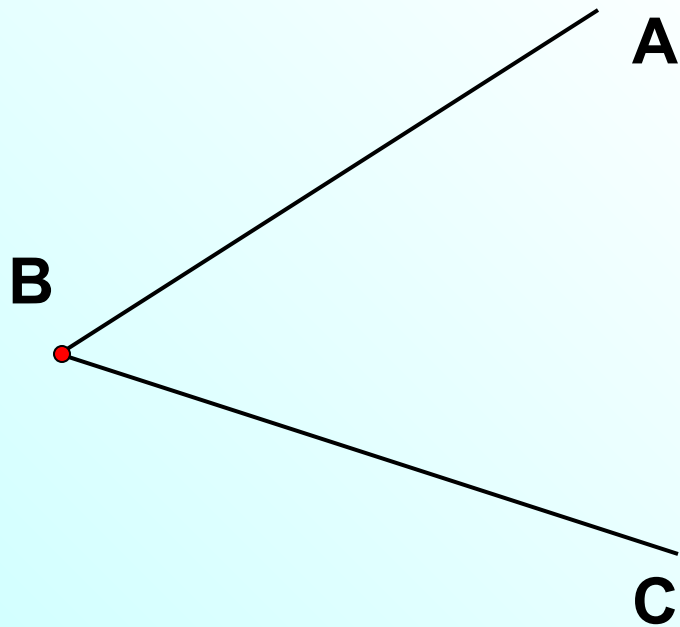


Л.С. Атанасян "Геометрия 10-11"

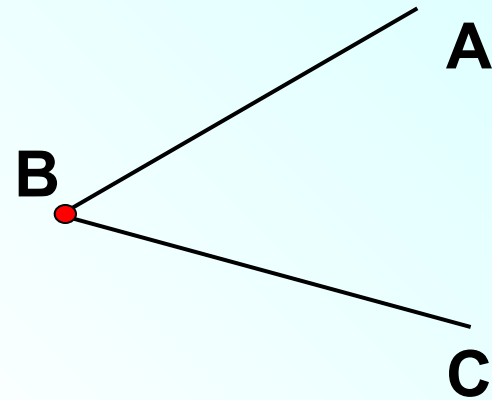
Двугранный угол

Планиметрия

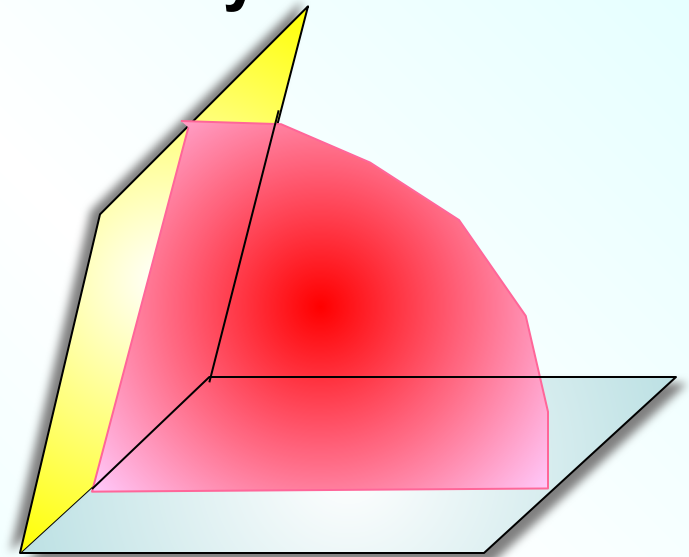
Углом на плоскости мы называем фигуру, образованную двумя лучами, исходящими из одной точки.



Стереометрия

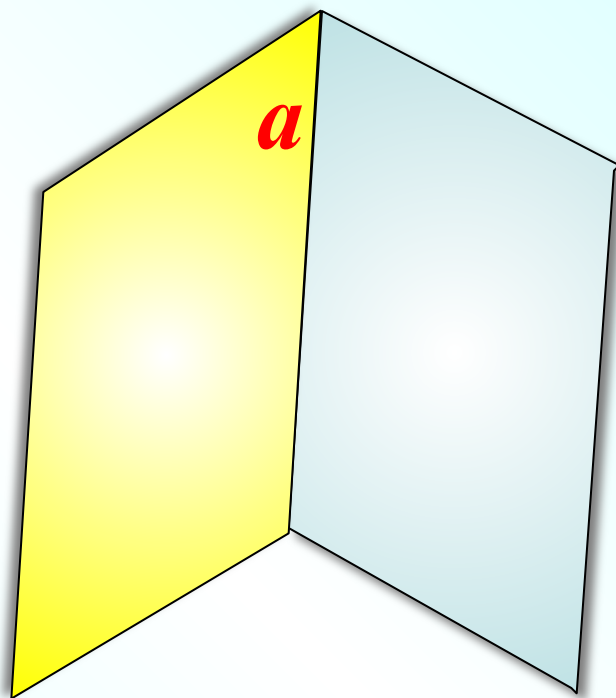


Двугранный угол



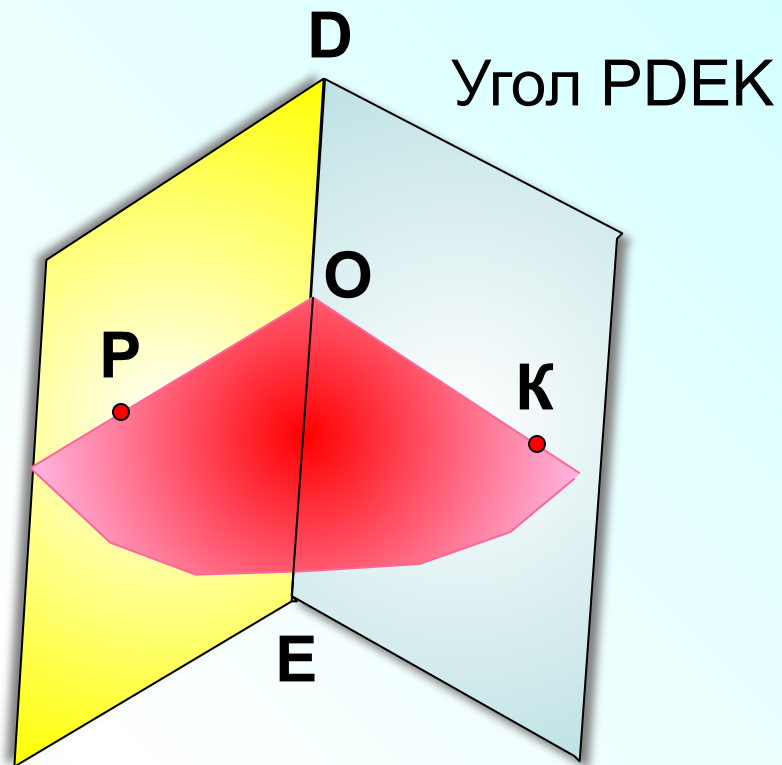
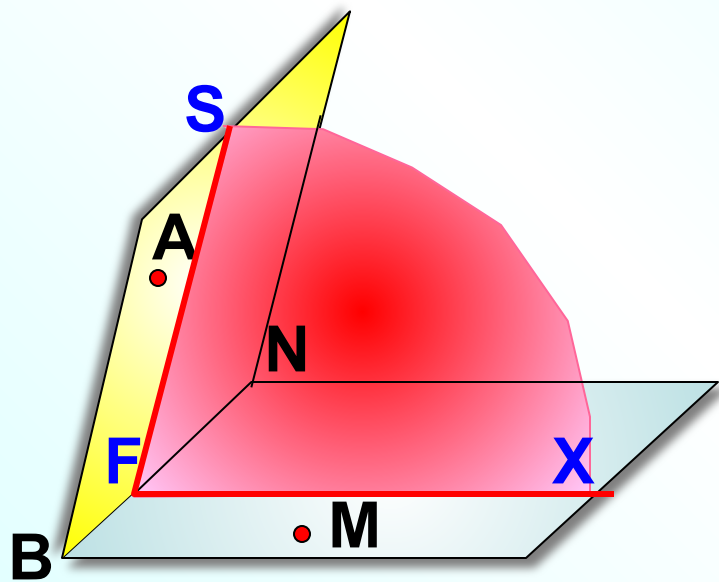
Двугранным углом называется фигура, образованная прямой *a* и двумя полуплоскостями с общей границей *a*, не принадлежащими одной плоскости.

Прямая *a* — ребро двугранного угла



Две полуплоскости — грани двугранного угла

Двугранный угол $ABNM$, где BN – ребро, точки A и M лежат в гранях двугранного угла

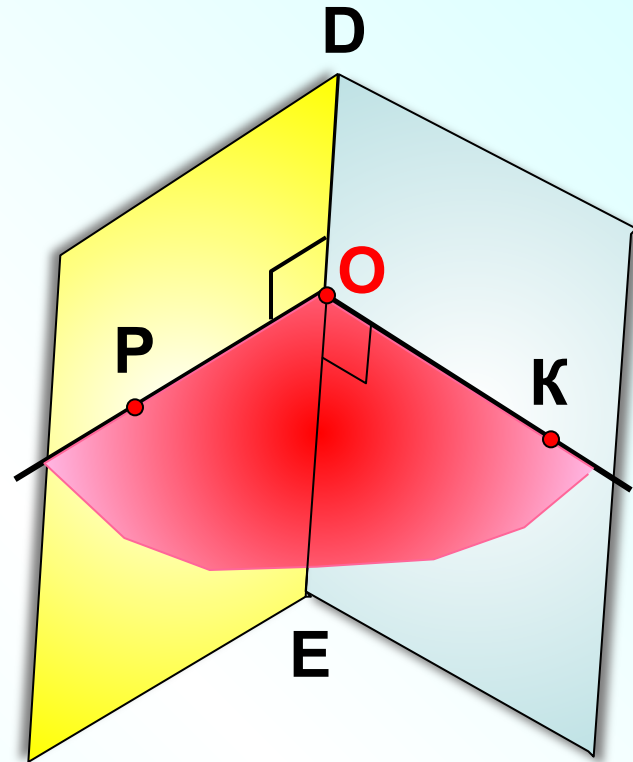


Угол SFX – линейный угол двугранного угла

Алгоритм построения линейного угла.

Угол POK – линейный угол двугранного угла $PDEK$.

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.



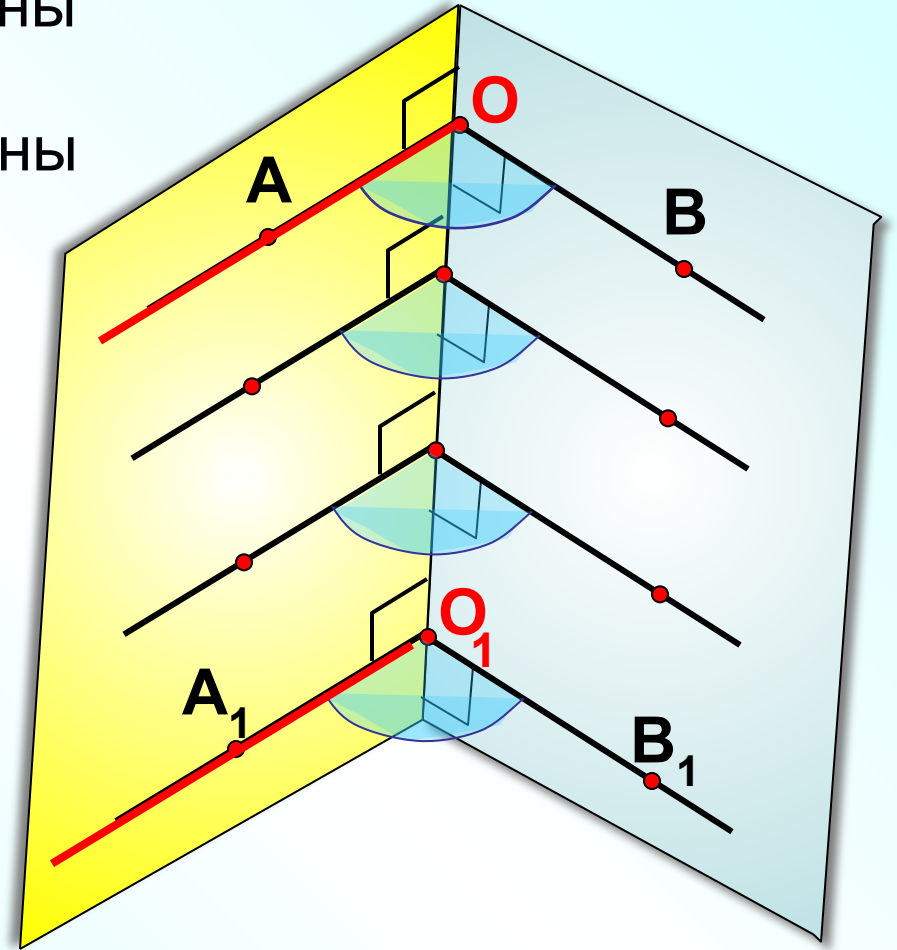
Плоскость линейного угла $(POK) \perp DE$

Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

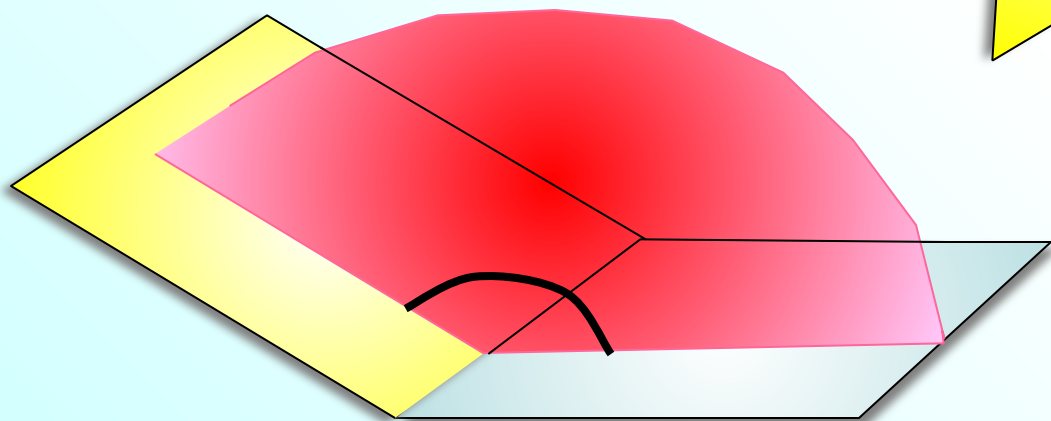
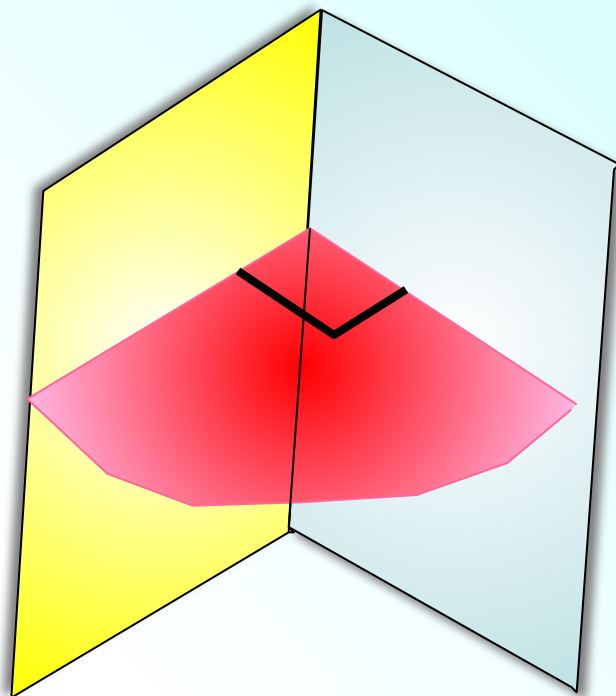
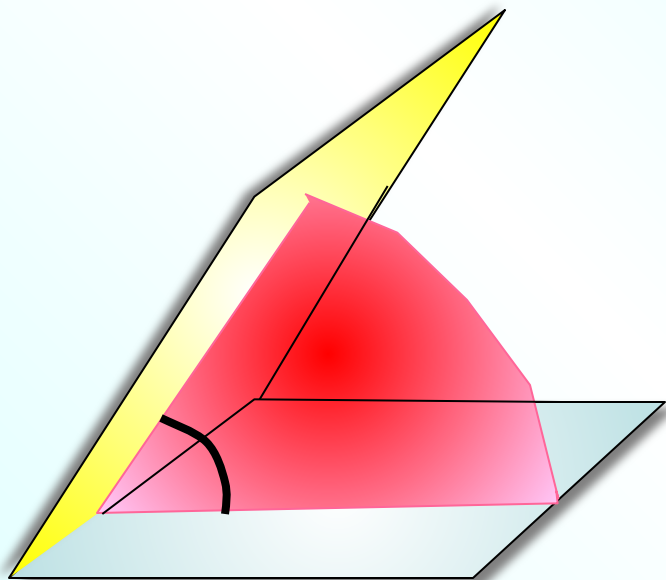
Лучи OA и O_1A_1 – сонаправлены

