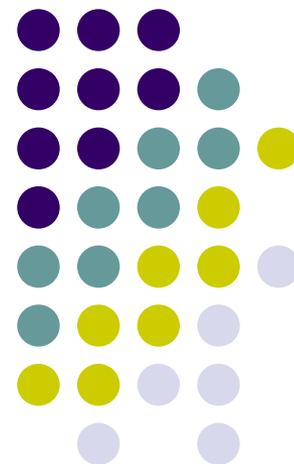


# Математический анализ

Курс лекций

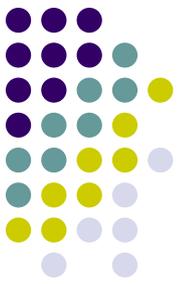
Составил доцент кафедры ВМ

к.п.н. Гринева Т.В.



# ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

## § 8. Признаки возрастания и убывания функции



**Теорема 1** (признак монотонности функции).

Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[a, b]$  и  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ )  $\forall x \in [a, b]$ , причем обращается в ноль конечное число раз. Тогда функция  $f(x)$  – возрастающая (убывающая) на отрезке  $[a, b]$ .

Доказательство проведём, например, для случая  $f'(x) \geq 0$ . Возьмём любые два числа  $x_1, x_2 \in [a, b]: x_1 < x_2$ . Для дифференцируемой функции  $f(x)$  на  $[x_1, x_2]$  можно записать формулу Лагранжа:  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ , где  $c \in (x_1, x_2)$ . Так как  $x_2 - x_1 > 0$ ,  $f'(c) \geq 0$  (по условию), то  $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$  или  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , т.е функция не убывает. Доказательство для случая  $f'(x) \leq 0$  аналогично.

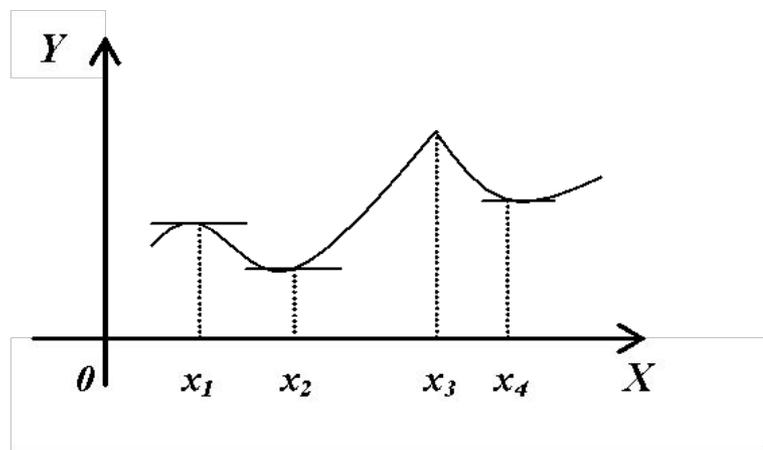
**Замечание.** Аналогично предыдущему доказывается, что если  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ )  $\forall x \in [a, b]$ , то функция  $f(x)$  возрастает (убывает) на отрезке  $[a, b]$ .

# § 9. Экстремум функции



**Опр.:** Точка  $x_0$  называется точкой локального максимума (локального минимума) функции  $f(x)$ , если существует окрестность  $\delta(x_0)$  точки  $x_0$ , что для любой точки  $x$  из этой окрестности выполнено условие  $f(x_0) \geq f(x)$  ( $f(x_0) \leq f(x)$ ).

Слово «локальный» подчеркивает, что  $f(x_0)$  является наибольшим (наименьшим) среди значений функции лишь в точках  $x$ , близких к  $x_0$ . Очевидно, функция может иметь несколько локальных максимумов и минимумов, причём может оказаться, что иной локальный максимум окажется меньше какого-то локального минимума.



На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , у которой  $x_1$  и  $x_3$  – точки локального максимума,  $x_2$  и  $x_4$  – точки локального минимума. Минимум функции в точке  $x_4$  больше её максимума в точке  $x_1$ .

Для обозначения локального максимума или минимума используют объединяющий их термин – локальный экстремум. В дальнейшем слово «локальный» будем опускать.



**Теорема 2** (необходимый признак существования экстремума).

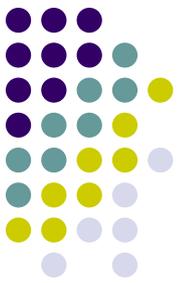
Если функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  экстремум и в этой точке существует производная, то эта производная обращается в нуль, т.е.  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть для определённости  $x_0$  – точка максимума. Тогда для всех малых по модулю  $\Delta x$  справедливо неравенство  $f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta x)$  или, что то же,  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$ .

