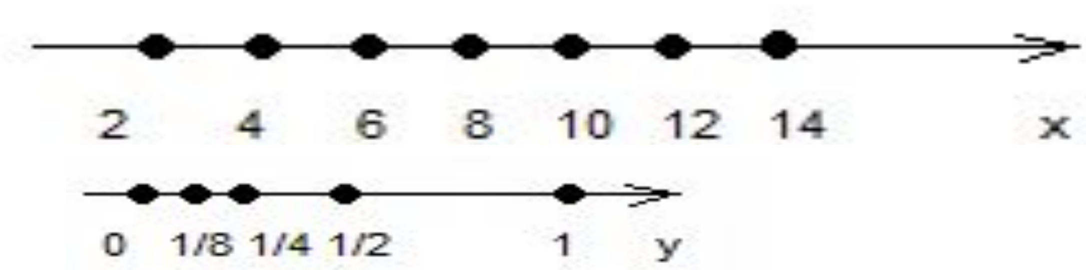
Предел числовой последовательности

- Рассмотрим две числовые последовательности **y_n** и **x_n**:
- **x_n**: 2,4,6,8,10,12,14
- **y_n** : 0,1/8,1/4,1/2, 1



Замечаем, что члены последовательности y_n как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности x_n таковой точки не наблюдается.

Но, естественно, не всегда удобно изображать члены последовательности, чтобы узнать есть ли точка «сгущения» или нет.

Определение 2. *Число* b *называют* ***пределом последовательности*** y_n *, если в любой заранее выбранной окрестности точки* b *содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.*

<u>Пишут:</u> $y_n \to b$.

<u>Читают:</u> y_n стремится к b.

Либо <u>пишут:</u> $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$.

<u>Читают:</u> предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b.

Сходящиеся и расходящиеся последовательности.

- Последовательность, у которой существует предел, называют сходящейся.
- Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют расходящейся; иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является ее пределом.

Теорема 1

Если последовательность {X n} является возрастающей(или неубывающей) и ограничена сверху, т. е. X n≤M для всех n, то она имеет предел.

Теорема 2

Если последовательность {X n} является убывающей (или невозрастающей) и ограничена снизу, т. е. X n≥M для всех n, то она имеет предел.

Определение: Число a называют ***пределом числовой последовательности***

$a_1, \ a_2, \dots a_n, \dots$

если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$|a_n - a| < \varepsilon$.

Условие того, что число a является пределом числовой последовательности

$a_1, \ a_2, \dots a_n, \dots,$

записывают с помощью обозначения $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

и **произносят** так: «Предел a_n при n, стремящемся к бесконечности, равен a».

Предел числовой последовательности

Пример 1. Для любого числа $k > 0$ справедливо равенство:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

Пример 2 . Для любого числа $k > 0$ справедливо равенство:

$$\lim_{n \to \infty} n^k = \infty$$

Пример 3. Для любого числа a такого, что $|a| < 1,$ справедливо

равенство: $$\lim_{n \to \infty} a^n = 0$$

Пример 4. Для любого числа a такого, что $|a| > 1,$ справедливо равенство: $$\lim_{n \to \infty} a^n = \infty$$

Пример 5 . Последовательность:
$-1, 1, -1, 1, \dots,$
заданная с помощью формулы общего члена
$a_n = (-1)^n,$
предела не имеет.

Свойства пределов числовых последовательностей

Рассмотрим две последовательности

$a_1,\ a_2, \dots a_n, \dots,$ и $b_1,\ b_2, \dots b_n, \dots .$

Если при $n \to \infty$ существуют такие числа a и b, что

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$,

то при $n \to \infty$ существуют также и ***пределы суммы, разности и произведения*** этих последовательностей, причем

- $$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n = a + b$$
- $$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n = a - b$$
- $$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n = a \cdot b$$

Если, выполнено условие, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n \neq 0$

то при $n \to \infty$ существует ***предел дроби*** $\dfrac{a_n}{b_n}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

Пример 1. Найти предел последовательности

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n+1} + 3^{n+2}}{4^{n+2} + 5}$$