Лучи OB и O_1B_1 – сонаправлены

Углы AOB и $A_1O_1B_1$ равны,
как углы с сонаправленными
сторонами

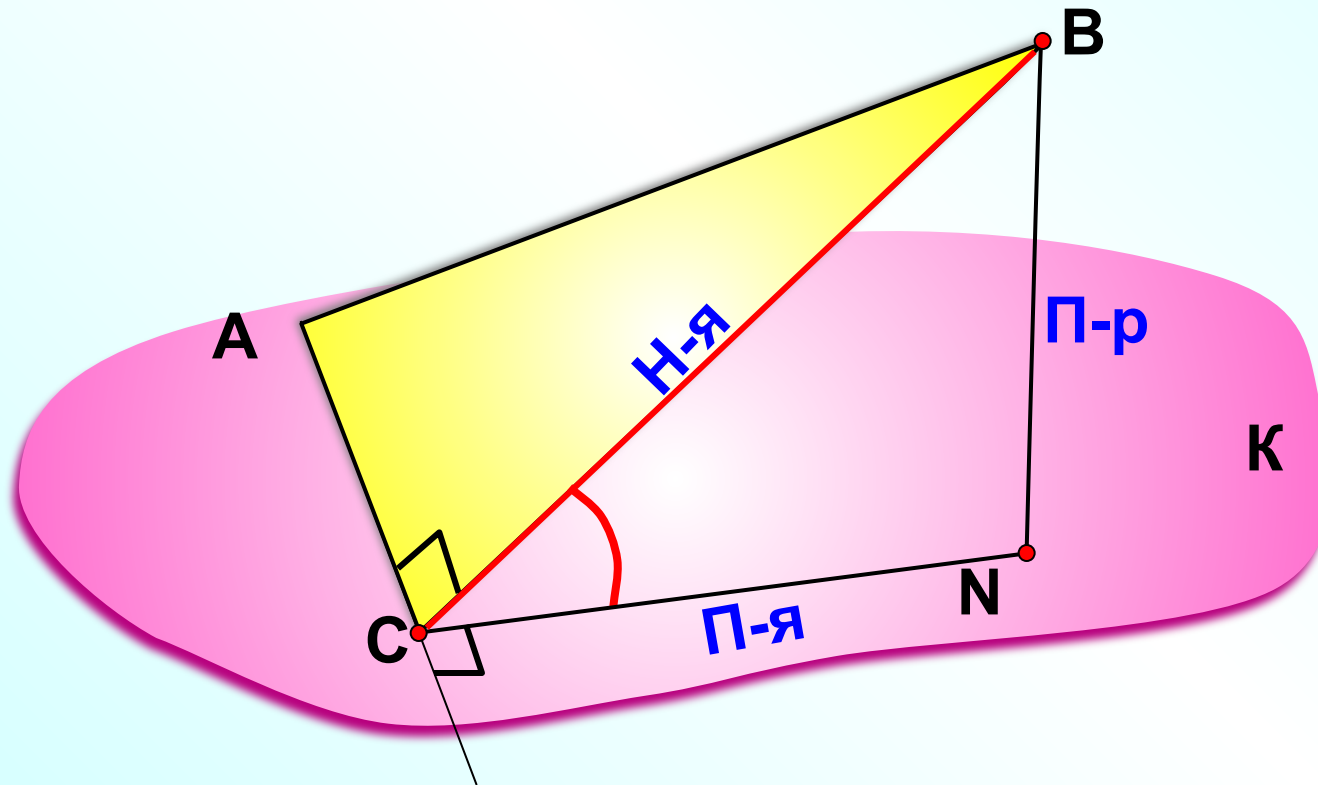


Двугранный угол может быть прямым, острым, тупым



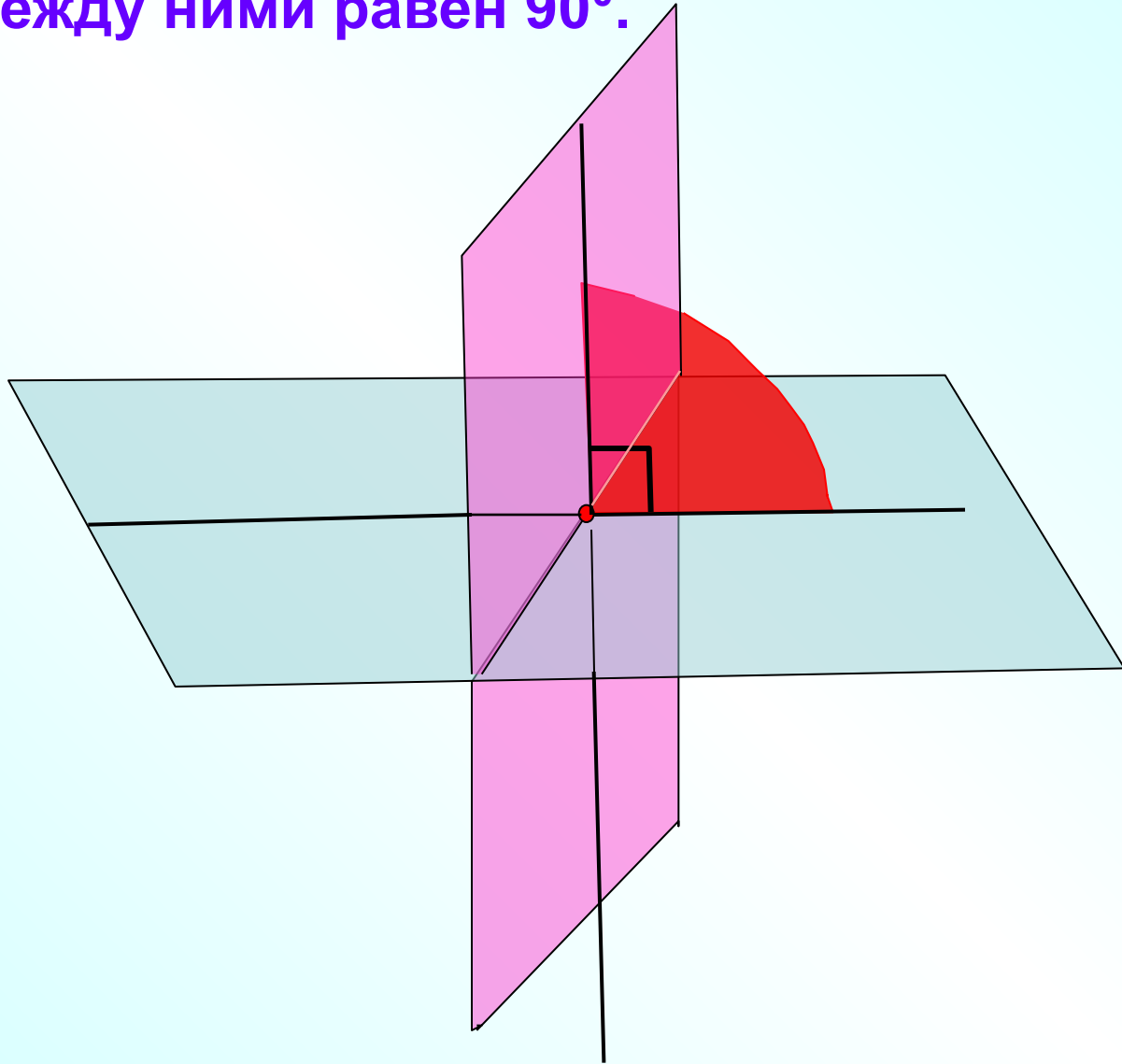
Построить линейный угол двугранного угла ВАСК.
Треугольник АВС – прямоугольный.

$$\underset{\text{Н-я}}{AC \perp BC} \xRightarrow{\text{ТПП}} \underset{\text{П-я}}{AC \perp NC}$$



Угол ВСN – линейный угол двугранного угла ВАСК

Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90° .

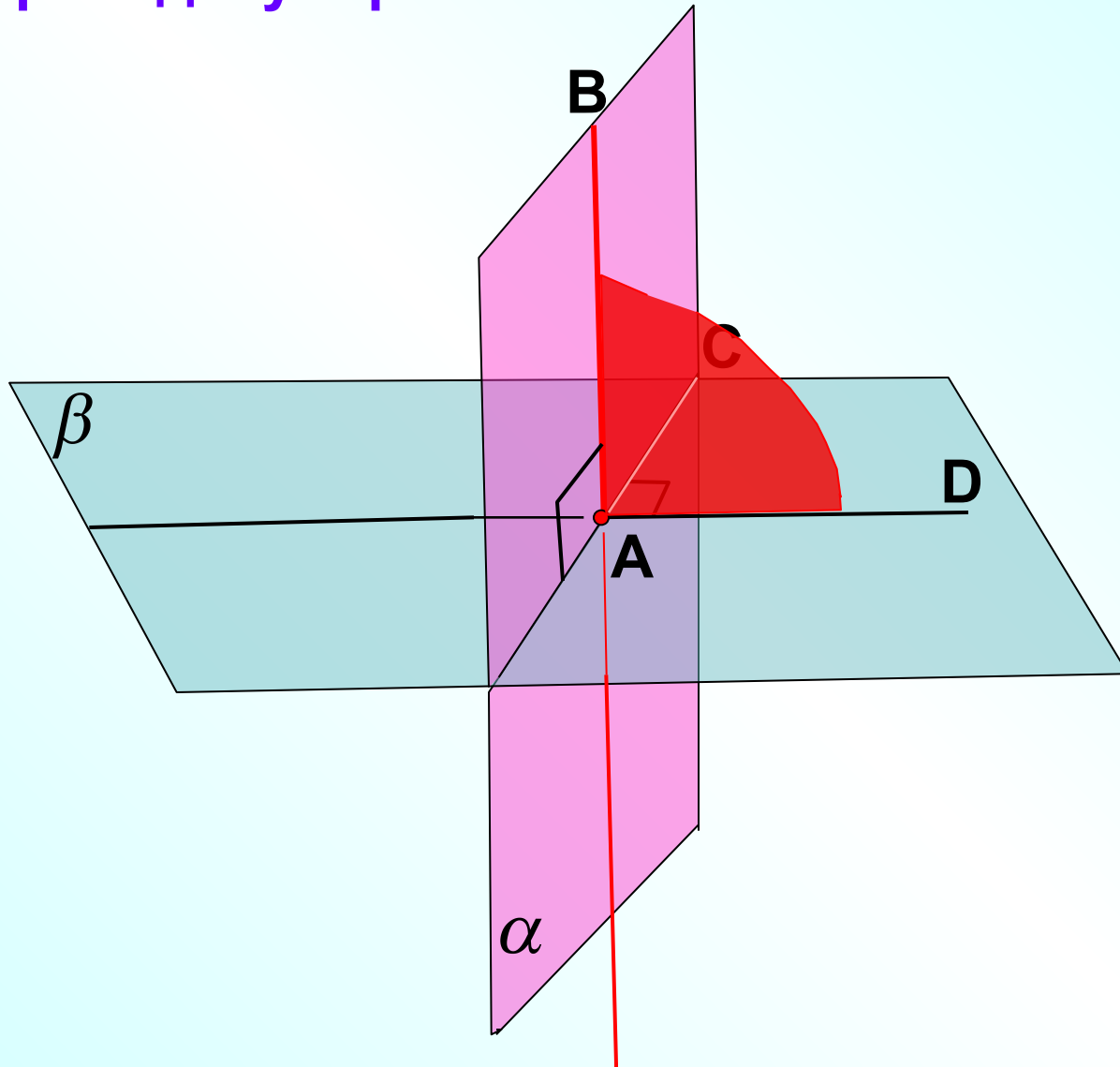




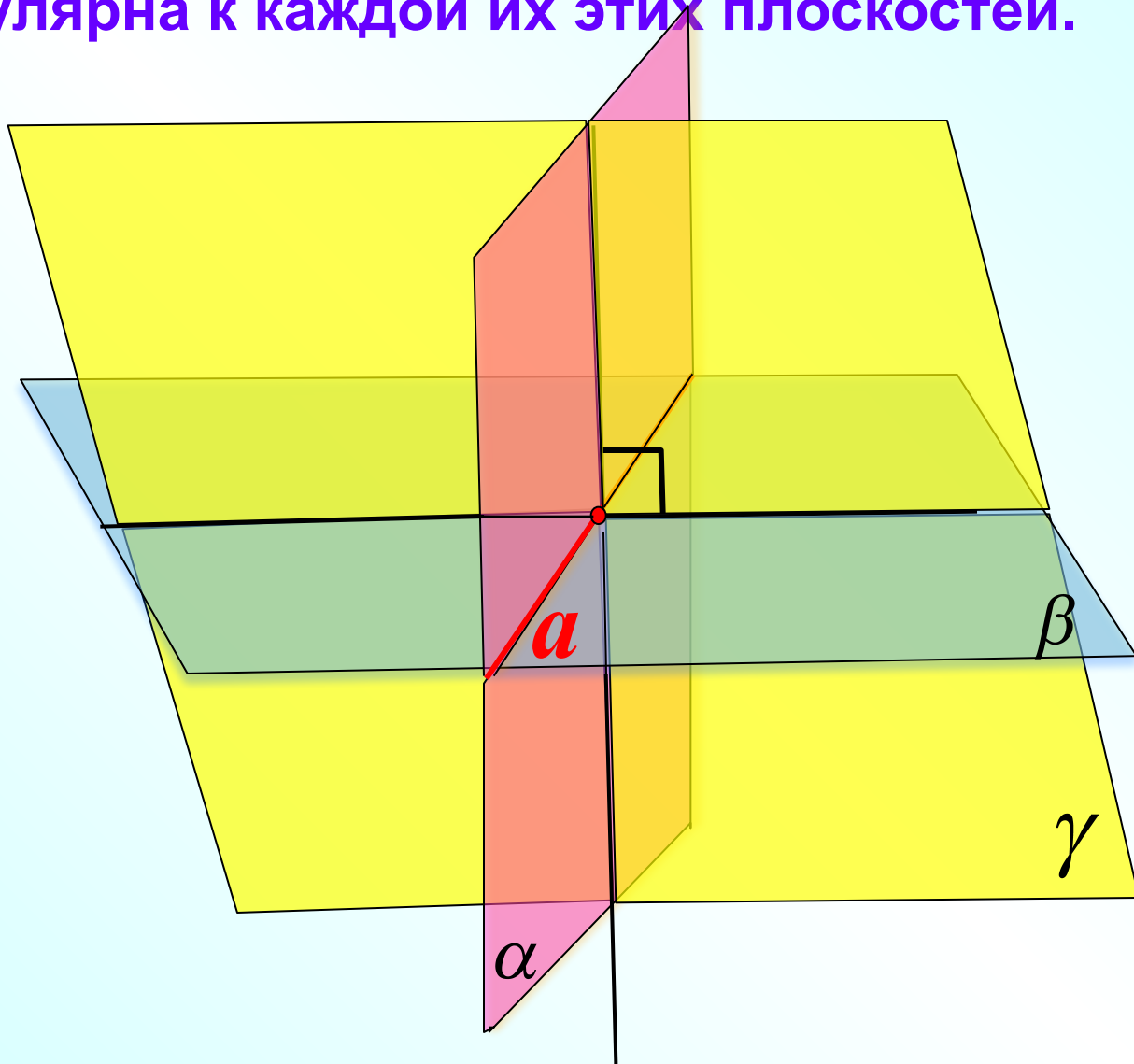
Примером взаимно перпендикулярных плоскостей служат плоскости стены и пола комнаты, плоскости стены и потолка.

Признак перпендикулярности двух плоскостей.

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

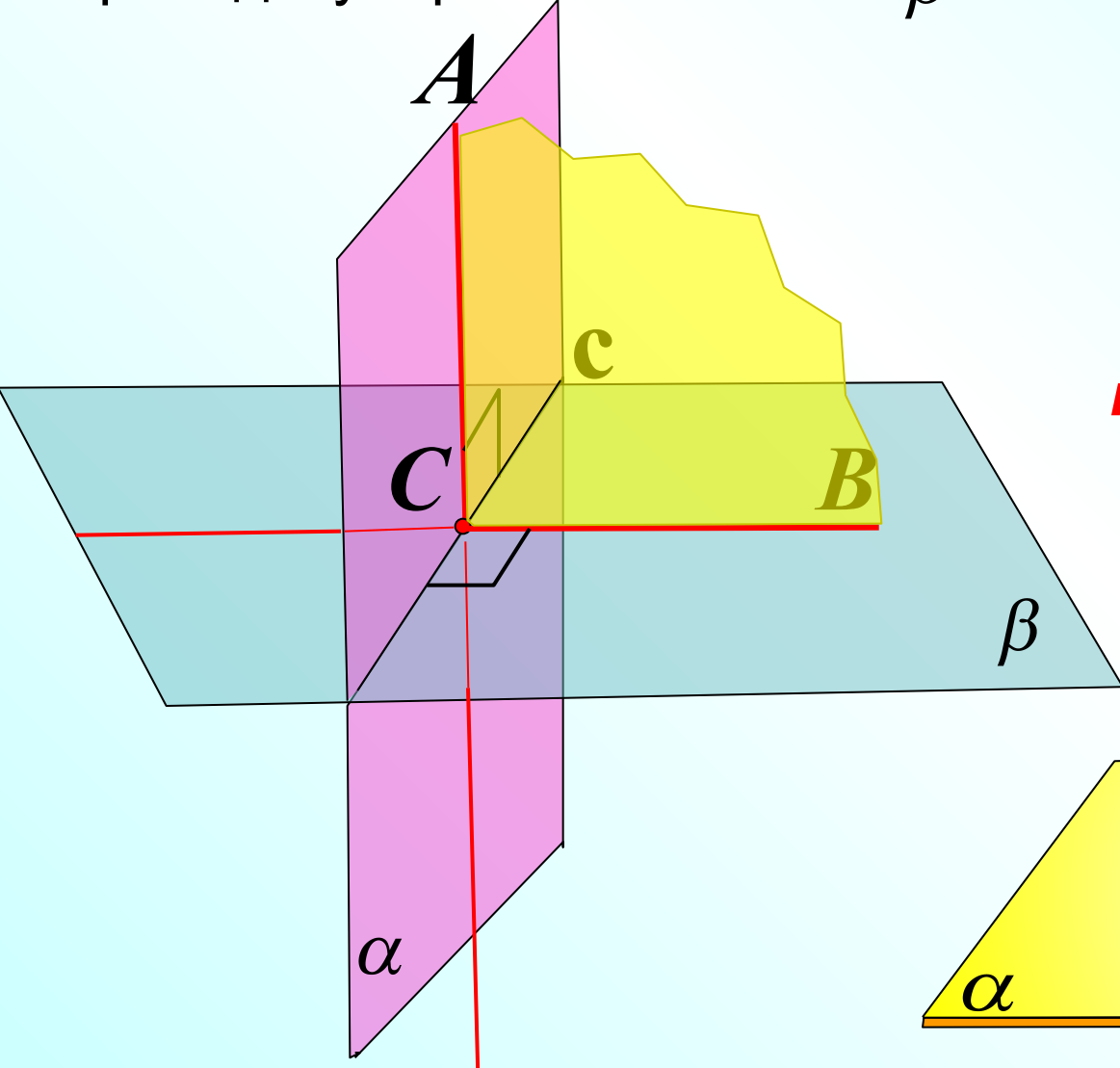


Следствие. Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

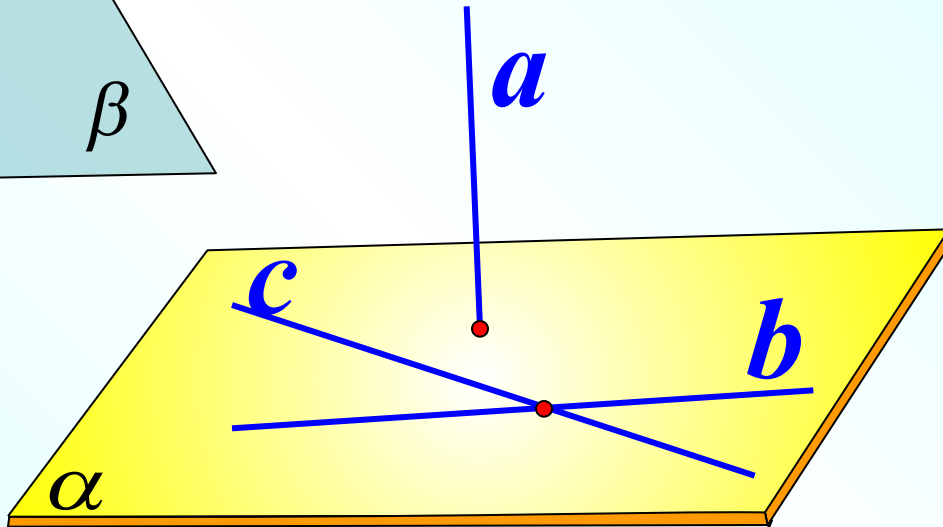


№ 178. Плоскости α и β взаимно перпендикулярны пересекаются по прямой c . Докажите, что любая прямая плоскости α , перпендикулярная к прямой c , перпендикулярна к плоскости β .