Тогда  $\frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$  при  $\Delta x > 0$  и  $\frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$  при  $\Delta x < 0$ . Поэтому  $f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$ ,  
,  $f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$ . Так как  $f'(x_0)$  существует, то  $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$ ,  
отсюда  $f'(x_0) = 0$ , что и требовалось.

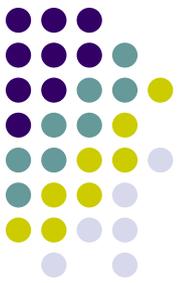
Геометрически это означает, что касательная к графику функции, соответствующая точке экстремума (если она существует), параллельна оси **OX**.

Аналогичное доказательство для случая минимума.



**Замечание.** Теорема, обратная рассмотренной, неверна: необходимый признак экстремума не является достаточным. Например, для функции  $f(x) = x^3$  её производная  $f'(x) = 3x^2$  обращается в нуль при  $x = 0$ , однако, точка  $x = 0$  не является точкой экстремума.

Итак, *точками возможного экстремума (точками, подозрительными на экстремум) являются критические точки 1-го рода.* Рассмотрим достаточные условия того, что критическая точка 1-го рода является точкой экстремума.



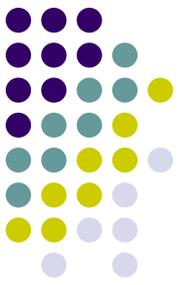
**Теорема 3** (1-й достаточный признак существования экстремума).

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в некоторой окрестности  $U_\varepsilon(x_0)$  точки  $x_0$  и дифференцируема в каждой её точке, за исключением, быть может, точки  $x_0$ . Если при переходе через точку  $x_0$  от меньших значений аргумента к большему («слева направо») производная меняет знак с «+» на «-», то  $x_0$  – точка максимума, если с «-» на «+», то  $x_0$  – точка минимума.

*Доказательство.* Пусть  $f'(x)$  при переходе через точку  $x_0$  меняет знак с «+» на «-», т.е.  $f'(x) > 0$  при  $x_0 - \varepsilon < x < x_0$  и  $f'(x) < 0$  при  $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ . Тогда по формуле Лагранжа для любой точки  $x \in U_\varepsilon(x_0)$  имеем  $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ , где  $c$  лежит между  $x$  и  $x_0$ .

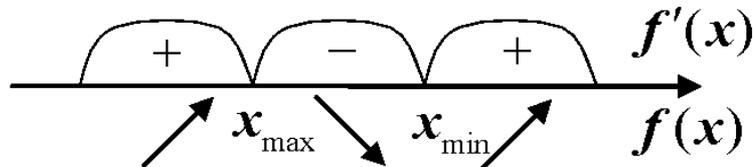
Если  $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ , то  $f'(c) < 0$ ,  $x - x_0 > 0$ , поэтому  $f(x) - f(x_0) < 0$ . Если  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ , то  $f'(c) > 0$ ,  $x - x_0 < 0$ , поэтому  $f(x) - f(x_0) < 0$ . Итак,  $\forall x \in U_\varepsilon(x_0) \quad f(x) - f(x_0) < 0$ , а это означает, что точка  $x_0$  – точка максимума.

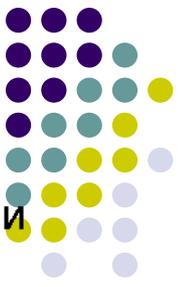
Доказательство случая перемены знака  $f'(x)$  с «-» на «+» аналогично.



Алгоритм исследования функции  $y = f(x)$  на монотонность и экстремум

1. Область определения –  $D(y)$ ;
2. Найти производную  $y' = f'(x)$
3. Найти критические точки, т. е. значения  $x$ , при которых  $f'(x) = 0$  или  $f'(x)$  не существует.
4. По схеме определить промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума ( $x_{\min}$  и  $x_{\max}$ ), посчитать соответствующее значение функции  $y_{\min} = y(x_{\min})$  и  $y_{\max} = y(x_{\max})$ .

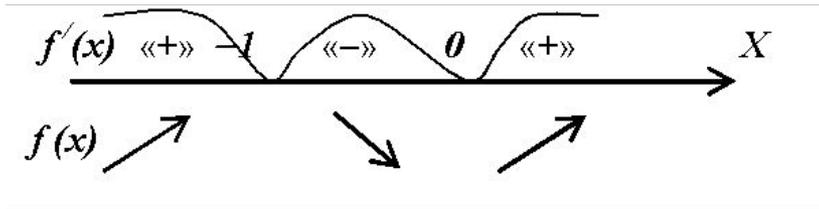




**Пример.** Исследовать функцию  $f(x) = 2x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$  на монотонность и экстремум.

