

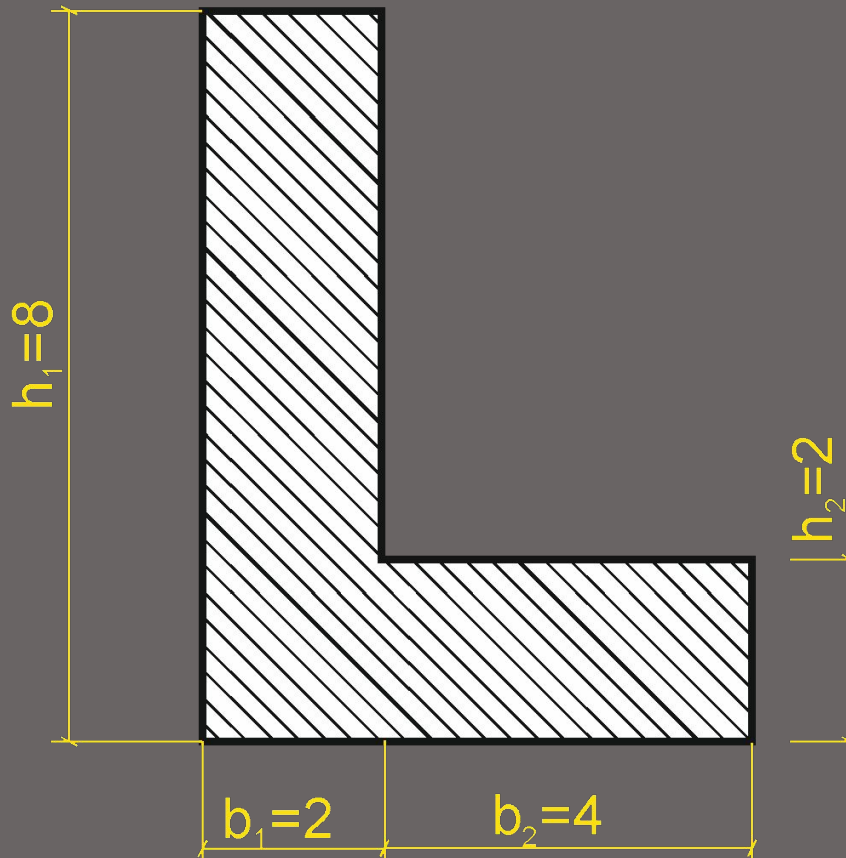
Тема: Геометрические характеристики плоских сечений

Геометрическими характеристиками плоского сечения являются:

- 1) площадь F ,
- 2) статические моменты площади S_x, S_y ,
- 3) моменты инерции I_x, I_y, I_p, I_{xy} ,
- 4) моменты сопротивления W_x, W_y, W_p ,
- 5) радиусы инерции i_x, i_y, i_p .

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Рассмотрим пример определения геометрических характеристик для произвольного поперечного сечения.