Подсказка

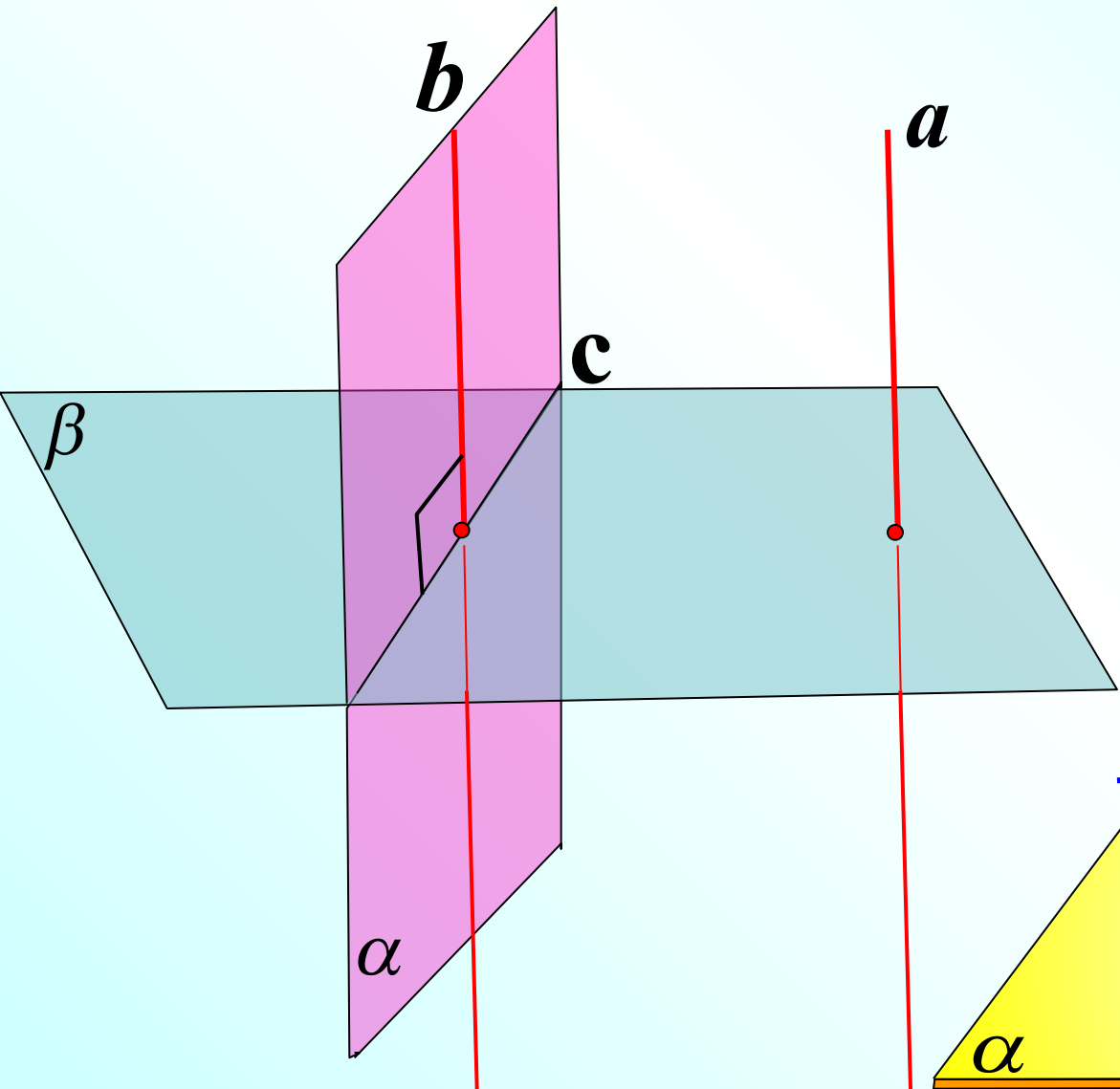


Признак перпендикулярности прямой и плоскости

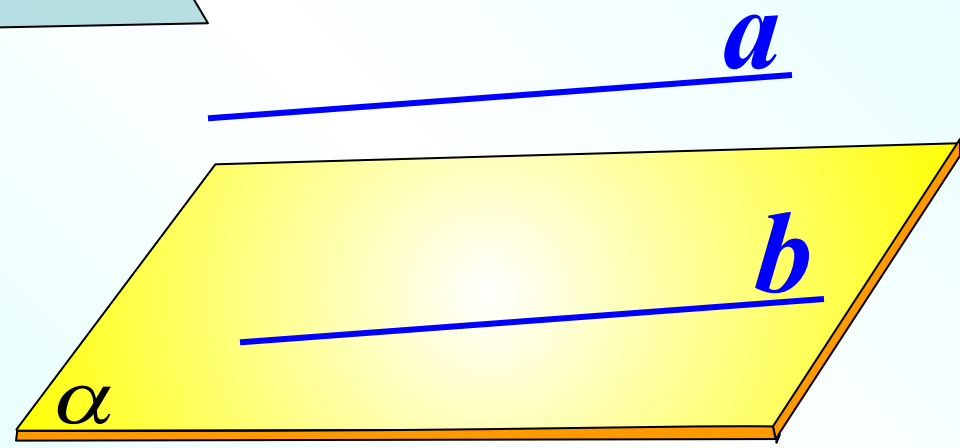


№ 180. Докажите, что плоскость и не лежащая в ней прямая, перпендикулярные к одной и той же плоскости, параллельны.

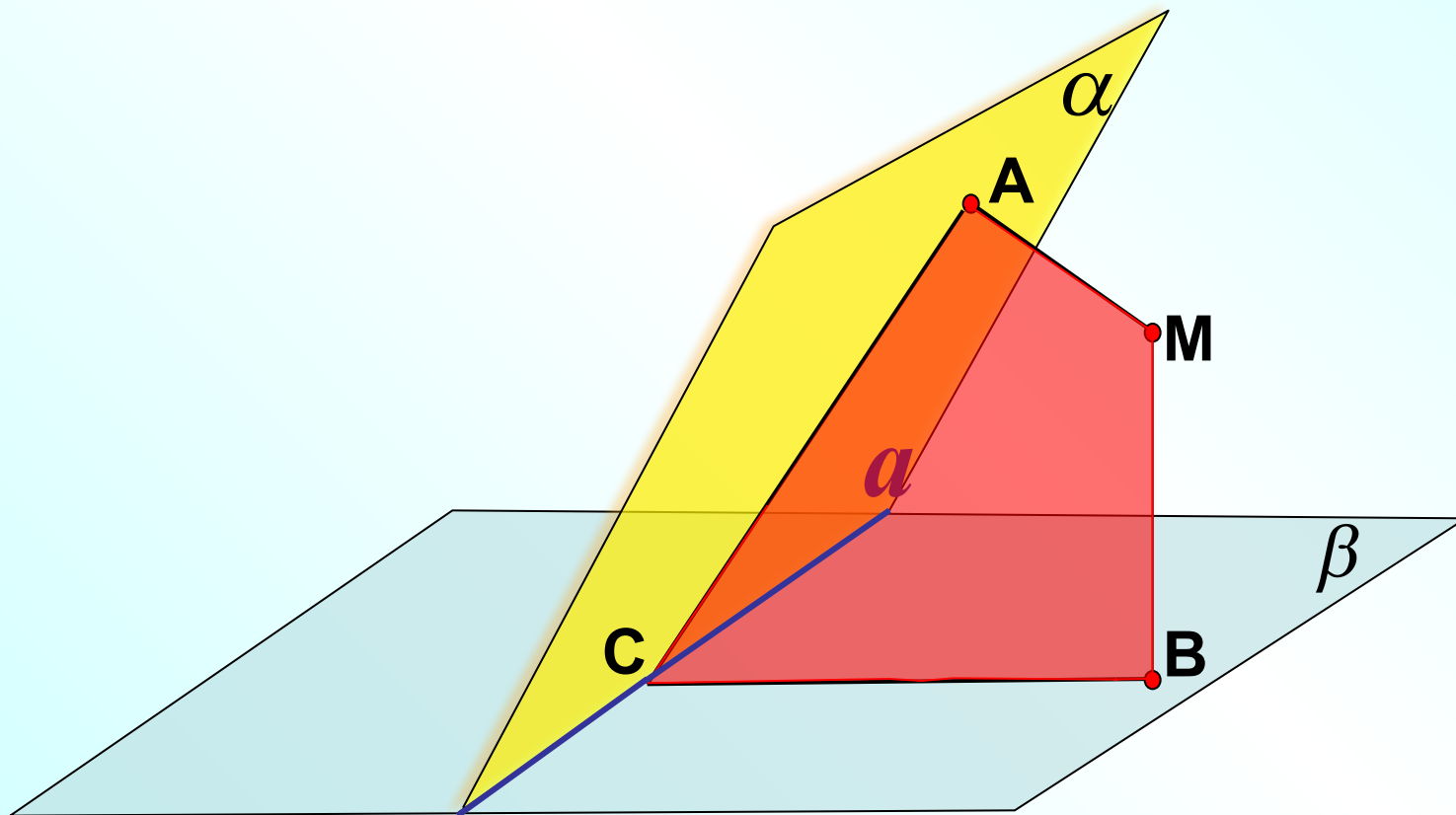
Подсказка



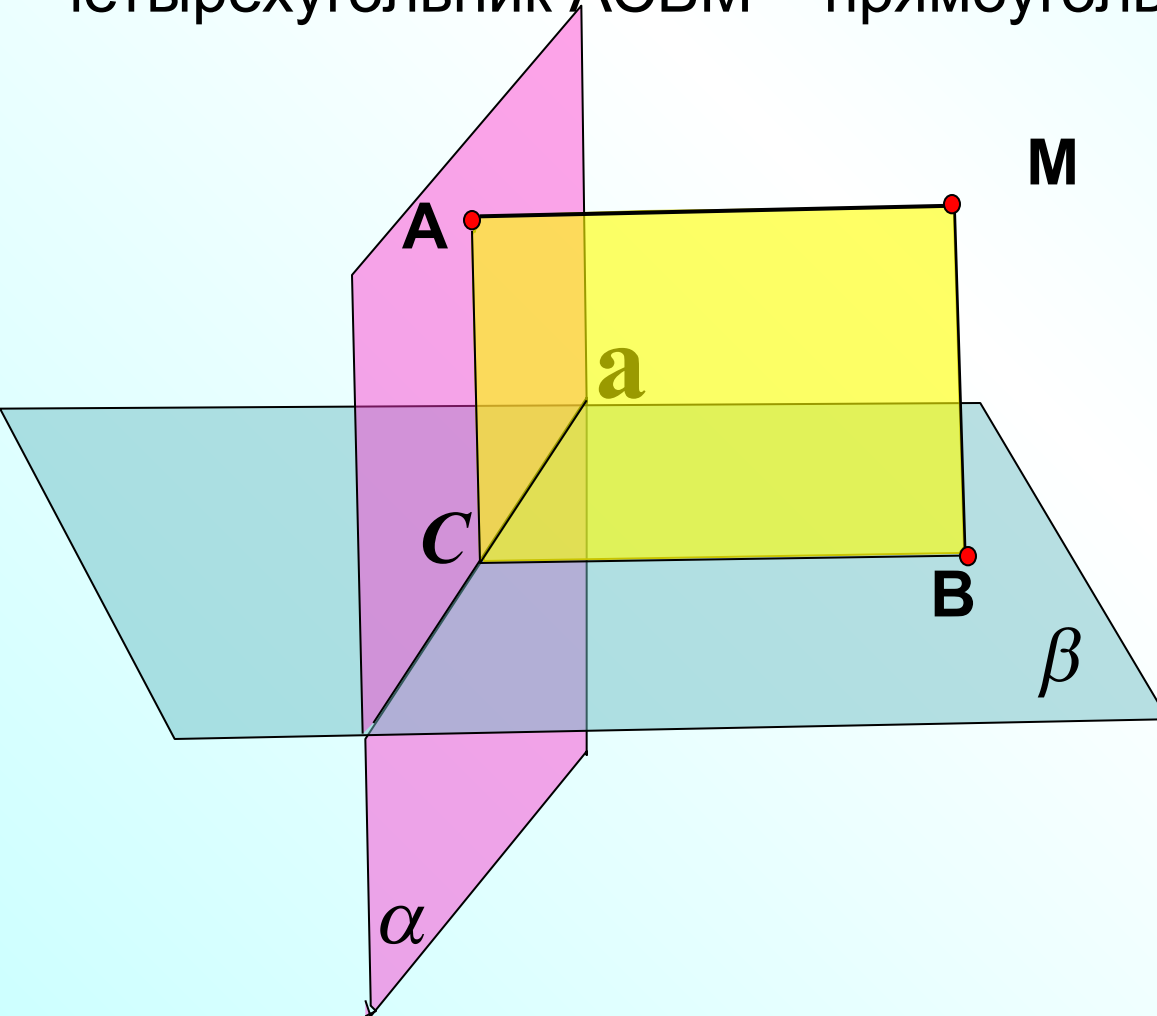
*Признак
параллельности
прямой и
плоскости*



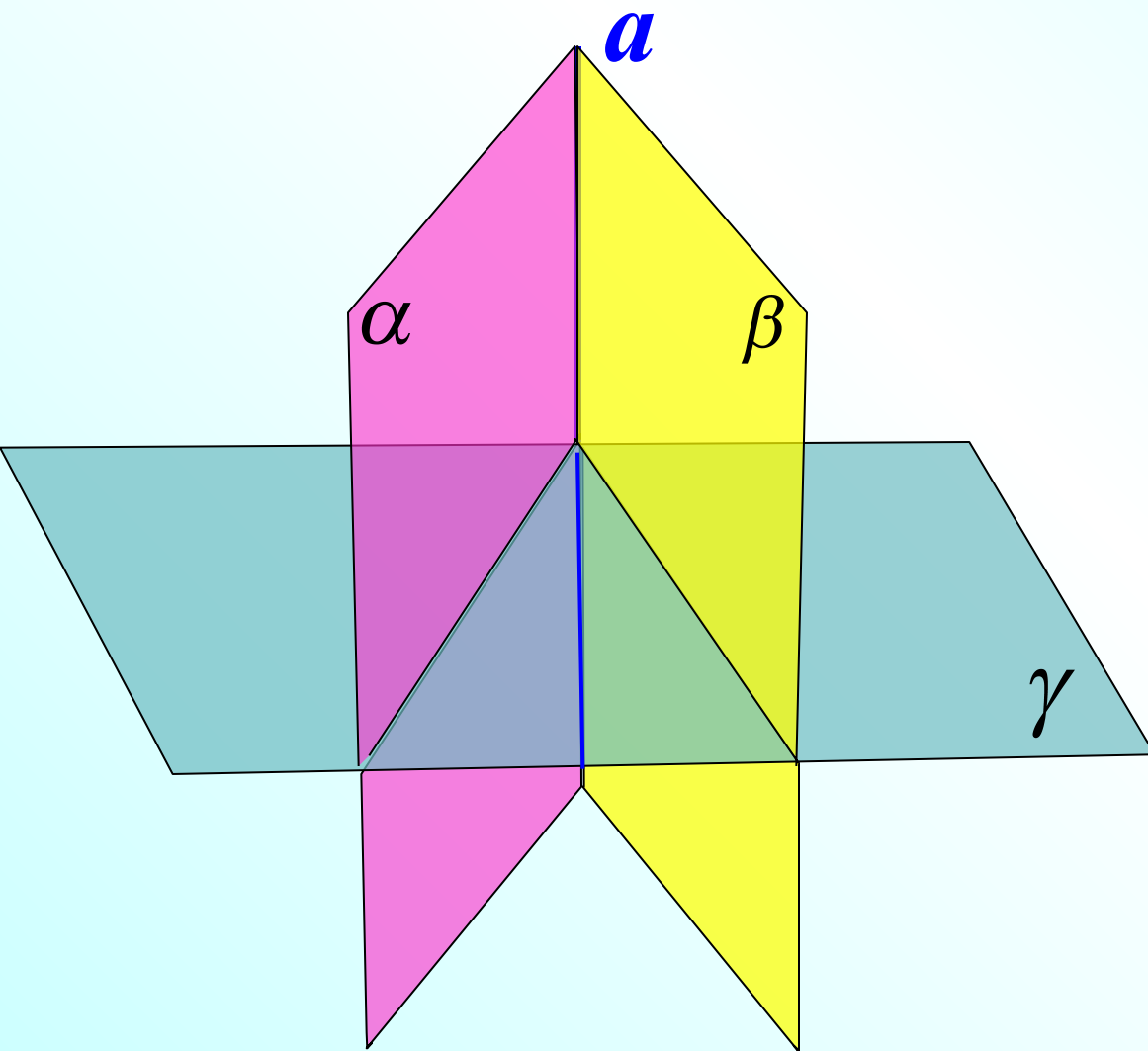
№ 181. Плоскости α и β пересекаются по прямой a . Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB соответственно к плоскостям α и β . Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C . Докажите, что $MC \perp a$.



№ 182. Плоскости α и β взаимно перпендикулярны пересекаются по прямой a . Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB к этим плоскостям. Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C . Докажите, что четырехугольник $ACBM$ – прямоугольник.