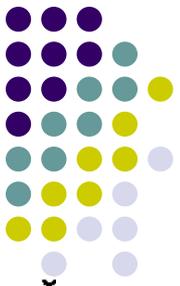
- Функция определена и непрерывна при всех  $x$ .

Производная  $f'(x) = 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} = 2 \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$  не существует в точке  $x_1 = 0$  и обращается в нуль, если  $1 + \sqrt[3]{x} = 0$ , т.е. при  $x_2 = -1$ . Отметим эти точки на числовой оси и определим знак  $f'(x)$  на полученных интервалах.



Нетрудно убедиться, что  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$  (касательная к графику функции в его точке  $O(0; 0)$  вертикальна).

Итак, функция возрастает на промежутках  $(-\infty; -1]; [0; +\infty)$ , убывает при  $[-1; 0]$ . Точка  $x_2 = -1$  – точка максимума, при этом максимум функции  $f(-1) = 1$ ; точка  $x_1 = 0$  – точка минимума, минимум функции  $f(0) = 0$ .



**Теорема 4** (2–й достаточный признак существования экстремума).

Если  $f(x)$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция в некоторой окрестности точки  $x_0$  и если  $f'(x_0) = 0$ , а  $f''(x_0) \neq 0$ , то  $x_0$  является точкой экстремума. При  $f''(x_0) < 0$  точка  $x_0$  – точка максимума, при  $f''(x_0) > 0$  точка  $x_0$  – точка минимума.

**Пример 3.** Исследовать на экстремум функцию  $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5$  с помощью 2–го достаточного признака.

- Вычислим  $f'(x)$  и найдём критические точки 1–го рода:

$$f'(x) = x^3 - 2x^2 - 3x, \quad x^3 - 2x^2 - 3x = 0, \quad x(x^2 - 2x - 3) = 0.$$

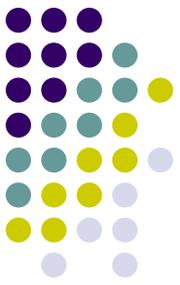
Полученное уравнение даёт три корня (три критические точки):

$x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 3$ . Вычислим  $f''(x) = (x^3 - 2x^2 - 3x)' = 3x^2 - 4x - 3$ . Определим знак  $f''(x)$  в каждой критической точке:

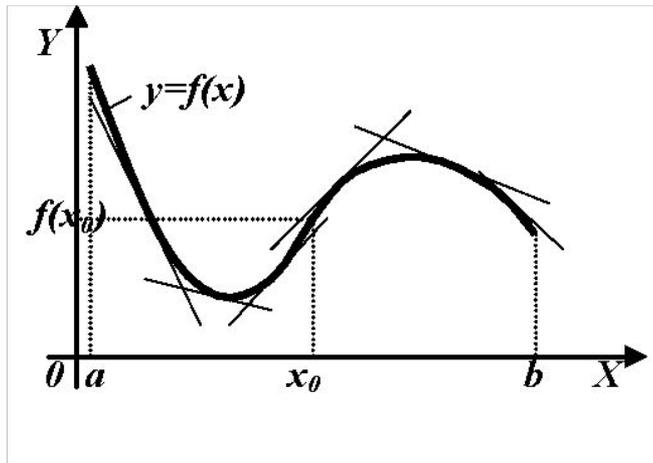
$f''(-1) = 4 > 0$ ,  $f''(0) = -3 < 0$ ,  $f''(3) = 12 > 0$ . Следовательно,  $x_1 = -1$  – точка минимума,  $f(-1) = \frac{53}{12}$  – значение минимума;  $x_2 = 0$  – точка максимума,  $f(0) =$

$5$  – значение максимума;  $x_3 = 3$  – точка минимума,  $f(3) = -\frac{25}{4}$  – значение минимума. •

# § 10. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

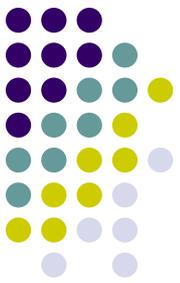


**Опр.:** График дифференцируемой функции  $y = f(x)$  называется выпуклым (выпуклым вверх) на интервале  $(a, b)$ , если график на этом промежутке расположен ниже касательной, проведённой к графику этой функции в любой точке  $x \in (a, b)$ . Если же на интервале  $(a, b)$  график функции  $y = f(x)$  располагается выше любой касательной, проведённой к графику этой функции, то его называют вогнутым (выпуклым вниз).



