- $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)$
- $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)$

Подвійний векторний добуток

Подвійним векторним добутком

векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається вираз виду

$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$.

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b})$$

Завдання на самопідготовку

- Законспектувати і вивчити слайди:

5-10, 19-27, 30-31, 33-35.

- Шумко Л.І. , Шумко Л.Г. Вища математика, курс лекцій, 2005.

§2.1-2.5.