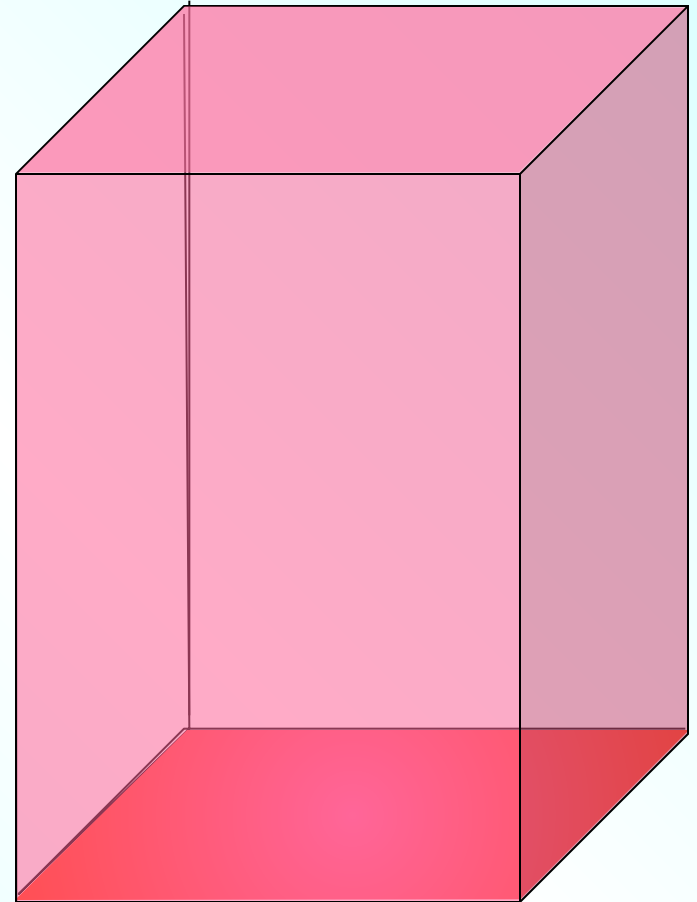
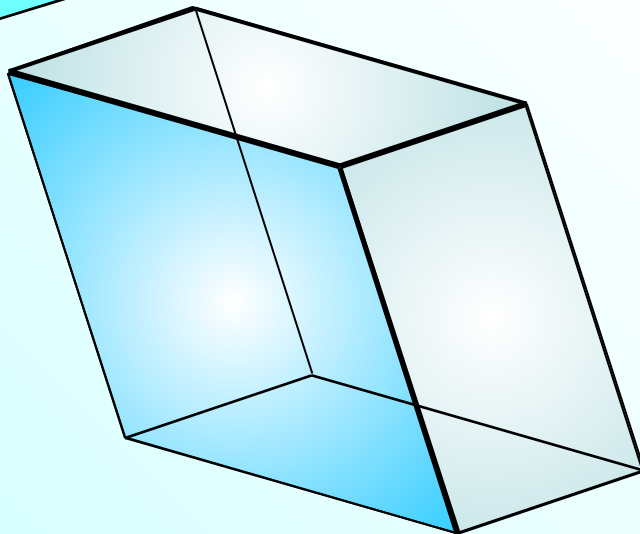
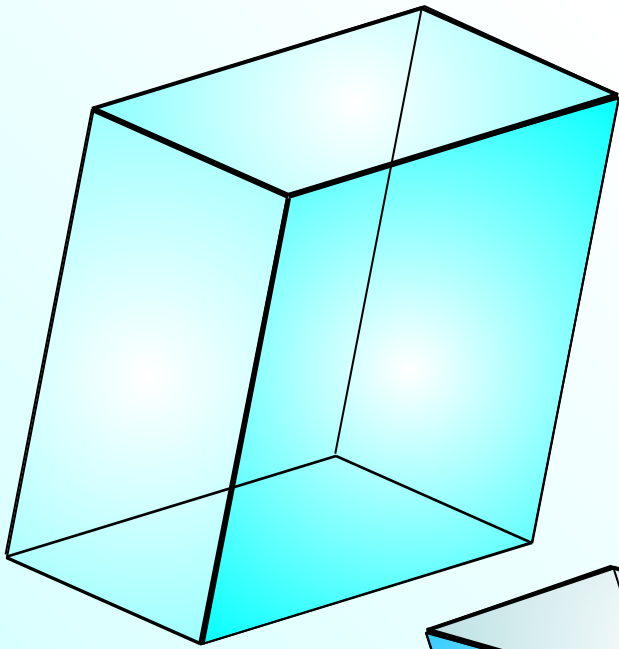


№ 183. Плоскости α и β пересекаются по прямой a и перпендикулярны к плоскости γ . Докажите, что прямая a перпендикулярна к плоскости γ .

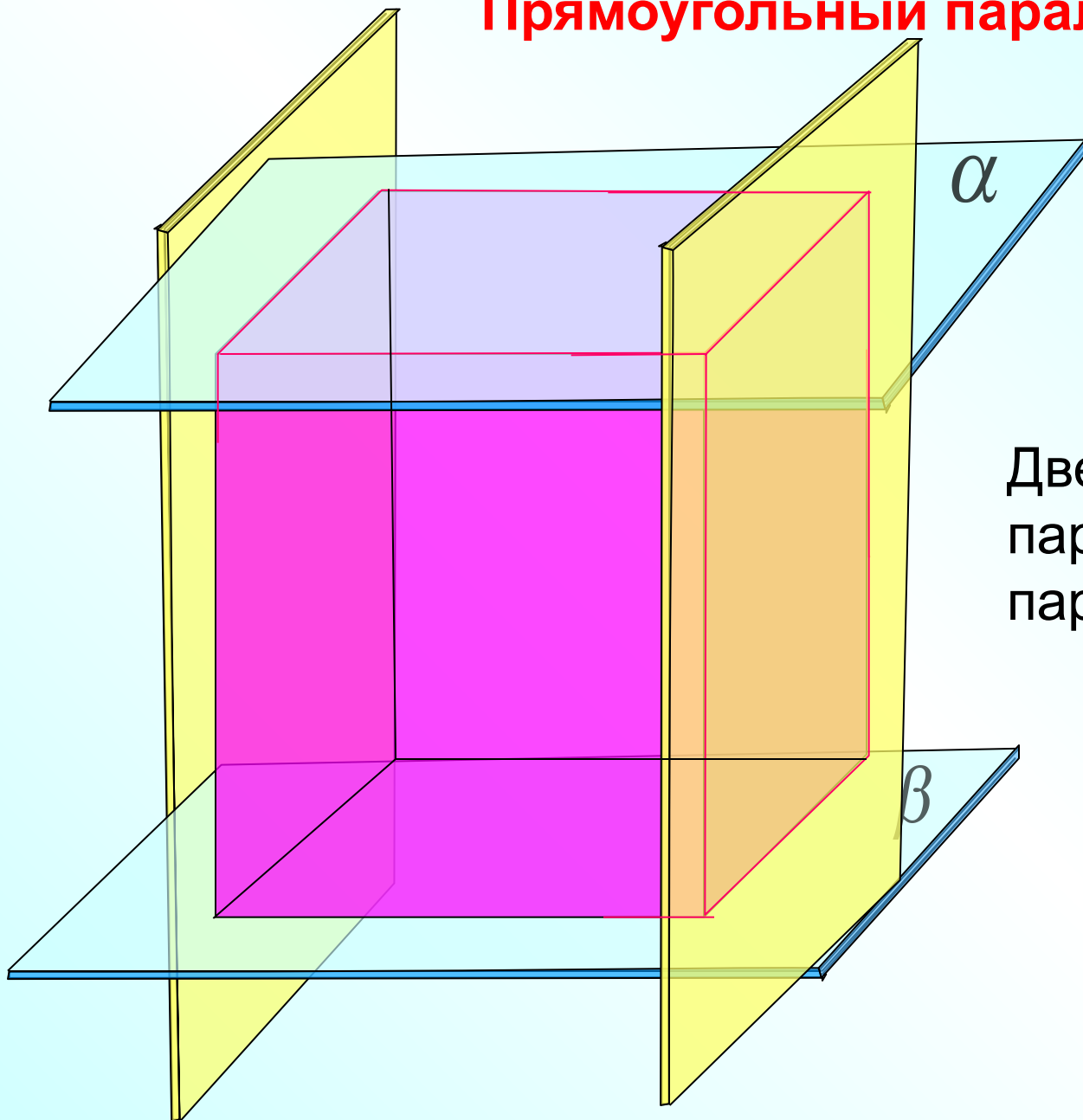


Прямоугольный параллелепипед

Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники.



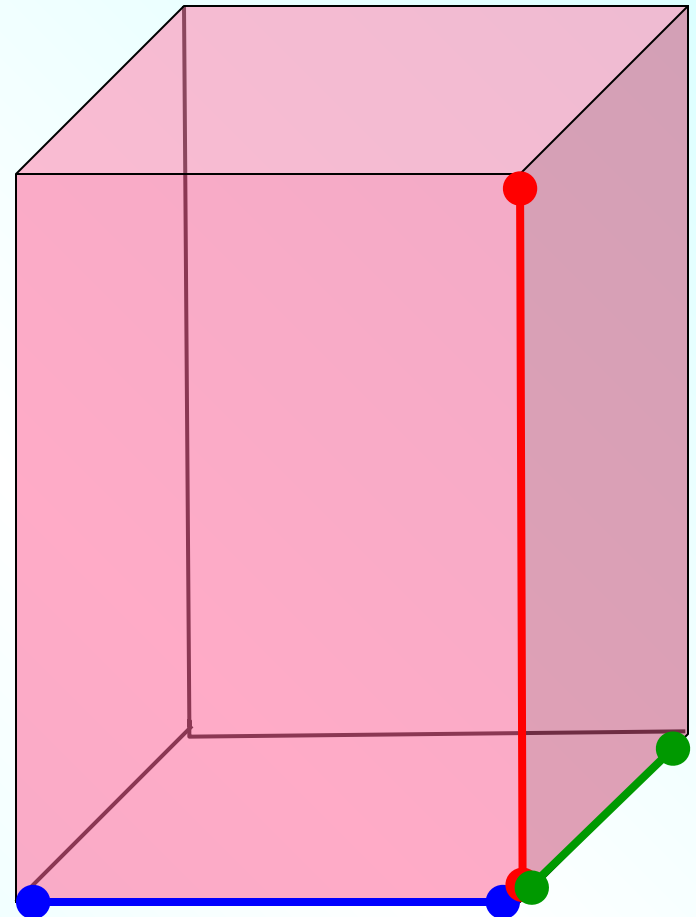
Прямоугольный параллелепипед



Две грани
параллелепипеда
параллельны.

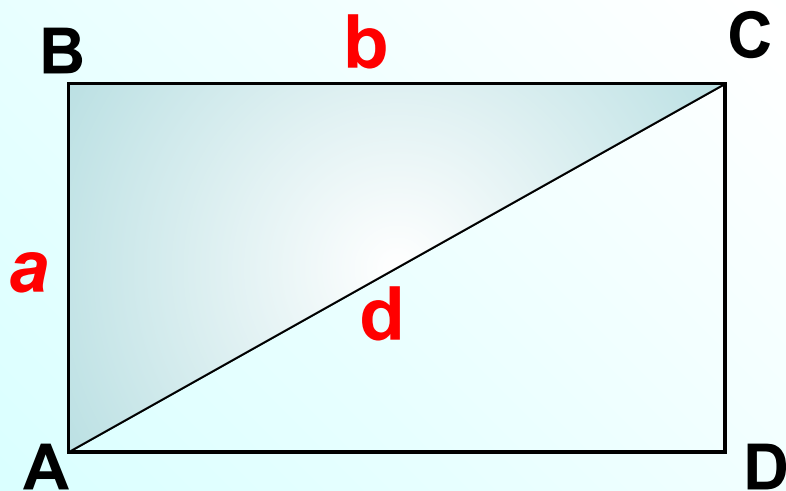
- 1⁰. В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней – прямоугольники.
- 2⁰. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые.

Длины трех ребер, имеющих общую вершину, называются измерениями прямоугольного параллелепипеда.



Планиметрия

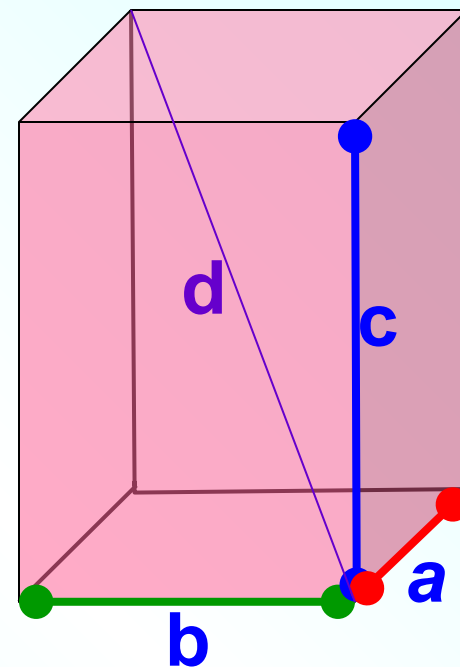
В прямоугольнике квадрат диагонали равен сумме квадратов двух его измерений.



$$d^2 = a^2 + b^2$$

Стереометрия

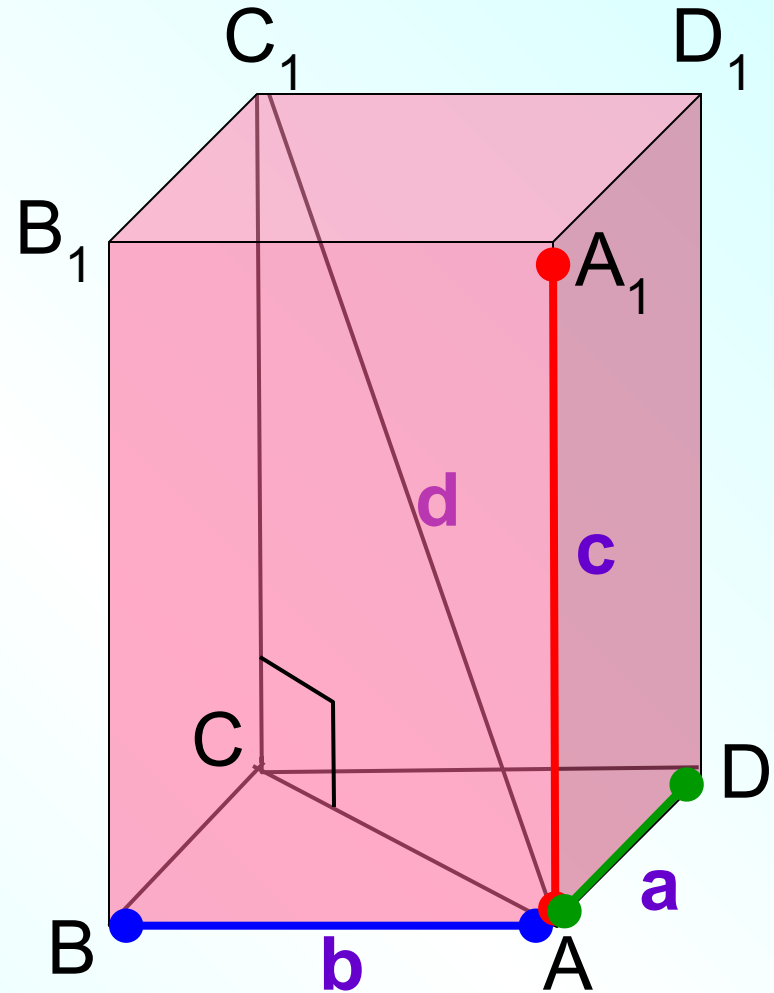
Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.



$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

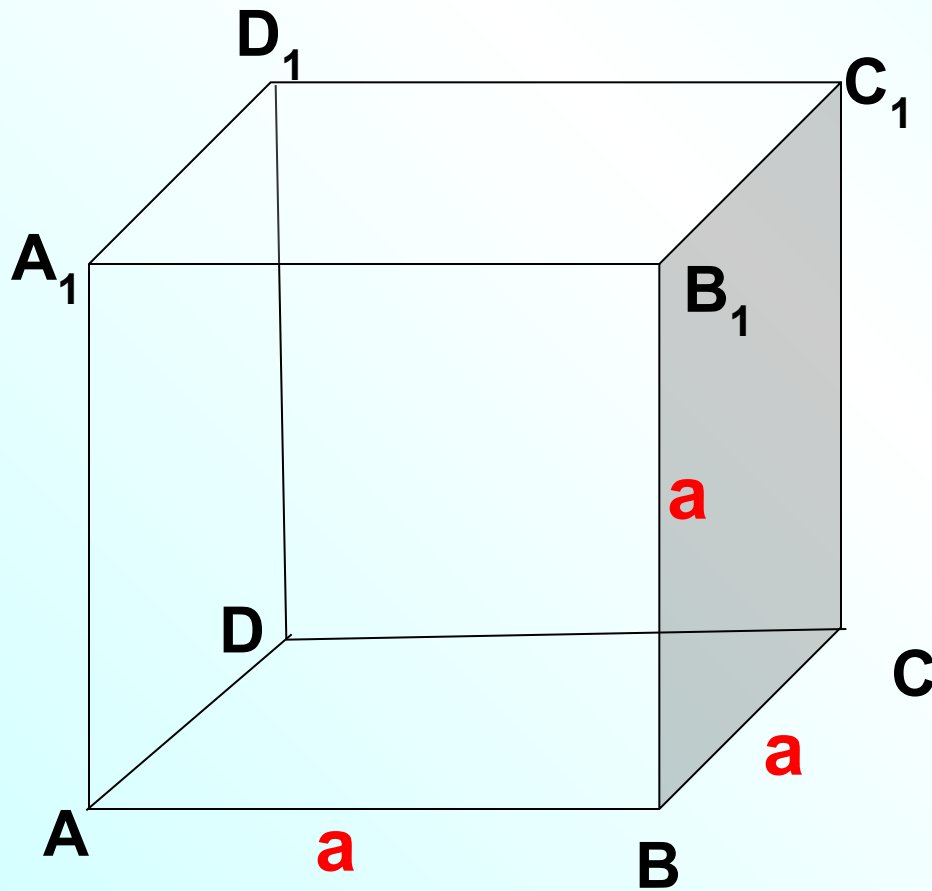
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



Следствие.

Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

№ 188. Ребро куба равно **a**. Найдите диагональ куба.