На рисунке график функции  $y = f(x)$  является вогнутым на интервале  $(a, x_0)$  и выпуклым на интервале  $(x_0, b)$ .

**Опр.:** Точка  $(x_0, f(x_0))$  графика функции  $y = f(x)$  называется точкой перегиба, если она разделяет выпуклую и вогнутую части графика.



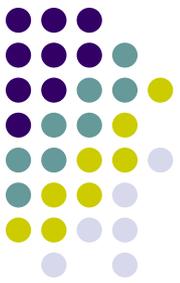
**Теорема 5** (необходимый и достаточный признак выпуклости и вогнутости).

Пусть функция  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда верно утверждение: график функции  $f(x)$  выпуклый (вогнутый) на  $(a, b) \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$  ( $f''(x) \geq 0$ )  $\forall x \in (a, b)$ .

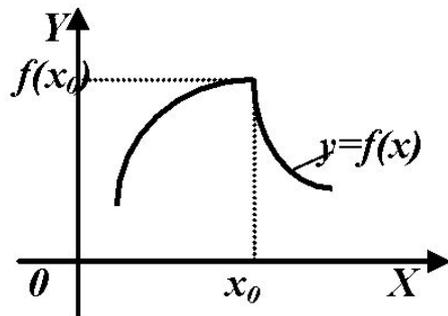
**Теорема 6** (необходимый признак существования точки перегиба).

Пусть точка  $(x_0, f(x_0))$  – точка перегиба графика дважды непрерывно дифференцируемой функции  $f(x)$ , тогда  $f''(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* Допустим, например, что при  $x < x_0$  график вогнут, т.е.  $f''(x) \geq 0$ , а при  $x > x_0$  – выпуклый, т.е.  $f''(x) \leq 0$ . Тогда, т.к.  $f''(x)$  по условию непрерывная функция, из условия  $f''(x_0 - 0) = f''(x_0 + 0) = f''(x_0)$  следует, что  $f''(x_0) = 0$ , что и требовалось доказать.



**Замечание.** График функции может иметь точку перегиба и при  $x = x_0$  таком, что  $f''(x_0)$  не существует, поэтому возможными точками перегиба («подозрительными на перегиб») являются точки, где вторая производная или равна нулю, или не существует. Такие точки называют критическими точками 2-го рода. Заметим, что не всякая такая точка является точкой перегиба.



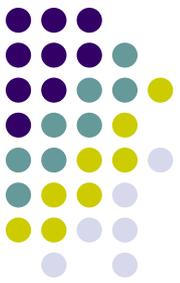
Например, для функций  $y = x^3$  и  $y = x^4$  вторые производные  $y'' = 6x$  и  $y'' = 12x^2$  при  $x = 0$  обращаются в нуль. При этом точка  $(0, 0)$  для графика функции  $y = x^3$  является точкой перегиба, а для графика функции  $y = x^4$  не является.



**Теорема 7** (достаточный признак существования точки перегиба).

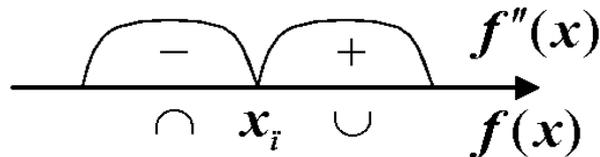
Пусть функция  $f(x)$  определена в окрестности критической точки 2-го рода  $x = x_0$  и дважды непрерывно дифференцируема (хотя бы в проколотой окрестности точки  $x_0$ ). Если  $f''(x)$  меняет знак при переходе через  $x_0$ , то  $(x_0, f(x_0))$  – точка перегиба.

*Доказательство.* Если  $f''(x)$  при переходе через  $x = x_0$  сменила знак, то это означает, что с одной стороны от  $x_0$  график функции  $f(x)$  выпуклый, а с другой вогнутый, т.е. при  $x = x_0$  произошёл перегиб графика.



Алгоритм исследования графика функции  $y = f(x)$  на выпуклость вверх и вниз, точки перегиба

1. Область определения –  $D(y)$ ;
2. Найти производную  $y' = f'(x)$
3. Найти вторую производную  $y'' = f''(x)$
4. Найти точки, в которых  $f''(x) = 0$  или  $f''(x)$  не существует.
5. По схеме определить множество значений  $x$ , при которых график функции выпуклый вверх, вниз и точки перегиба.