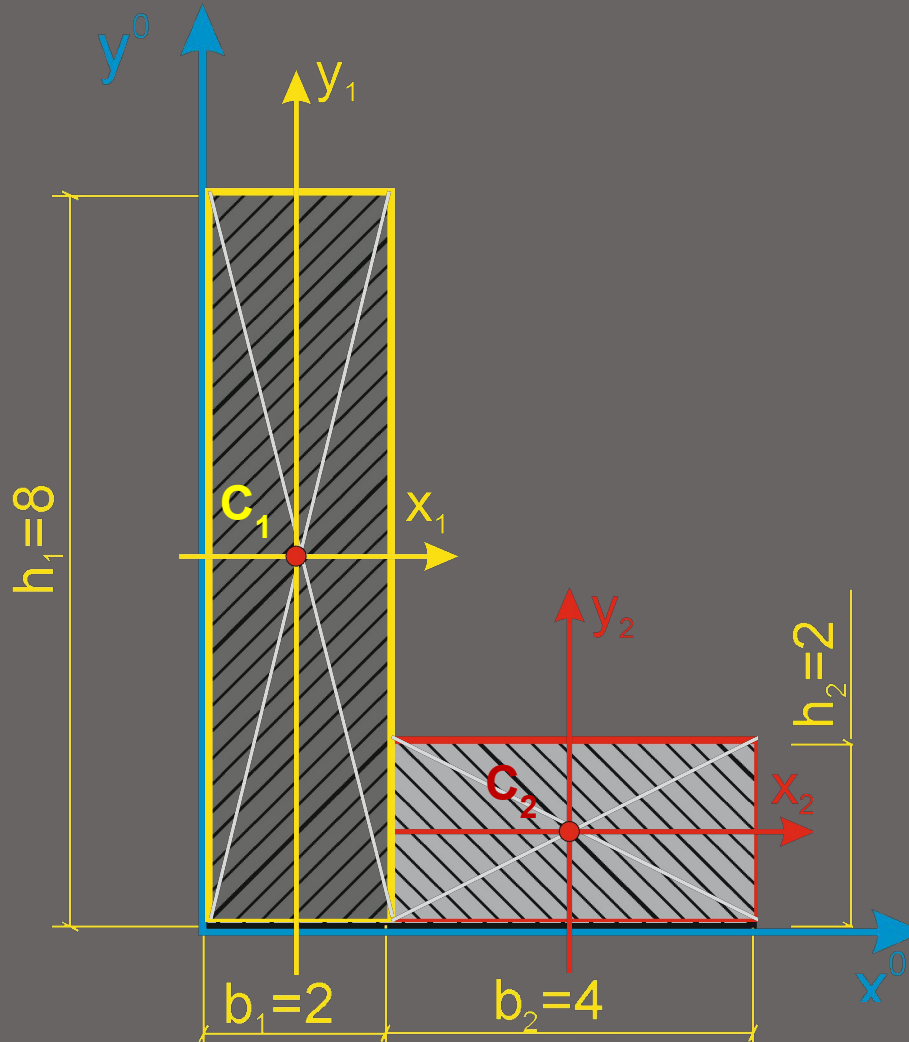


Для заданного поперечного сечения требуется:

- 1) Определить положение центра тяжести;
- 2) Найти величины осевых и центробежного моментов инерции относительно случайных центральных осей;
- 3) Определить главные моменты инерции относительно центральных осей (J_1, J_2);
- 4) Определить положение главных центральных осей (α_1, α_2);
- 5) Выполнить необходимые проверки;
- 6) Определить моменты сопротивления;
- 7) Определить радиусы инерции.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

1. Определение центра тяжести сечения



1.1 Проводятся вспомогательные оси x^0 и y^0 так, чтобы вся несимметричная фигура располагалась в первой четверти;

1.2. Сложная фигура разбивается на простейшие с легко определяемыми центрами их тяжести C_i ($x_i; y_i$), через которые проводим центральные оси x_i и y_i , параллельные вспомогательным осям x^0 и y^0 .

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

1.3. Определяем геометрические характеристики простых фигур относительно своих центральных осей;

1.3.1. Площади отдельных фигур

$$F_1 = b_1 \cdot h_1 = 2 \cdot 8 = 16 \text{ см}^2$$

$$F_2 = b_2 \cdot h_2 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ см}^2$$