$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

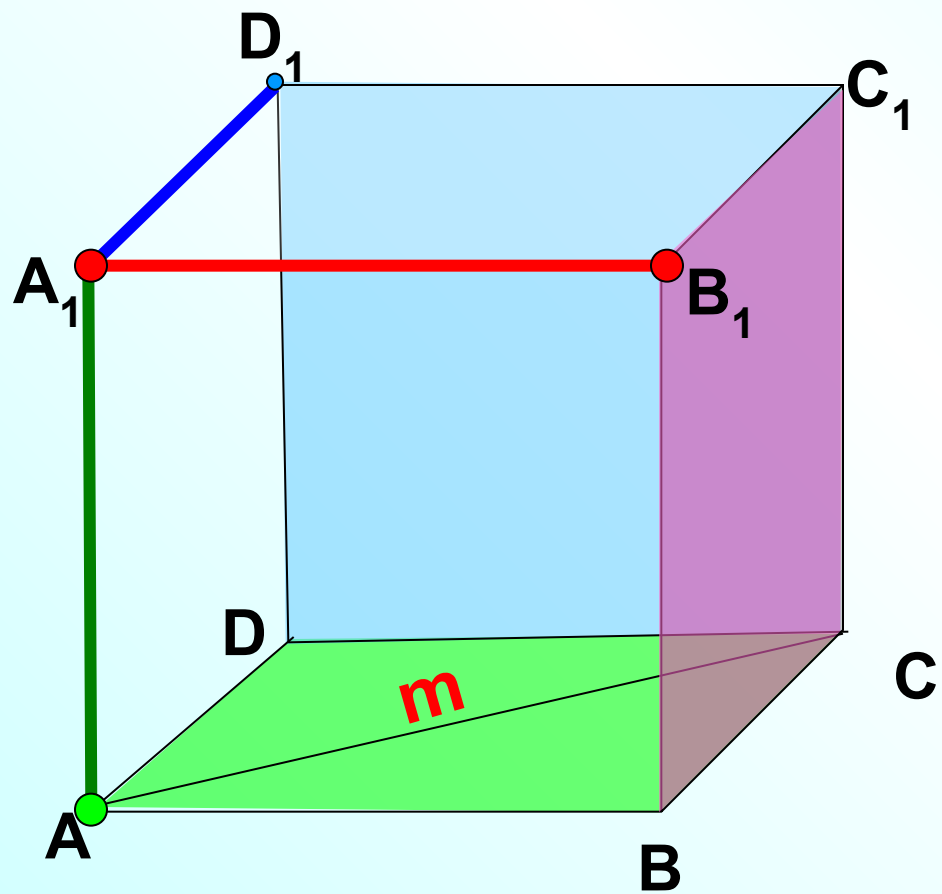
$$d^2 = 3a^2$$

$$d = \sqrt{3a^2}$$

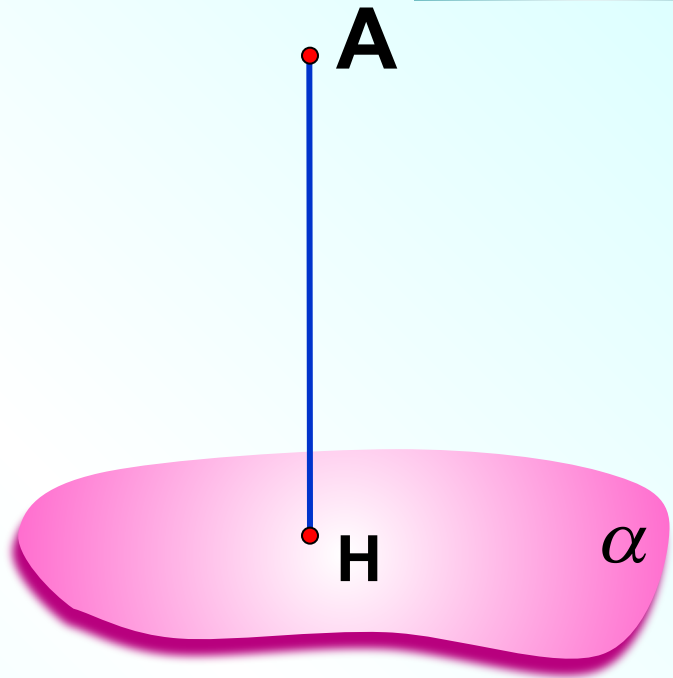
$$d = |a| \sqrt{3}$$

$$d = a\sqrt{3}$$

№ 189. Найдите расстояние от вершины куба до плоскости любой грани, в которой не лежит эта вершина, если:
 а) диагональ грани куба равна m .
 б) диагональ куба равна d .

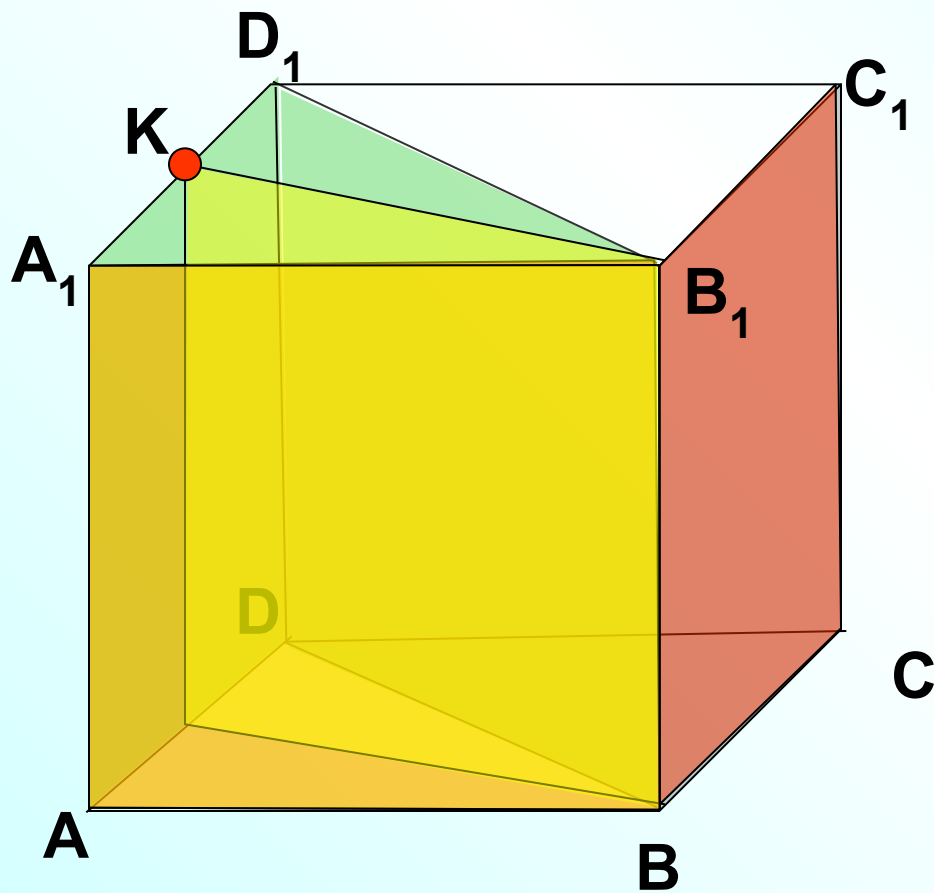


Подсказка

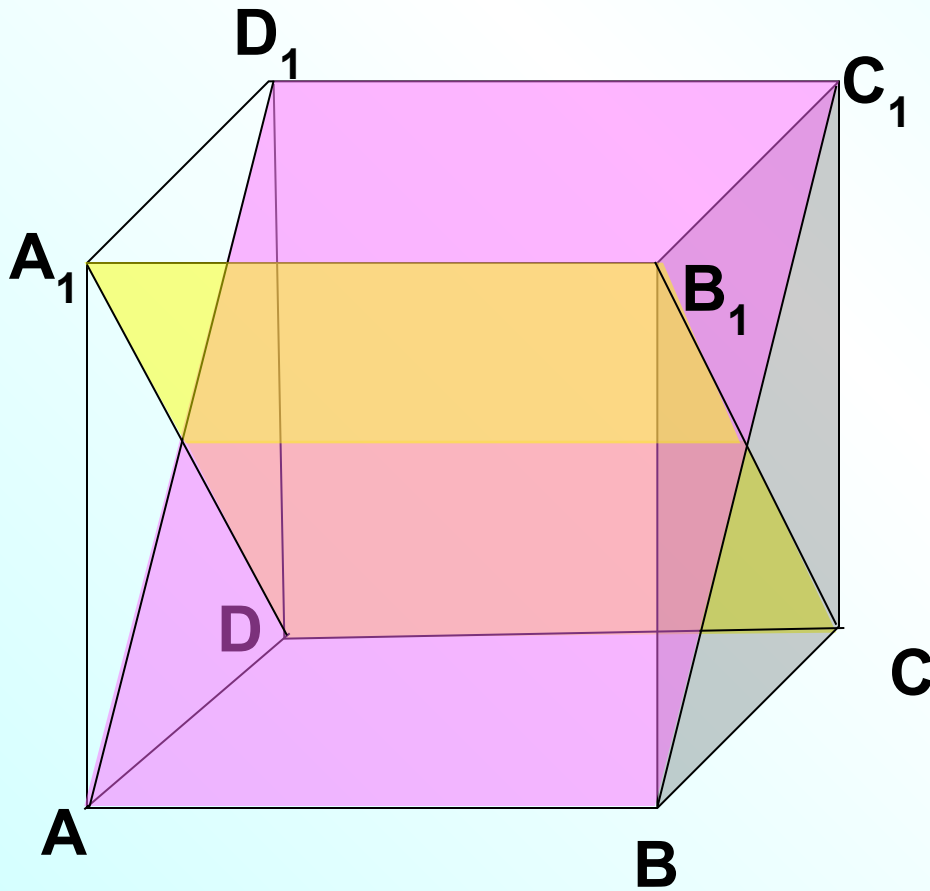


Расстояние от точки до плоскости – длина перпендикуляра

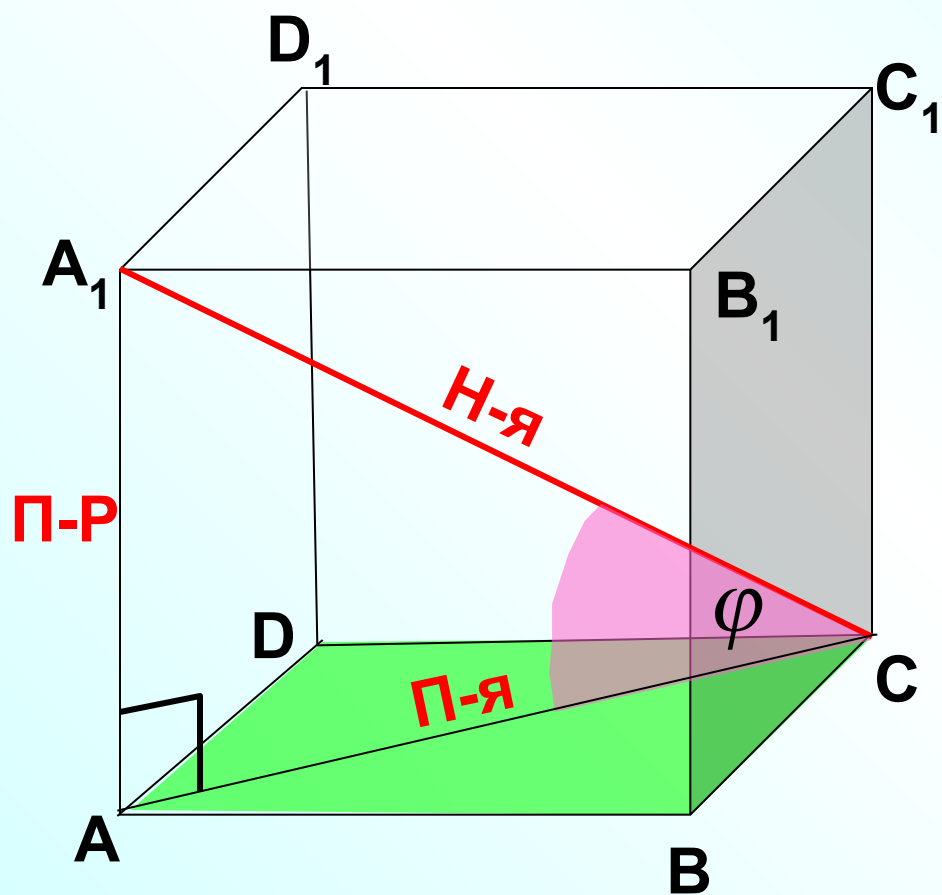
№ 190. Дан куб. Найдите следующие двугранные углы:
а) ABB_1C ; б) ADD_1B ; в) A_1BB_1K , где K – середина ребра A_1D_1 .



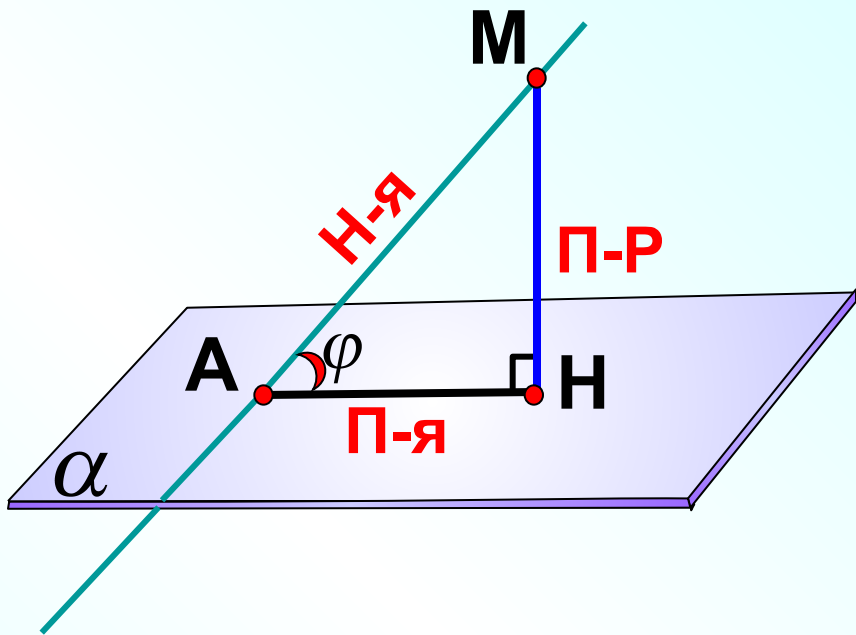
№ 191. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что плоскости ABC_1 и $A_1 B_1 D$ перпендикулярны.



№ 192. Найдите тангенс угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.



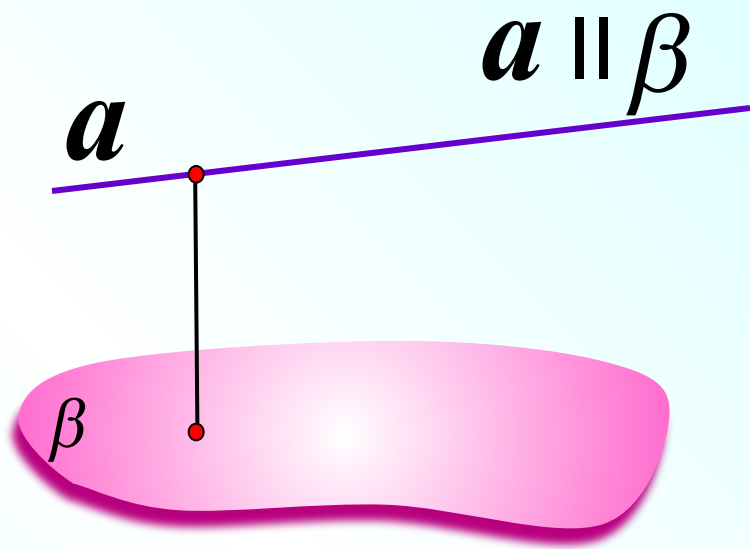
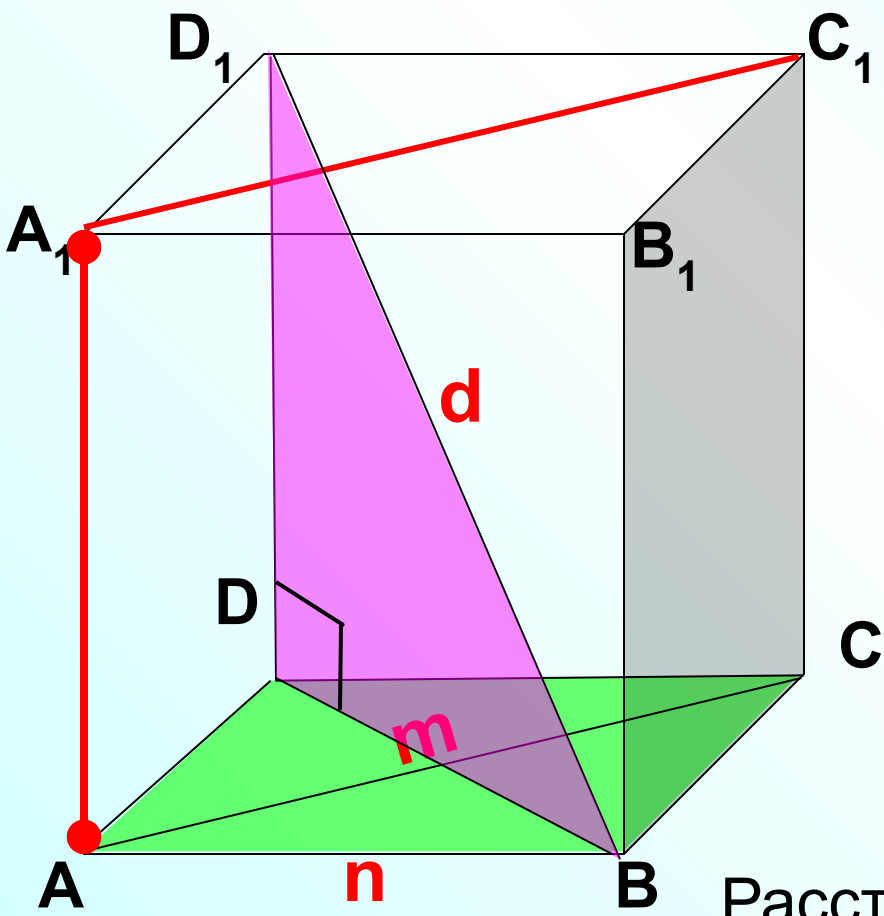
Подсказка



Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

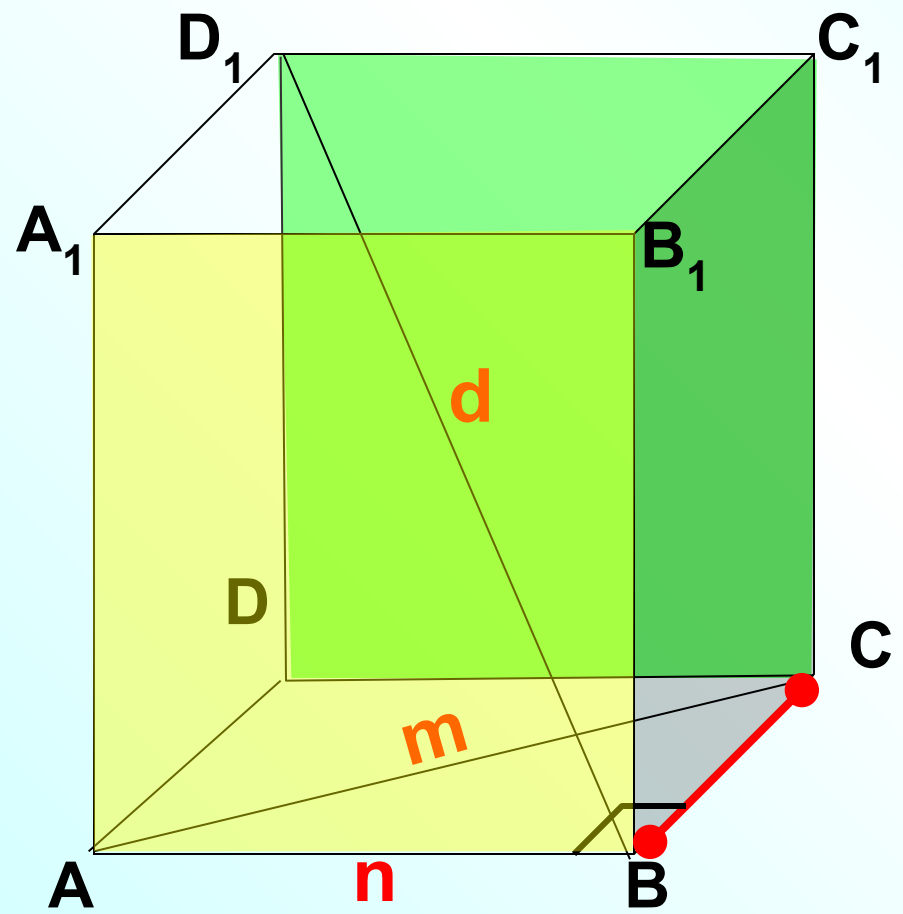
№ 193. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
 Найдите расстояние между:
 а) прямой $A_1 C_1$ и плоскостью ABC ;

Подсказка

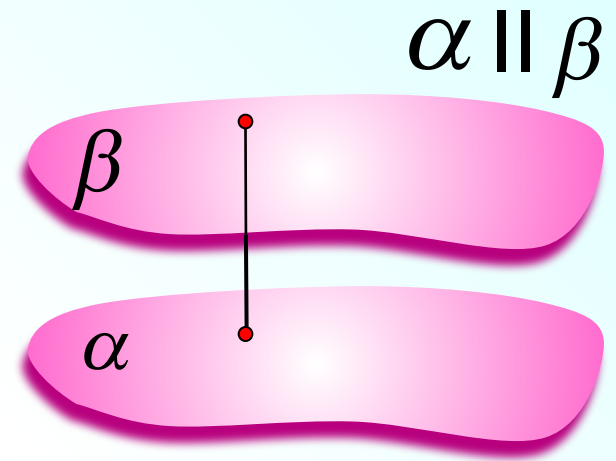


Расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется **расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью**

№ 193. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$
 Найдите расстояние между:
 б) плоскостями $AB B_1$ и $D C C_1$;



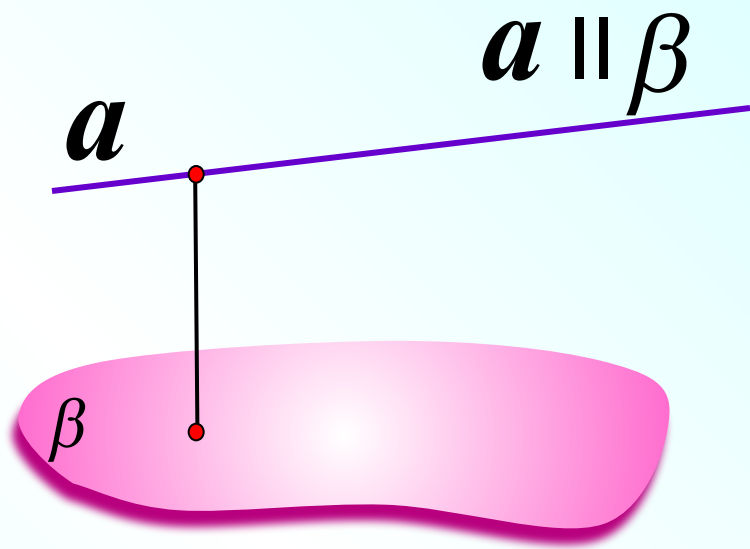
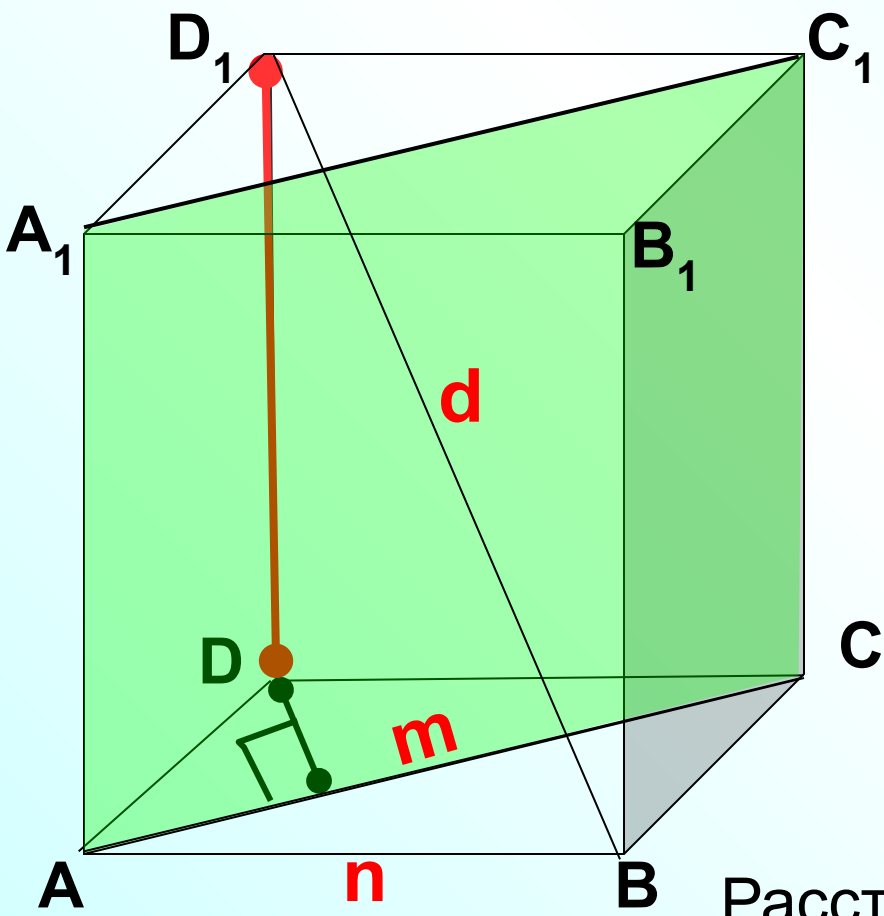
Подсказка



Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется **расстоянием между параллельными плоскостями.**

№ 193. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
 Найдите расстояние между:
 в) прямой DD_1 и плоскостью ACC_1 .

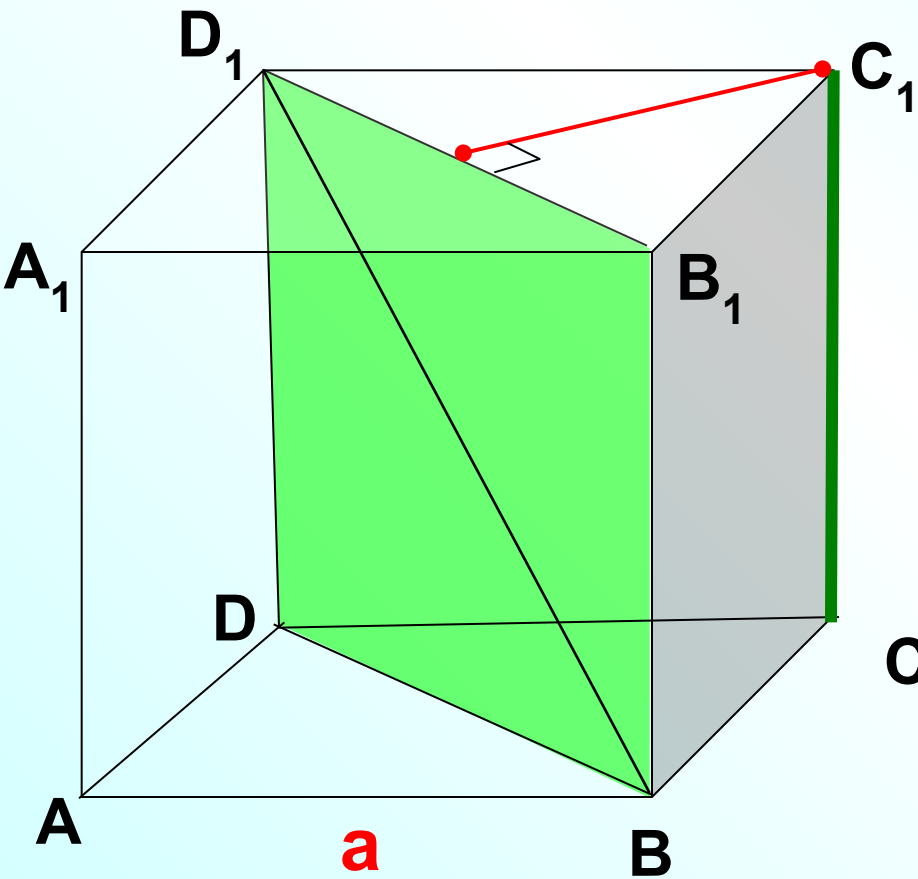
Подсказка



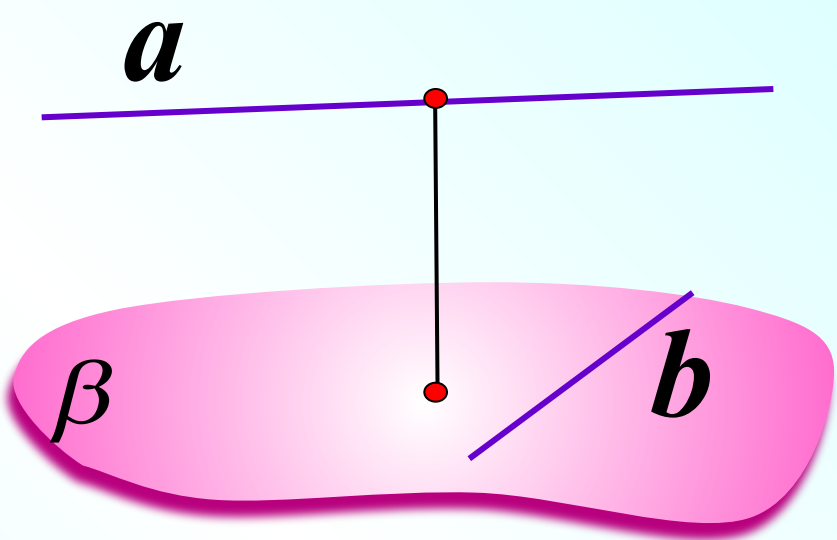
Расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется **расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью**

№ 194. Ребро куба равно **a**. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими:
 а) диагональ куба и ребро куба;

Подсказка



$a \perp b$ $a \parallel \beta$



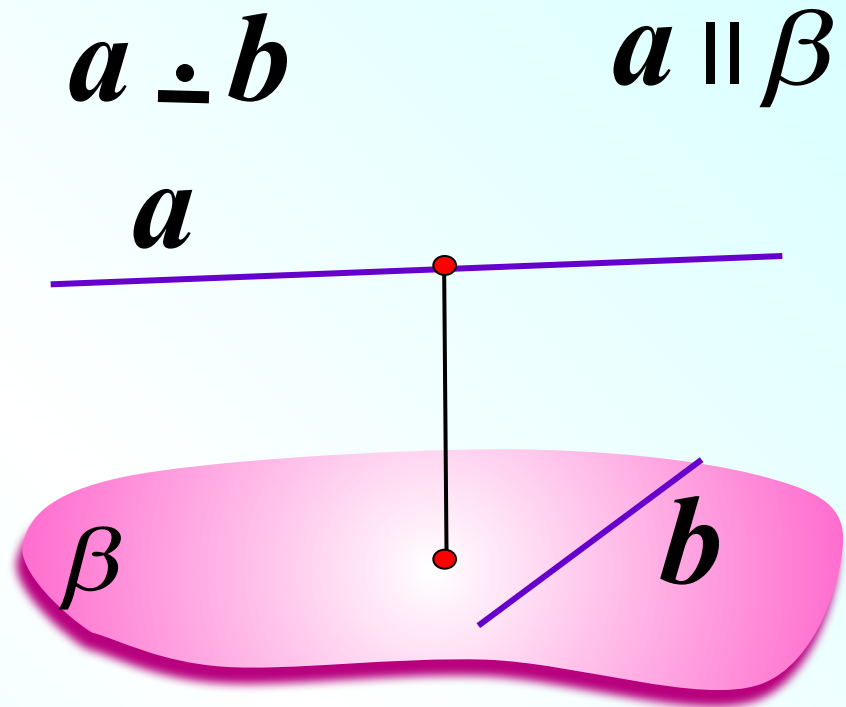
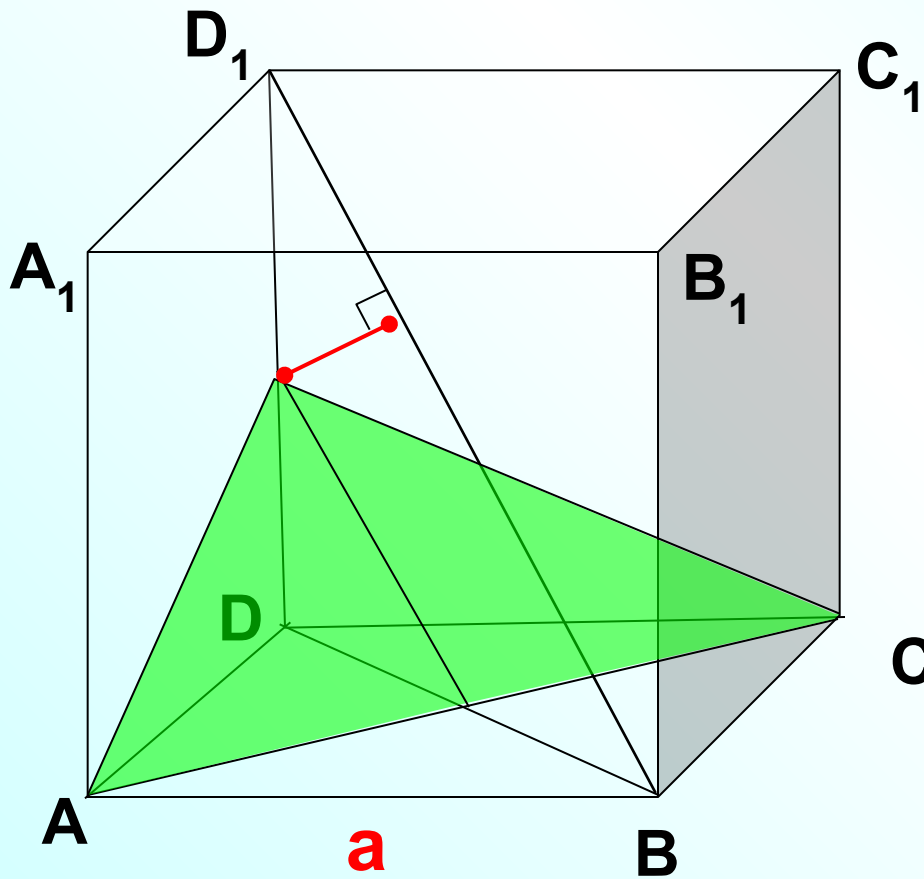
Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется

расстоянием между скрещивающимися прямыми.

№ 194. Ребро куба равно **a**. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими:

б) диагональ куба и диагональ грани куба.

Подсказка



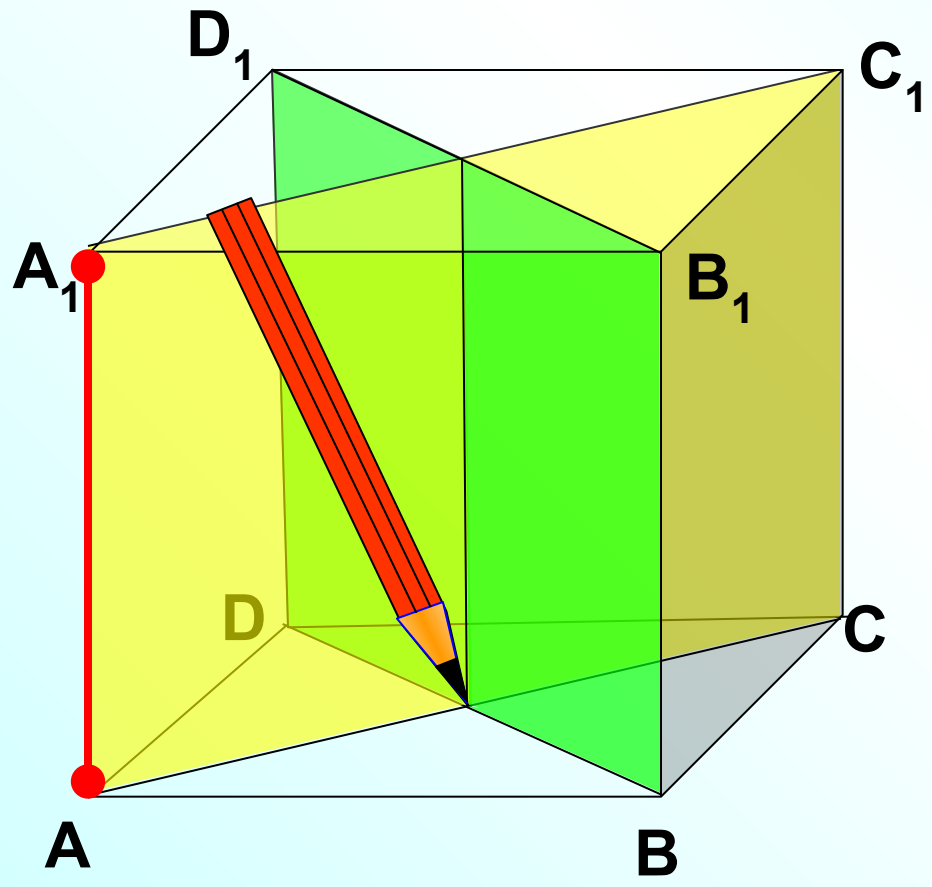
Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется

расстоянием между скрещивающимися прямыми.