**Пример.** Исследовать на выпуклость и вогнутость, найти точки перегиба графика функции  $f(x) = 2 - |x^5 - 1|$ .

- Используя определение модуля, данную функцию можно записать в виде:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^5, & x \leq 1 \\ 3 - x^5, & x > 1 \end{cases}$$

Заметим, что функция непрерывна  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Вычислим  $f'(x) = \begin{cases} 5x^4, & x \leq 1 \\ -5x^4, & x > 1 \end{cases}$ .

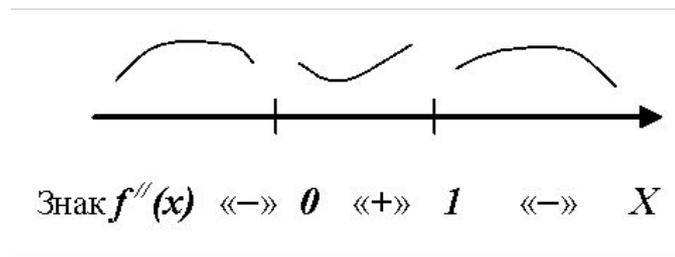
При  $x = 1$  производная  $f'(x)$  не существует, так как  $f'(1-0) = 5 \neq f'(1+0) = -5$ , поэтому,  $f''(1)$  также не существует.

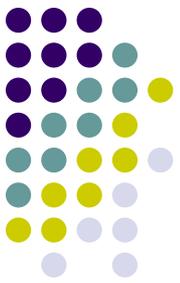
При  $x \neq 1$  имеем  $f''(x) = \begin{cases} 20x^3, & x \leq 1 \\ -20x^3, & x > 1 \end{cases}$ .

Итак, критические точки 2-го рода:  $x_1 = 0$  (так как  $f''(0) = 0$ ) и  $x_2 = 1$  (так как  $f''(1)$  не существует). Отметим эти точки на числовой оси. В каждом из полученных интервалов определим знак  $f''$ . Например,

$$f''(-1) = -20 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty; 0);$$

На интервале  $(-\infty; 0)$  график выпуклый, на  $(0; 1)$  – вогнутый, на  $(1; +\infty)$  – выпуклый. Точки  $A(0; 1)$  и  $B(1; 2)$  – точки перегиба. Заметим, что точка  $B$  – угловая точка графика. •





# §11. Асимптоты графика функции

При исследовании поведения функции на бесконечности, т.е. при  $x \rightarrow \pm\infty$ , или вблизи точек разрыва 2-го рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называют асимптотами. Дадим строгое определение.

**Опр.:** Прямая  $L : Ax + By + C = 0$  называется асимптотой графика функции  $y = f(x)$ , если расстояние  $d$  от точки  $M(x, f(x))$  графика до этой прямой  $L$  (измеряемое по перпендикуляру к  $L$ ) стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки графика от начала координат.

Обычно, отдельно рассматривают

вертикальные асимптоты ( $x = a$  – вертикальная прямая) ;

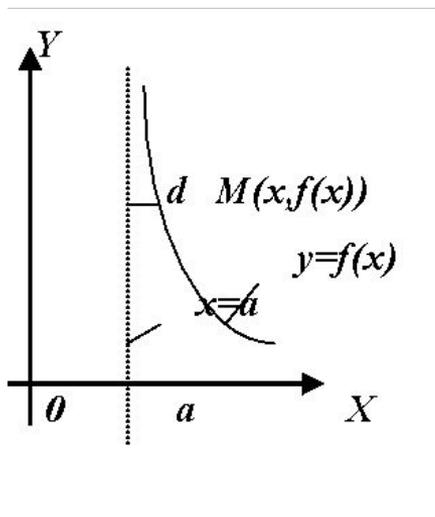
наклонные асимптоты ( $L : y = kx + b$  – наклонная прямая). Частный случай  $L : y = b$  ( $k = 0$ ) будет соответствовать горизонтальной асимптоте.



**Теорема 8** (необходимый и достаточный признак существования вертикальной асимптоты).

Прямая  $L : x = a$  является вертикальной асимптотой графика функции тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из соотношений:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty.$$

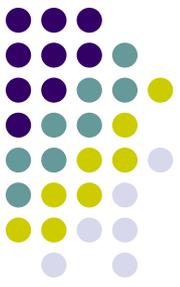


**Доказательство.** Любое из четырёх указанных соотношений означает, что если  $x \rightarrow a$  каким-либо способом, то  $|f(x)| \rightarrow \infty$ , т.е. расстояние от точки  $M(x, f(x))$  графика функции до начала координат неограниченно возрастает. Условие  $x \rightarrow a$  означает, что расстояние  $d = |x - a|$  между точкой  $M$  и прямой  $L : x = a$  стремится к нулю. Всё это говорит о том, что  $x = a$  – асимптота.