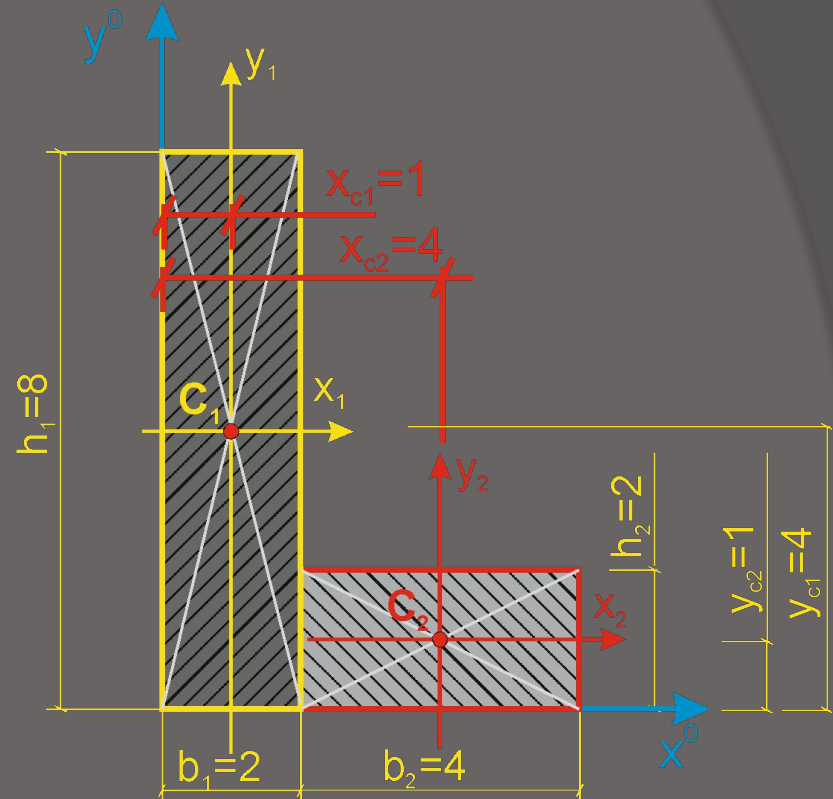
1.3.2. Координаты центров тяжести фигур C_1 и C_2 относительно вспомогательной систем координат $x^0 y^0$

$$x_{C1} = \frac{b_1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ см}$$

$$y_{C1} = \frac{h_1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ см}$$

$$x_{C2} = b_1 + \frac{b_2}{2} = 2 + \frac{4}{2} = 4 \text{ см}$$

$$y_{C2} = \frac{h_2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ см}$$



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

1.3.3. Моменты инерции относительно собственных центральных осей x_i y_i

$$J_{x_1} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} = \frac{2 \cdot 8^3}{12} = 85,333 \text{ см}^4$$

$$J_{y_1} = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 5,333 \text{ см}^4$$

$$J_{x_2} = \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} = \frac{4 \cdot 2^3}{12} = 2,667 \text{ см}^4$$

$$J_{y_2} = \frac{h_2 \cdot b_2^3}{12} = \frac{2 \cdot 4^3}{12} = 10,667 \text{ см}^4$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

1.3.4. Статические моменты площади относительно осей x^0 y^0

$$\sum_{i=1}^2 S_{y_i^0} = F_1 \cdot x_{c1} + F_2 \cdot x_{c2} = 16 \cdot 1 + 8 \cdot 4 = 48 \text{ см}^3$$

$$\sum_{i=1}^2 S_{x_i^0} = F_1 \cdot y_{c1} + F_2 \cdot y_{c2} = 16 \cdot 4 + 8 \cdot 1 = 72 \text{ см}^3$$

1.3.5. Определяем центр тяжести поперечного сечения

$$x_c = \frac{\sum S_{y_i^0}}{\sum F_i} = \frac{48}{16 + 8} = 2 \text{ см}$$

$$y_c = \frac{\sum S_{x_i^0}}{\sum F_i} = \frac{72}{16 + 8} = 3 \text{ см}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

относительно **центральных осей** статические моменты площади равны нулю

Для проверки правильности найденных координат центра тяжести поперечного сечения определим статические моменты площади относительно **центральных осей X_c, Y_c**

$$S_{y_c} = \sum_{i=1}^2 F_i \cdot b_i = 0$$

$$S_{x_c} = \sum_{i=1}^2 F_i \cdot a_i = 0$$

ГДЕ $b_i = x_i - x_c$; $a_i = y_i - y_c$

$$b_1 = x_1 - x_c = 1 - 2 = -1 \text{ см}$$

$$b_2 = x_2 - x_c = 4 - 2 = 2 \text{ см}$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 4 - 3 = 1 \text{ см}$$