№ 196.

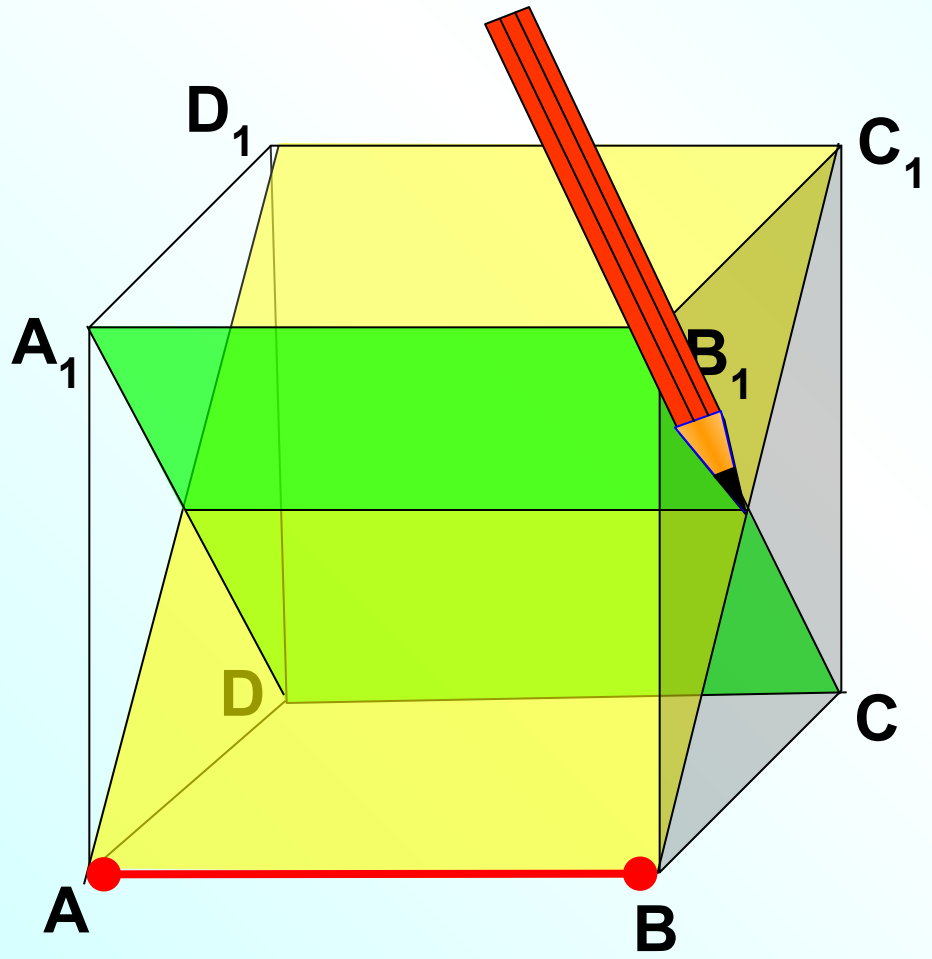
Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через:

- а) ребро AA_1 и перпендикулярной к плоскости $BB_1 D_1$;

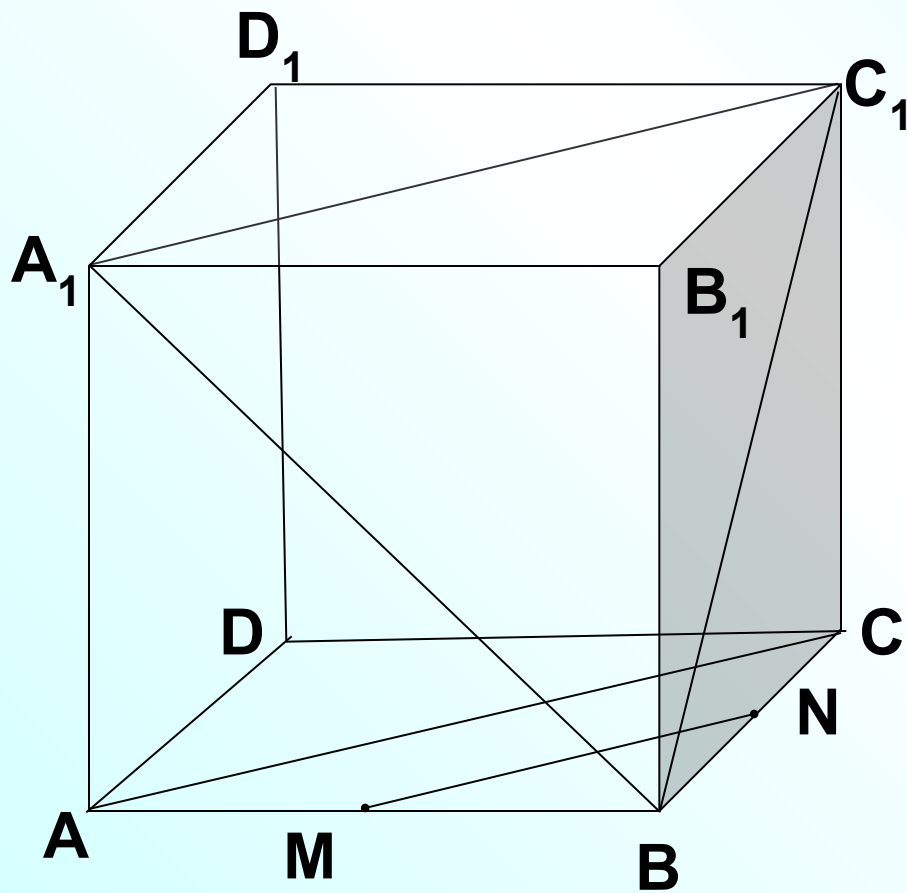


№ 196.

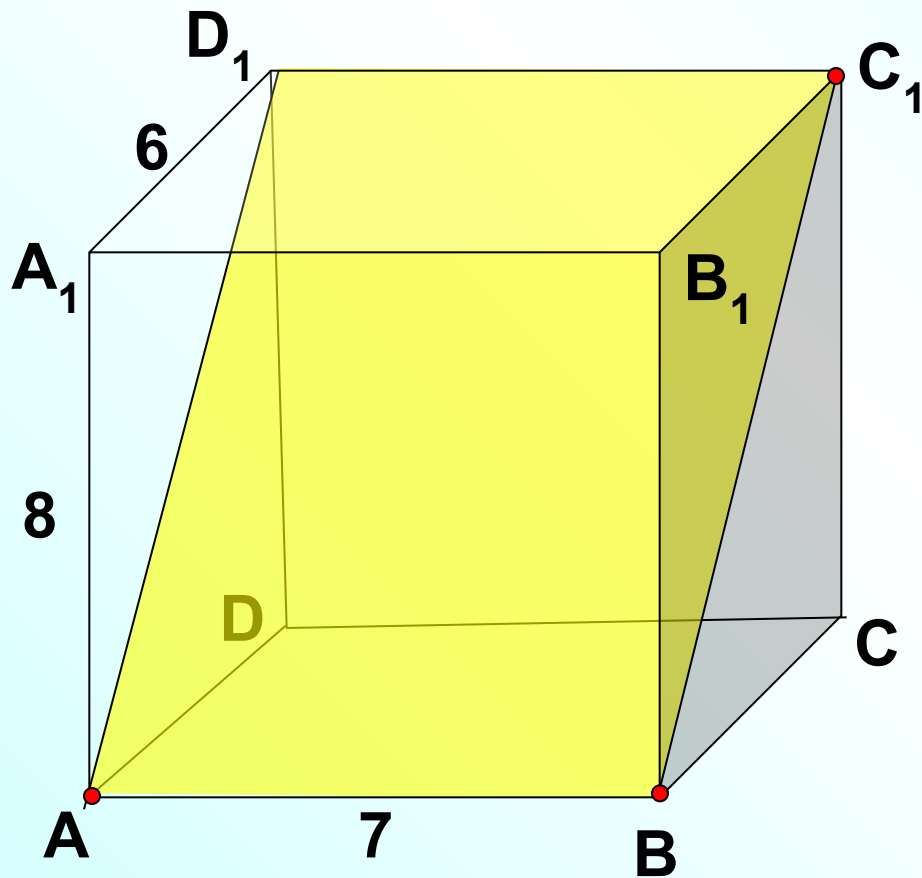
Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через:
б) ребро AB и перпендикулярной к плоскости CDA_1 .



1. Найдите угол A_1BC_1
2. Доказать, что $MN \parallel A_1C_1$, где M и N – середины ребер куба.



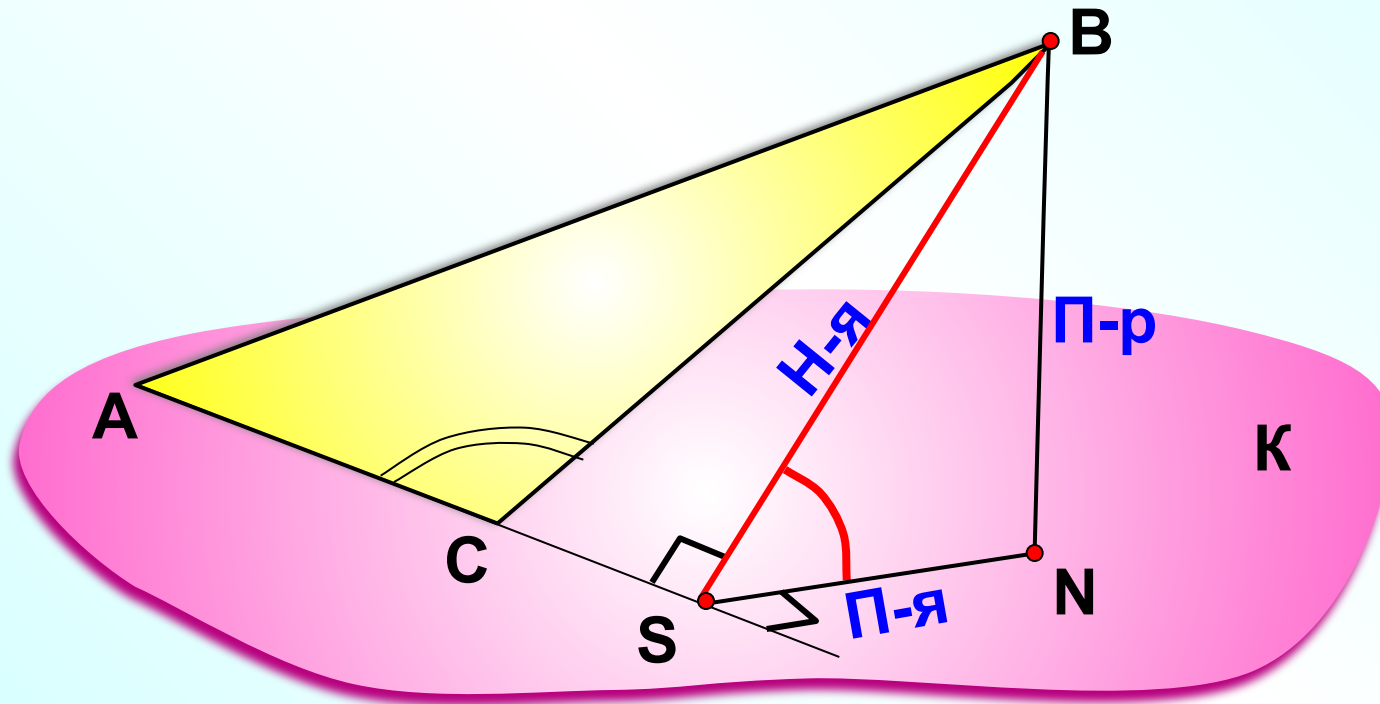
Найдите площадь сечения, проходящего через точки A , B и C_1



Построить линейный угол двугранного угла BACK.
Треугольник ABC – тупоугольный.

$$AC \perp BS \xrightarrow{\text{ТПП}} AC \perp NS$$

Н-я П-я

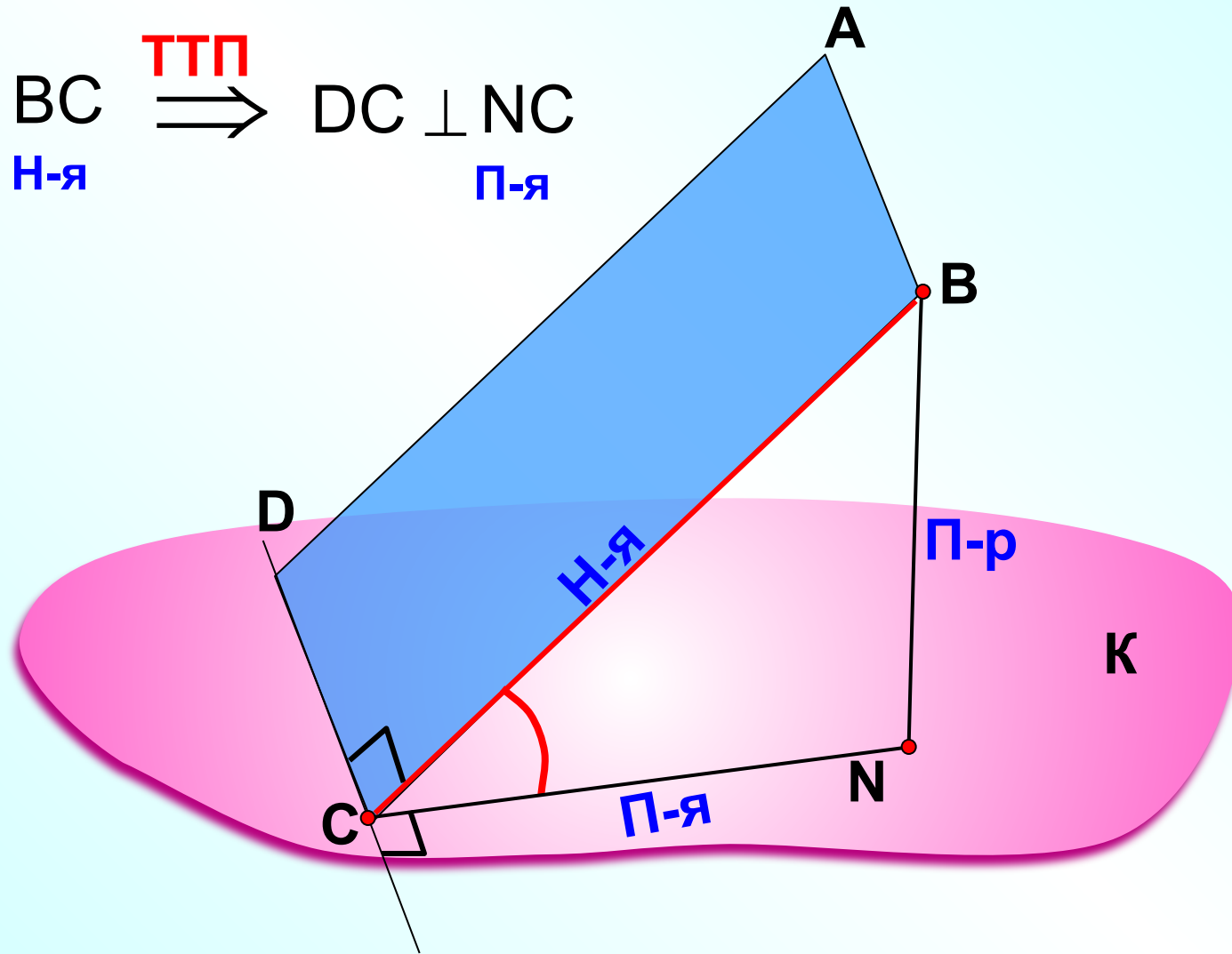


Угол BSN – линейный угол двугранного угла BACK

Построить линейный угол двугранного угла $BDCK$.
 $ABCD$ – прямоугольник.

$$DC \perp BC \xRightarrow{\text{ТТП}} DC \perp NC$$

Н-яП-я

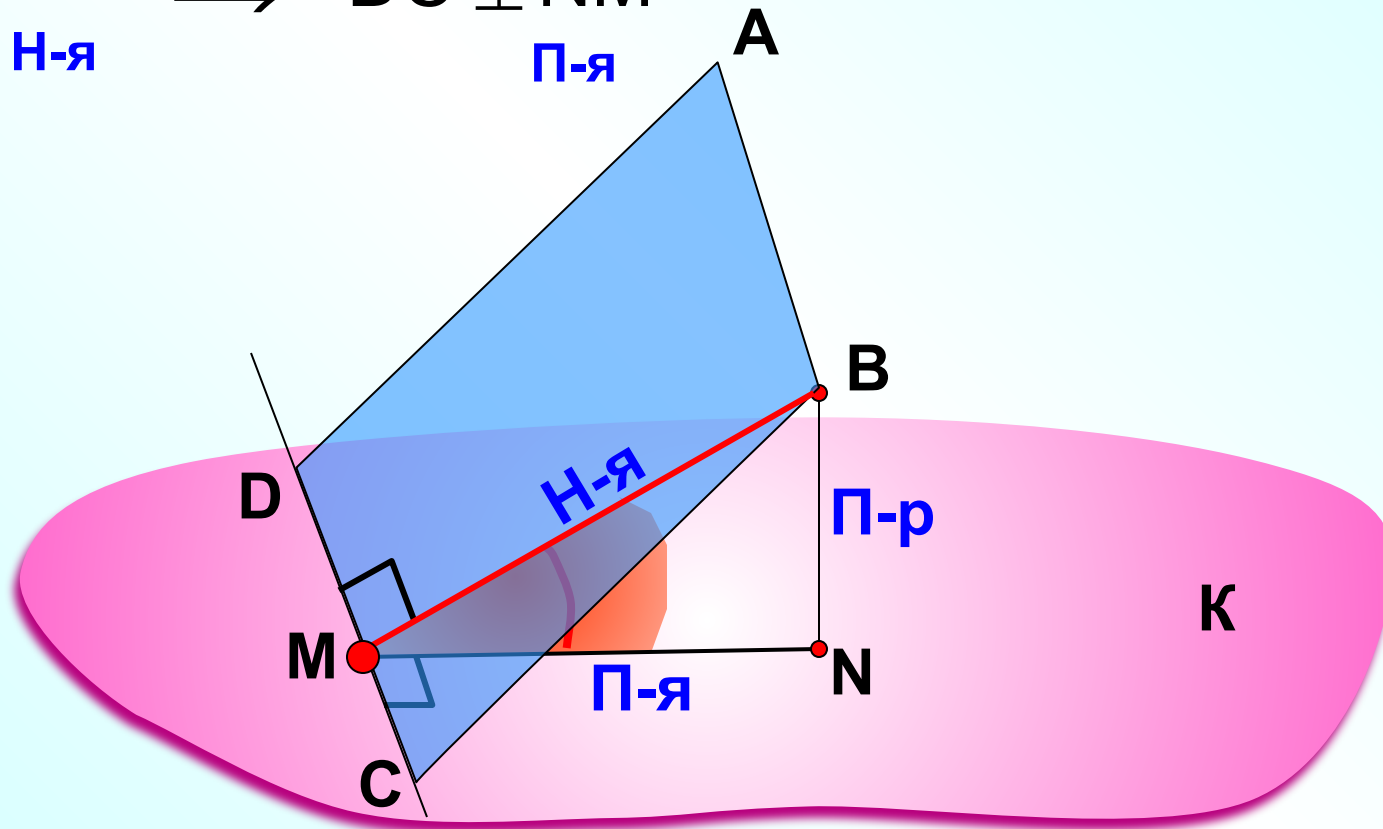


Угол BCN – линейный угол двугранного угла $BDCK$

Построить линейный угол двугранного угла $BDCK$.
 $ABCD$ – параллелограмм, угол C острый.