На рисунке показан случай, когда

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty.$$

**Замечание.** Теорема 8 показывает, что наличие вертикальных асимптот у графика функции  $y = f(x)$  тесно связано с наличием точек разрыва 2-го рода у функции  $f(x)$ .



**Пример.** Найти вертикальные асимптоты графика функции

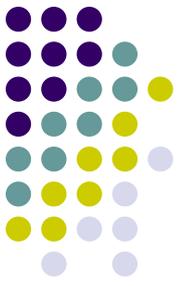
$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

- Данная функция имеет единственную точку разрыва  $x_1 = -1$  (значение  $f(-1)$  не определено). Так как  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \left( \frac{-1}{+0} \right) = -\infty$ , то прямая  $x = -1$  – единственная вертикальная асимптота. •

**Пример.** Найти вертикальные асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

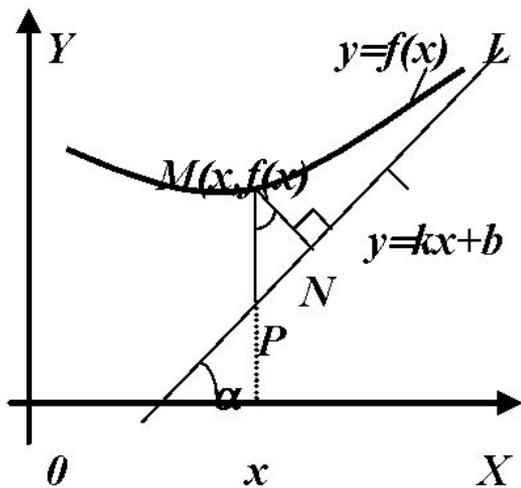
- Данная функция определена и непрерывна на интервале  $(-1; 1)$ , т.е. не имеет точек разрыва. Но  $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \left( \frac{-1}{+0} \right) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \left( \frac{1}{+0} \right) = +\infty$ , поэтому прямая  $x = -1$  является правосторонней вертикальной асимптотой (точки графика расположены только справа от этой асимптоты), а прямая  $x = 1$  является левосторонней вертикальной асимптотой (точки графика расположены только слева от этой асимптоты). Отметим, что в примере прямая  $x = -1$  – двусторонняя вертикальная асимптота. •



**Теорема 9** (необходимый и достаточный признак существования наклонной асимптоты).

Прямая  $L : y = kx + b$  является наклонной асимптотой графика функции  $y = f(x)$  тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы:

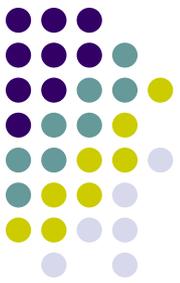
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$



Доказательство проведём только для случая  $x \rightarrow +\infty$  (случай правосторонней наклонной асимптоты).

Расстояние от точки  $M$  графика функции  $y = f(x)$  до асимптоты  $L$  изображается отрезком  $MN$ . Так как  $\angle NMP = \angle(L, OX) = \alpha$ , то  $MN = MP \cdot \cos \alpha$ , где точка  $P(x; kx + b) \in L$ . Имеем

$$MP = |f(x) - (kx + b)| \text{ и } \cos \alpha \neq 0.$$



Итак,  $L : y = kx + b$  – правосторонняя наклонная асимптота  $\Leftrightarrow (MN \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty)$   $\Leftrightarrow (MP \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty)$   $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - kx - b| = 0 \Leftrightarrow b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Так как  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - kx}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} - k \right) = 0$ , то  $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

Если будут существовать соответствующие пределы при  $x \rightarrow -\infty$ , то прямая  $L : y = kx + b$  будет левосторонней наклонной асимптотой. Если рассматриваемые пределы как при  $x \rightarrow +\infty$ , так и при  $x \rightarrow -\infty$  дадут одинаковые результаты  $k$  и  $b$ , то прямая  $L : y = kx + b$  будет двусторонней наклонной асимптотой (при  $x \rightarrow \infty$ ).

**Замечание.** Если хотя бы один из пределов не существует или бесконечен, то наклонной асимптоты нет.



**Пример.** Найти асимптоты графика функции  $y = \frac{e^x}{x}$ .

• Функция определена и непрерывна при всех  $x$ , за исключением  $x = \theta$  ( $x = \theta$  – точка разрыва). Так как  $\lim_{x \rightarrow \theta \pm 0} \frac{e^x}{x} = \pm\infty$ , то прямая с уравнением  $x = \theta$  (ось  $OY$ ) – вертикальная асимптота (двусторонняя).