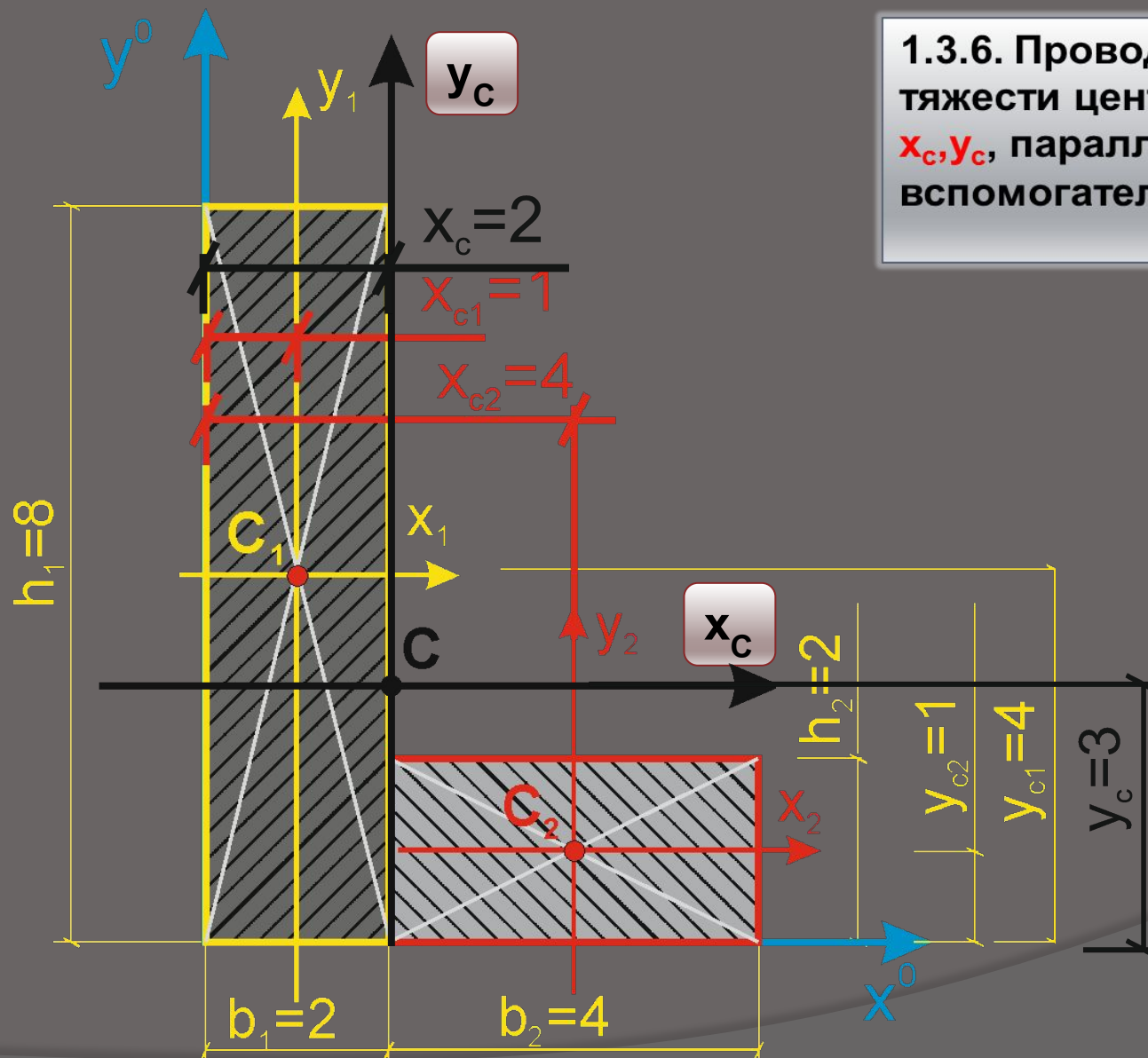
$$a_2 = y_2 - y_c = 1 - 3 = -2 \text{ см}$$

$$S_{y_c} = F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 = 16 \cdot (-1) + 8 \cdot 2 = 0$$

$$S_{x_c} = F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2 = 16 \cdot 1 + 8 \cdot (-2) = 0$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