Решение. Сначала преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, воспользовавшись свойствами степеней:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+3^{n+2}}{4^{n+2}+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n+9\cdot 3^n}{16\cdot 4^n+5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n+9\cdot 3^n}{16\cdot 4^n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n\left(1+\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{16\cdot 4^n\left(1+\frac{5}{16}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}=\frac{1}{8}$$

Выноса за скобки «самое большое» слагаемое в числителе дроби и «самое большое» слагаемое в знаменателе дроби, а также, используя свойства пределов последовательностей и результат примера 3, получаем

Ответ. $\frac{1}{8}$

Пример 2 . Найти предел последовательности

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 3n\sqrt{n} - 2}{5n^2 - 7\sqrt[3]{n} + 1}$$

Решение. Вынося за скобки «самое большое» слагаемое в числителе дроби и «самое большое» слагаемое в знаменателе дроби, а также, используя свойства пределов последовательностей и результат примера 1, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n\sqrt{n}-2}{5n^2-7\sqrt[3]{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\dfrac{3}{\sqrt{n}}-\dfrac{2}{n^2}\right)}{5n^2\left(1-\dfrac{7}{5\sqrt[3]{n^2}}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{5}$$

Ответ. $\frac{1}{5}$

Пример 3 . Найти предел последовательности

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{n^2+1}{2n+1}-\frac{4n^2+1}{8n+1}\right)$$

:

Решение. Сначала преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, приводя дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n+1}-\frac{4n^2+1}{8n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)\cdot(8n+1)-\left(4n^2+1\right)\cdot(2n+1)}{(2n+1)\cdot(8n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3+8n+n^2+1-8n^3-2n-4n^2-1}{(2n+1)\cdot(8n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2+6n}{(2n+1)\cdot(8n+1)}$$

Вынося за скобки «самое большое» слагаемое в числителе дроби и «самое большое» слагаемое в каждой из скобок знаменателя дроби, а также, используя свойства пределов последовательностейВынося за скобки «самое большое» слагаемое в числителе дроби и «самое большое» слагаемое в каждой из скобок знаменателя дроби, а также, используя свойства пределов последовательностей и результат примера 1, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2+6n}{(2n+1)\cdot(8n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)}{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot 8n\left(1+\frac{1}{8n}\right)}=-\frac{3}{16}$$

Ответ. $-\frac{3}{16}$

Пример 4. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+2n^2+n+1}-\sqrt{n^4-3n^2+5}\right)$$

Решение. В рассматриваемом примере неопределенность типа $\infty-\infty$ возникает за счет разности двух корней, каждый из которых стремится к ∞. Для того, чтобы раскрыть неопределенность, домножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сумму этих корней и воспользуемся формулой сокращенного умножения «разность квадратов».

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+2n^2+n+1}-\sqrt{n^4-3n^2+5}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^4+2n^2+n+1}-\sqrt{n^4-3n^2+5}\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+2n^2+n+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}\right)}{\left(\sqrt{n^4+2n^2+n+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+n+1-\left(n^4-3n^2+5\right)}{\sqrt{n^4+2n^2+n+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n-4}{\sqrt{n^4+2n^2+n+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}}$$

Выноса за скобки «самое большое» слагаемое в числителе дроби и «самое большое» слагаемое из-под каждого корня в знаменателе дроби, а также, используя свойства пределов последовательностейВыноса за скобки «самое большое» слагаемое в числителе дроби и «самое большое» слагаемое из-под каждого корня в знаменателе дроби, а также, используя свойства пределов последовательностей и результат примера 1, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n-4}{\sqrt{n^4+2n^2+n+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2\left(1+\frac{1}{5n}-\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+n^2\sqrt{1-\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^4}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\left(1+\frac{1}{5n}-\frac{4}{n^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^4}}}=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}$$

Ответ. $\frac{5}{2}$

Пример 5. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$$

Решение. Замечая, что для всех $k = 2, 3, 4, \ldots$ выполнено равенство

$$\frac{1}{(k-1)\cdot k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

Ответ. 1 .

Важно!

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Можно доказать, что $\{x_n\}$ — возрастающая и ограниченная сверху последовательность. По теореме 1 она имеет предел, который обозначается e, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Для любого натурального показателя *m* и любого коэффициента *k* справедливо соотношение:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{[illegible]}{[illegible]^{[illegible]}}\right) = 0$$