Ищем наклонные асимптоты в виде  $y = kx + b$ :

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \left\langle \text{правило Лопиталя} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \left\langle \text{правило Лопиталя} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty. \text{ Так как } k = +\infty, \text{ то правой}$$

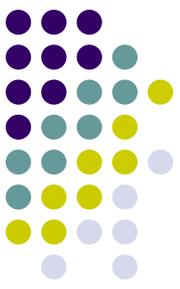
наклонной асимптоты нет. Ищем левостороннюю наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2} = \left( \frac{+0}{+\infty} \right) = +0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^x}{x} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \left( \frac{+0}{-\infty} \right) = -0.$$

Коэффициенты  $k$  и  $b$  найдены, поэтому прямая  $y = kx + b = 0 \cdot x + 0 = 0$ , т.е.  $y = 0$  (ось  $OX$ ) является левосторонней асимптотой (горизонтальной, частный случай). Проведённое исследование знака числа  $b$  говорит о том, что график функции асимптотически приближается к оси  $OX$  снизу. •

# §12. План полного исследования функции и построения её графика



Исследование функции и построение её графика рекомендуется проводить по следующей схеме.

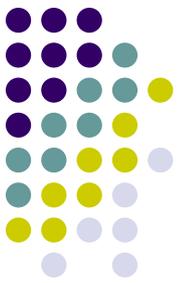
- 1) Найти область определения функции.
- 2) Исследовать функцию на четность/нечетность. При наличии свойства можно исследовать функцию и строить график для  $x \geq 0$ . После добавить график, отображая симметрично относительно оси  $OY$ /начала координат соответственно.
- 3) Исследовать функцию на непрерывность. Найти точки разрыва функции и её односторонние пределы в этих точках. Сделать вывод о наличии вертикальных асимптот.
- 4) Исследовать функцию на наличие наклонных асимптот.
- 5) С помощью производной первого порядка найти промежутки возрастания и убывания, точки экстремума, экстремумы функции.
- 6) С помощью производной второго порядка найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба.
- 7) Найти точки пересечения графика с координатными осями (если технически не сложно).
- 8) Используя результаты исследования, построить график функции.

# § 13. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции



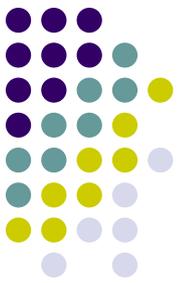
Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она достигает на нем наибольшего и наименьшего значения.

Рассмотрим вопрос об отыскании наибольшего значения  $M$  и наименьшего значения  $m$  функции  $y = f(x)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ , непрерывной на этом отрезке и имеющей конечное множество критических точек 1–го рода.



Алгоритм исследования функции  $y = f(x)$  на наибольшее и наименьшее значение на отрезке  $[a, b]$

1. Область определения –  $D(y)$ ; убедиться, что функция непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ;
2. Найти производную  $y' = f'(x)$ ;
3. Найти критические точки, т. е. значения  $x$ , при которых  $f'(x) = 0$  или  $f'(x)$  не существует. Оставить только те, которые принадлежат интервалу  $(a, b)$ ;
4. Посчитать значение функции в точках, найденных в п.3 и на концах отрезка, т.е.  $y(x_{кр})$ ,  $y(a)$ ,  $y(b)$ . Выбрать среди полученных значений самое большое и самое маленькое.



**Пример.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x)=2x^3-3x^2+1$  на отрезке  $[-1; 2]$ .

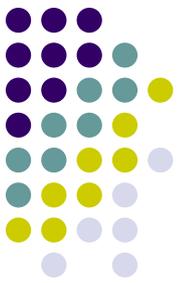
• 1) Ищем критические точки 1-го рода заданной непрерывной функции:

$f'(x) = 6x^2 - 6x$ ;  $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$  – критические точки, обе внутри отрезка  $[-1; 2]$ .

2) Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$f(-1) = -4; \quad f(0) = 1; \quad f(1) = 0; \quad f(2) = 5.$$

3) Так как самое большое из этих чисел равно **5**, а самое малое равно **(-4)**, поэтому наибольшее значение  $M = f(2) = 5$  (достигается при  $x = 2$ , т.е. на правом конце отрезка), наименьшее значение  $m = f(-1) = -4$  (достигается при  $x = -1$ , т.е. на левом конце отрезка).