1.3.6. Проводим через центр тяжести центральные оси x_c, y_c , параллельные вспомогательным осям x^0, y^0



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

2. Вычисляем моменты инерции всего сечения относительно центральных осей x_c, y_c

Осевые моменты инерции

$$J_{xc} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 \cdot F_i)$$

$$J_{yc} = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 \cdot F_i)$$

$$\begin{aligned} J_{xc} &= (J_{x_1} + a_1^2 \cdot F_1) + (J_{x_2} + a_2^2 \cdot F_2) = \\ &= (85,333 + (1)^2 \cdot 16) + (2,667 + (-2)^2 \cdot 8) = 136 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{yc} &= (J_{y_1} + b_1^2 \cdot F_1) + (J_{y_2} + b_2^2 \cdot F_2) = \\ &= (5,333 + (-1)^2 \cdot 16) + (10,667 + (2)^2 \cdot 8) = 64 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

Осевые моменты инерции всегда принимают только положительное значение

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Центробежный момент инерции

$$\begin{aligned} J_{x_c y_c} &= \sum_{i=1}^n (J_{xy_i} + a_i \cdot b_i \cdot F_i) = \\ &= (J_{xy_1} + a_1 \cdot b_1 \cdot F_1) + (J_{xy_2} + a_2 \cdot b_2 \cdot F_2) = \\ &= (0 + 1 \cdot (-1) \cdot 16) + (0 + (-2) \cdot 2 \cdot 8) = -48 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

Центробежный момент инерции может принимать и
положительное и отрицательное значения

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

3. Определяем главные моменты инерции относительно центральных осей (J_1, J_2)

$$J_{1,2} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{y_c} - J_{x_c}}{2}\right)^2 + (J_{x_c y_c})^2}$$

$$J_{1,2} = \frac{136 + 64}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{64 - 136}{2}\right)^2 + (-48)^2} = 100 \pm 60$$

$$J_1 = 100 + 60 = 160 \text{ см}^4$$

$$J_2 = 100 - 60 = 40 \text{ см}^4$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

4. Определяем положение главных центральных осей (α_1, α_2)

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{1,2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_1} = \frac{-48}{64 - 160} = 0,5$$

$$\operatorname{arctg} \alpha_1 = \operatorname{arctg}(0,5) = 26,565^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_2} = \frac{-48}{64 - 40} = -2$$

$$\operatorname{arctg} \alpha_2 = \operatorname{arctg}(-2) = -63,435^\circ$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