$$DC \perp BM \xrightarrow{\text{ТТП}} DC \perp NM$$

Н-яП-я

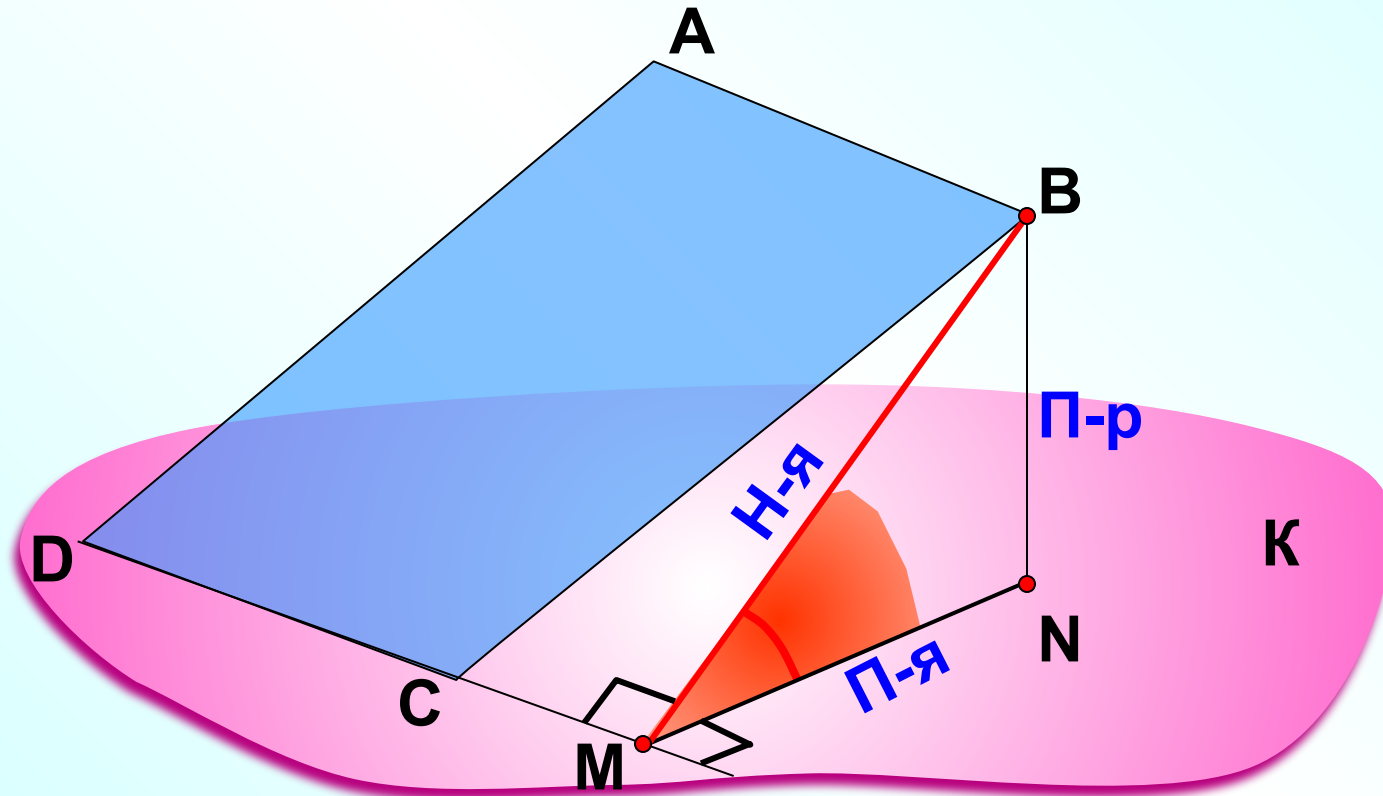


Угол BMN – линейный угол двугранного угла $BDCK$

Построить линейный угол двугранного угла $BDCK$.
 $ABCD$ – параллелограмм, угол C тупой.

$$DC \perp BM \xRightarrow{\text{ТТП}} DC \perp NM$$

Н-я П-я

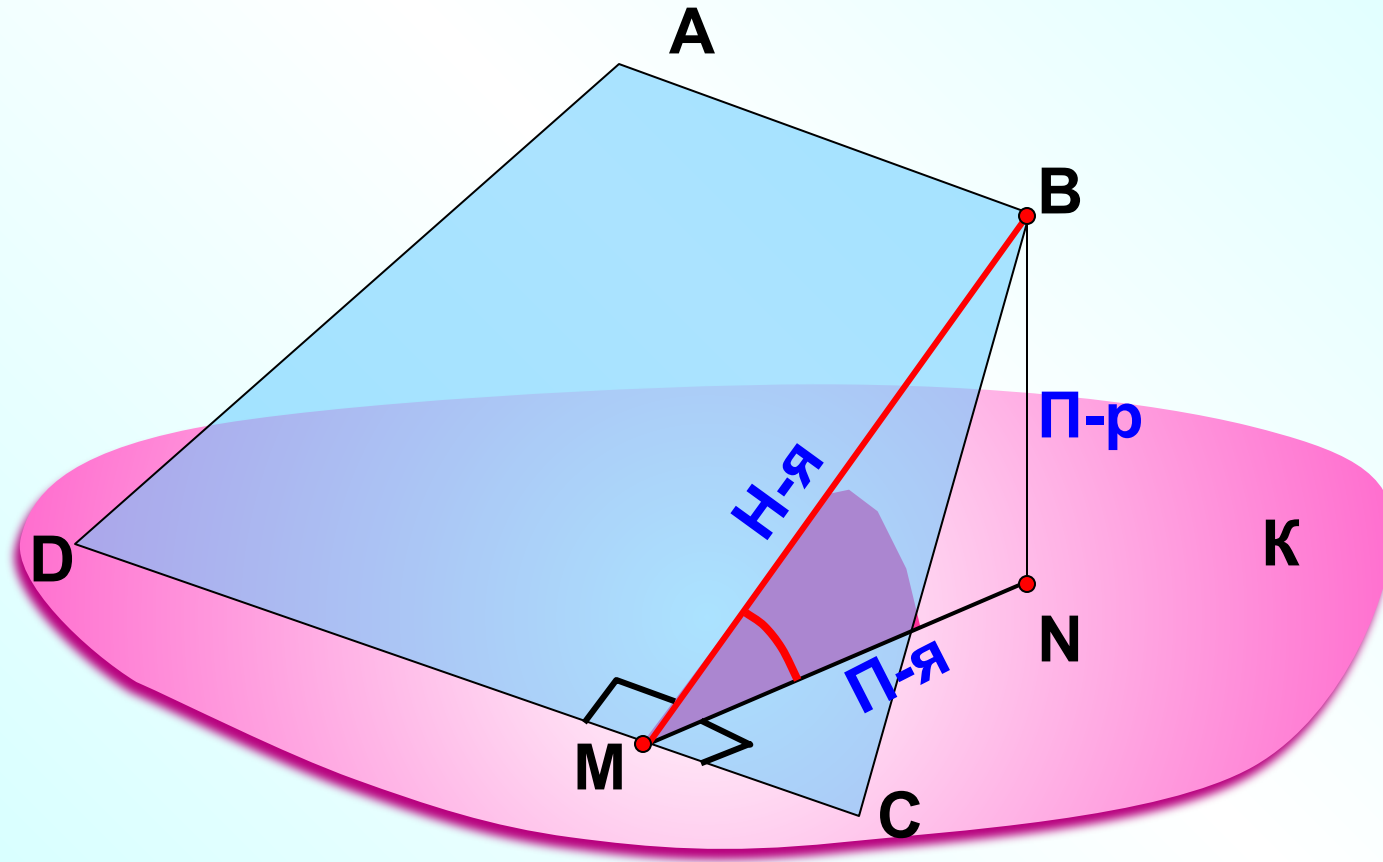


Угол BMN – линейный угол двугранного угла $BDCK$

Построить линейный угол двугранного угла $BDCK$.
 $ABCD$ – трапеция, угол C острый.

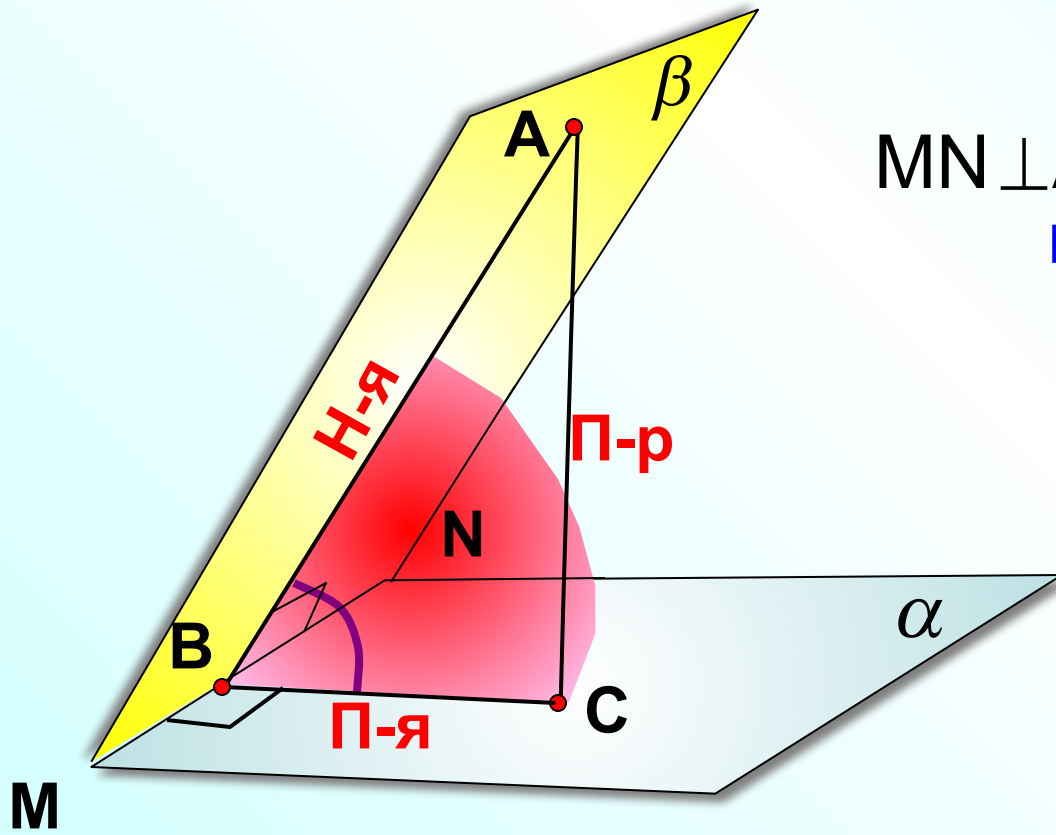
$$DC \perp BM \xRightarrow{\text{ТТП}} DC \perp NM$$

Н-я П-я



Угол BMN – линейный угол двугранного угла $BDCK$

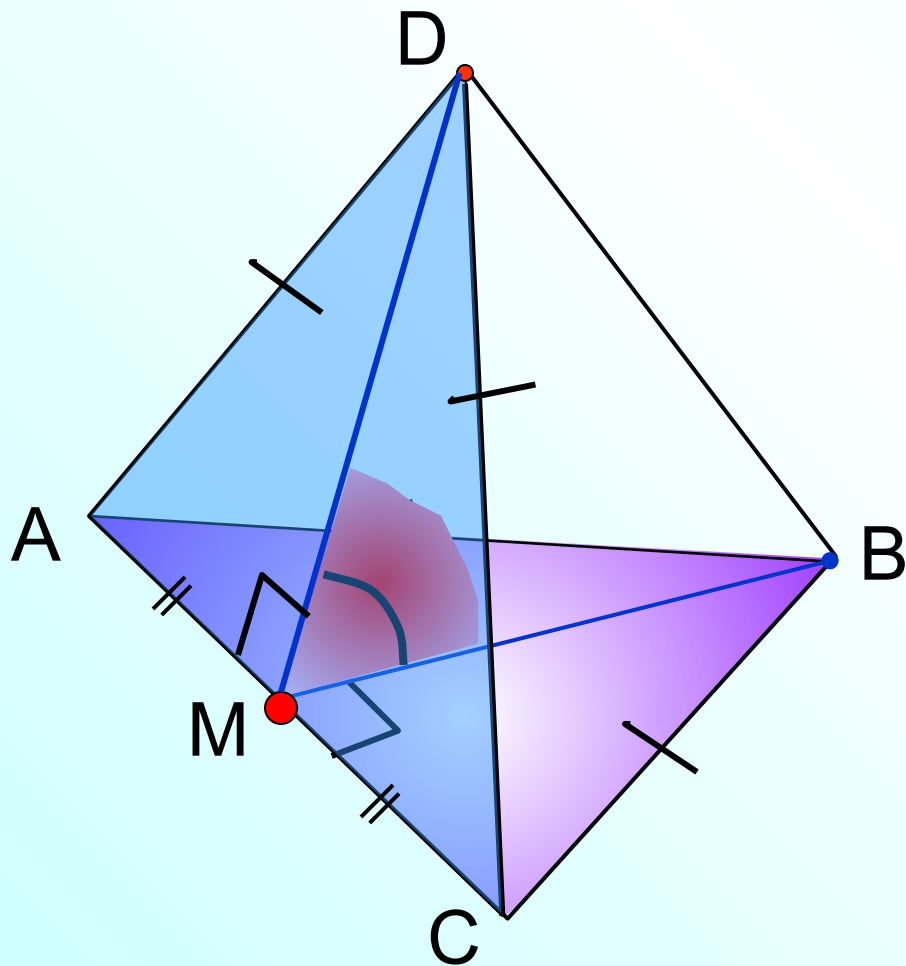
№ 166. Неперпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN . В плоскости β из точки A проведен перпендикуляр AB к прямой MN и из той же точки A проведен перпендикуляр AC к плоскости α . Докажите, что угол ABC – линейный угол двугранного угла $AMNC$.



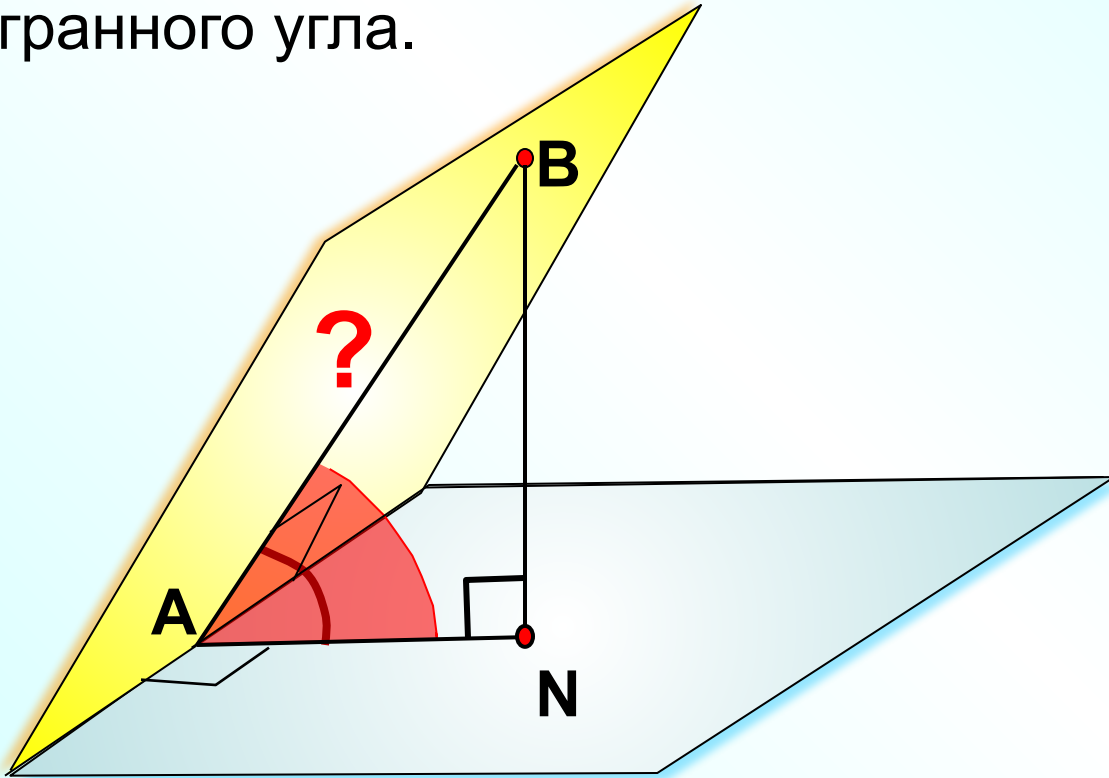
$$\begin{array}{ccc}
 MN \perp AB & \xRightarrow{\text{ТПП}} & MN \perp BC \\
 \text{Н-я} & & \text{П-я}
 \end{array}$$

Угол ABC – линейный угол двугранного угла $AMNC$

№ 167. В тетраэдре $DAVC$ все ребра равны, точка M – середина ребра AC . Докажите, что угол DMB – линейный угол двугранного угла $BACD$.



№ 168. Двугранный угол равен φ . На одной грани этого угла лежит точка, удаленная на расстояние d от плоскости другой грани. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.



№ 169. Даны два двугранных угла, у которых одна грань общая, а две другие грани являются различными полуплоскостями одной плоскости. Докажите, что сумма этих двугранных углов равна 180° .