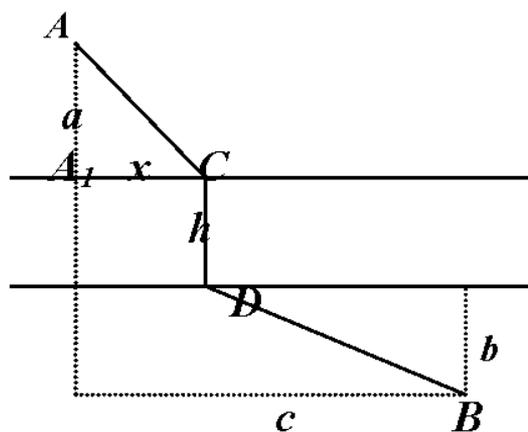
### **Замечания.**

1. Если непрерывная функция  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  возрастает (убывает), то  $m = f(a)$ ,  $M = f(b)$  ( $m = f(b)$ ,  $M = f(a)$ ).

2. Пусть непрерывная функция  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  имеет *только один экстремум*  $f(x_0)$ ,  $x_0 \in (a, b)$ . Если в этой точке функция имеет максимум (минимум), то без сравнения с граничными значениями ясно, что  $M = f(x_0)$  ( $m = f(x_0)$ ).

Важно подчеркнуть, что сказанное можно применить и к открытому промежутку  $(a, b)$ , а также к бесконечному промежутку.

К задачам рассмотренного типа приводятся многие практические задачи. Особенностью таких задач является то, что не задана функция, подлежащая исследованию. Поэтому, вначале следует, исходя из условий задачи, выбрать независимую переменную и выразить исследуемую величину через эту переменную (т.е. задать функцию аналитически). При этом, промежуток изменения независимой переменной, который может быть конечным или бесконечным (т.е. область определения функции), также следует определить из условия задачи.



**Пример.** Выбрать место для постройки моста через реку, чтобы длина дороги между двумя пунктами **A** и **B**, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшей.

- Сделаем схематический план местности вблизи указанных в условии объектов. Расстояния **a**, **b**, **c** и **h** считаем известными постоянными величинами.

Если мост построен в указанном на рисунке месте, то длина дороги между пунктами **A** и **B** будет равна  $L = AC + h + DB$ . Выбрав за независимую переменную  $x$  расстояние **A<sub>1</sub>C**, получим

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad DB = \sqrt{b^2 + (c-x)^2}.$$

Итак, исследуемая функция

$$L = L(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + h + \sqrt{b^2 + (c-x)^2},$$

где  $x \in [0, c]$ , что очевидно. Требуется найти наименьшее значение этой непрерывной функции на отрезке  $[0, c]$ .



$$L = L(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + h + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$$

Найдём производную  $L'(x)$  и критические точки 1-го рода, лежащие внутри отрезка  $[0, c]$ :

$$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = \frac{x\sqrt{b^2 + (c - x)^2} - (c - x)\sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + (c - x)^2)}};$$

$$\begin{aligned} L'(x) = 0 &\Rightarrow x\sqrt{b^2 + (c - x)^2} = (c - x)\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2(b^2 + (c - x)^2) = (c - x)^2(a^2 + x^2) \Rightarrow b^2x^2 = a^2(c - x)^2 \Rightarrow bx = a(c - x), \end{aligned}$$

т.к.  $x \in [0, c]$ . Поэтому,  $x = x_0 = \frac{ac}{a + b}$  – единственная критическая точка 1-го рода

внутри  $[0, c]$ , так как  $x_0 = \frac{a}{a + b} \cdot c < c$ , а других критических точек нет.

Рассматриваемая функция  $L(x)$  при  $x = x_0$  имеет минимум, потому что  $L'(x_0) = 0$ , а  $L'(0) = -\frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} < 0$ ,  $L'(c) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} > 0$ . Согласно тому, что это

единственный экстремум, делаем вывод: при  $x = \frac{ac}{a + b}$  функция  $L(x)$  имеет наименьшее значение.

$$L = L(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + h + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$$



Итак, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая, следует строить мост в том месте, где расстояние  $A_1C = \frac{ac}{a+b}$ . При этом, длина дороги

$$L(x_0) = \sqrt{a^2 + \frac{a^2c^2}{(a+b)^2}} + h + \sqrt{b^2 + \left(c - \frac{ac}{a+b}\right)^2} = \sqrt{(a+b)^2 + c^2} + h.$$

Заметим, что при  $a = b$  мост нужно строить на расстоянии  $A_1C = \frac{c}{2}$ . •