5. Выполним необходимые проверки

5.1. Инвариантность моментов инерции

$$J_{x_c} + J_{y_c} = J_1 + J_2$$

$$136 + 64 = 160 + 40$$

$$200 = 200$$

5.2. Экстремальность моментов инерции

$$J_1 > J_{x_c} > J_{y_c} > J_2$$

$$160 >$$

$$136 >$$

$$64 >$$

$$40$$

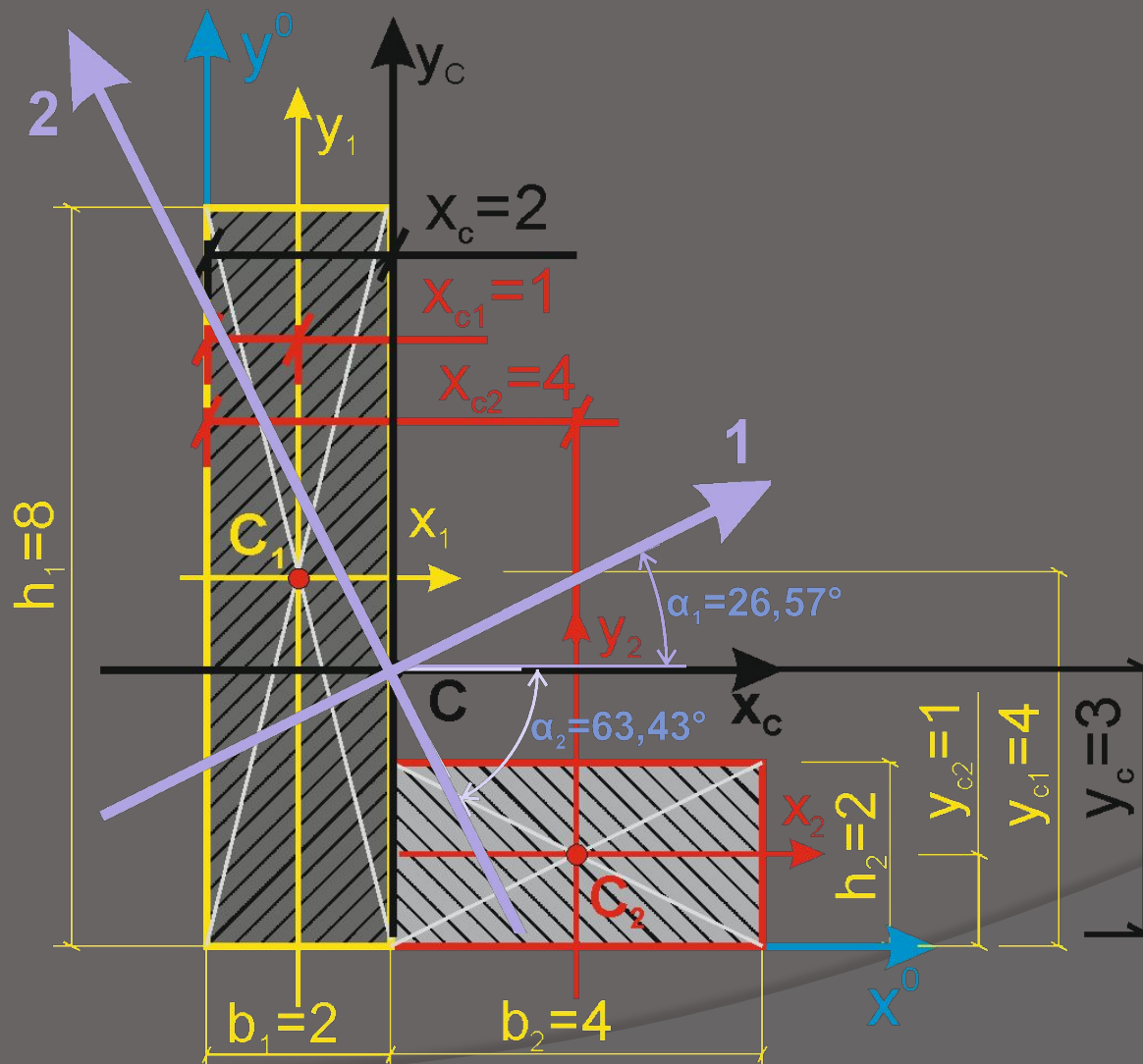
5.3. Перпендикулярность главных осей

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| = \pi/2$$

$$26,565^\circ + 63,435^\circ = 90^\circ$$

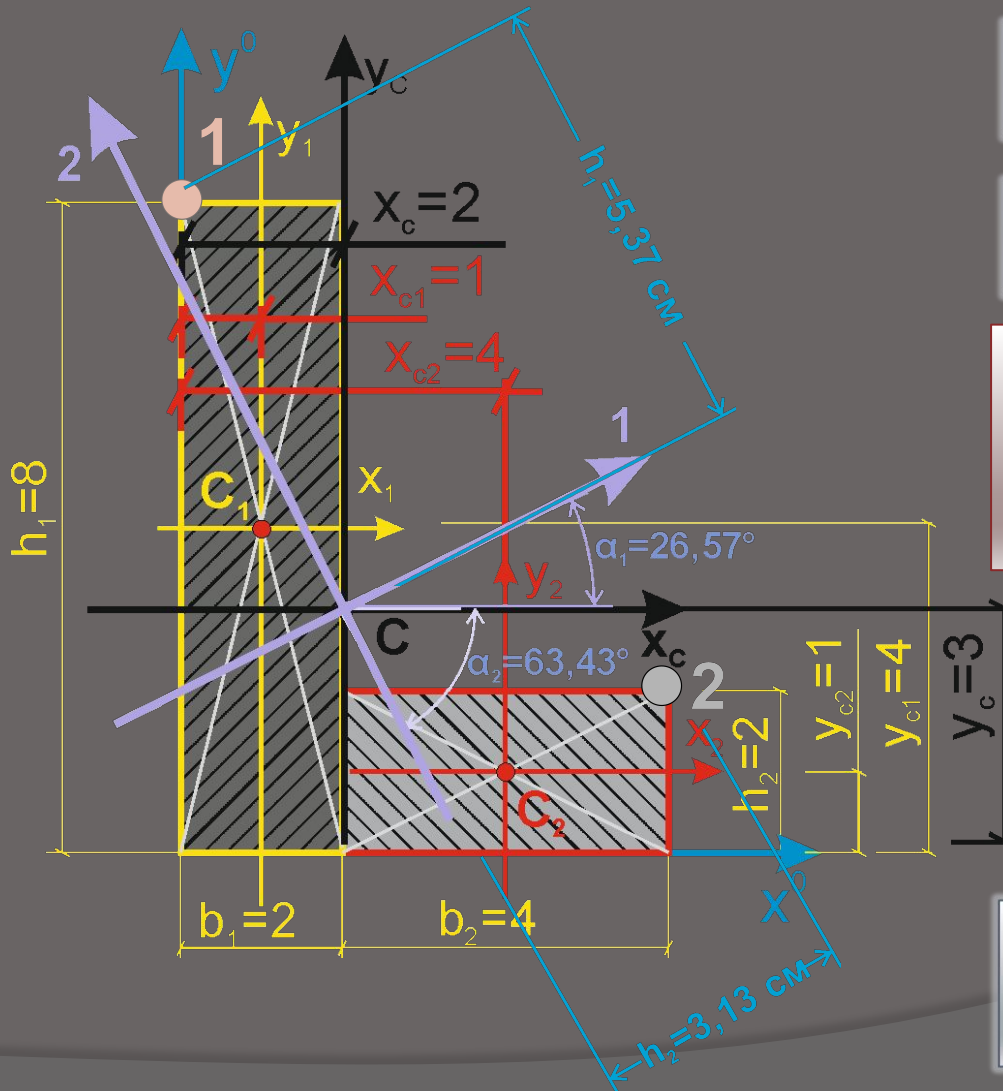
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

С помощью транспортира откладываем главные оси **1, 2**



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

6. Определим моменты сопротивления относительно главных центральных осей (1,2)



$$W_1 = \frac{J_1}{h_1} = \frac{160}{5,37} = 29,8 \text{ cm}^3$$

$$W_2 = \frac{J_2}{h_2} = \frac{40}{3,13} = 12,78 \text{ cm}^3$$

h_1 и h_2 – расстояния от наиболее удаленных от главных осей точек поперечного сечения, измеряем по чертежу или находим по формулам:

$$\begin{aligned} h_1 &= y_1 \cdot \cos \alpha_1 - x_1 \cdot \sin \alpha_1 = \\ &= 5 \cdot \cos(26,57^\circ) - (-2) \cdot \sin(26,57^\circ) = \\ &= 5 \cdot 0,8943 + 2 \cdot 0,4473 = 5,37 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2 &= y_2 \cdot \sin \alpha_1 + x_2 \cdot \cos \alpha_1 = \\ &= -1 \cdot \sin(26,57^\circ) + 4 \cdot \cos(26,57^\circ) = \\ &= -1 \cdot 0,4473 + 4 \cdot 0,8943 = 3,13 \text{ cm} \end{aligned}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

7. Определим радиусы инерции относительно главных центральных осей (1,2)

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}} = \sqrt{\frac{160}{16 + 8}} = 2,58 \text{ см}$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}} = \sqrt{\frac{40}{16 + 8}} = 1,29 \text{ см}$$