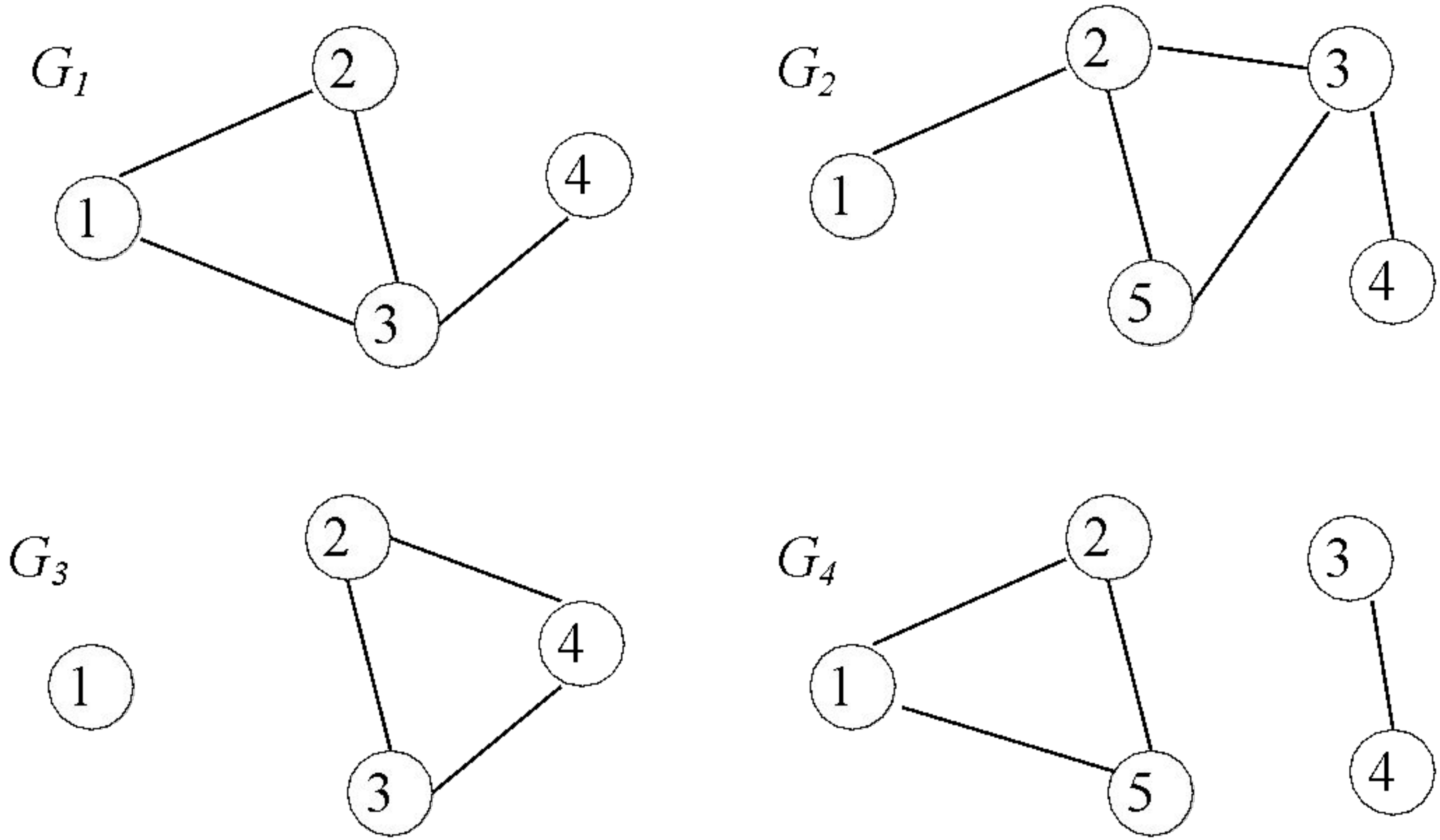
3.5. Связные графы. Компоненты связности

3.5.1. Понятие связности

Граф называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены цепью.

<u>Пример.</u>

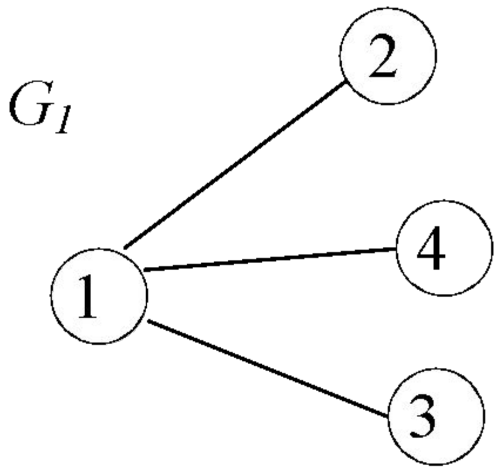


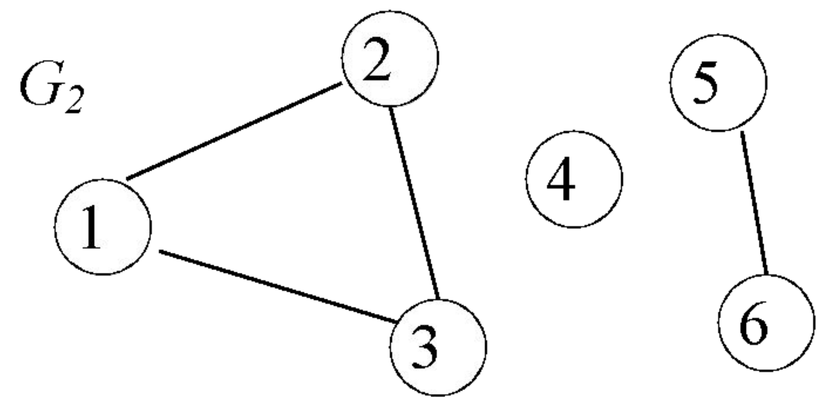
Всякий максимально связный подграф графа G называется *компонентой связности* графа G.

«максимально» означает, что он не содержится в связном подграфе с бо́льшим числом элементов.

Множество вершин компоненты связности называется *областью связности графа.*

<u>Пример.</u>





Компонента связности
$\{1, 2, 3, 4\}$

Компоненты связности
$\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}$

Теорема 3.1. Для любого графа либо он сам, либо его дополнение является связным.

Теорема 3.2. Пусть G – связный граф, $e \in E_G$. Тогда

1) если ребро e принадлежит какому-нибудь циклу графа G, то граф $G - e$ связен;

2) если ребро e не входит ни в один цикл, то граф $G - e$ имеет ровно две компоненты.

Теорема 3.3. (О числе ребер в графе) Если число компонент связности графа G равно k, то

$$n - k \le m \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

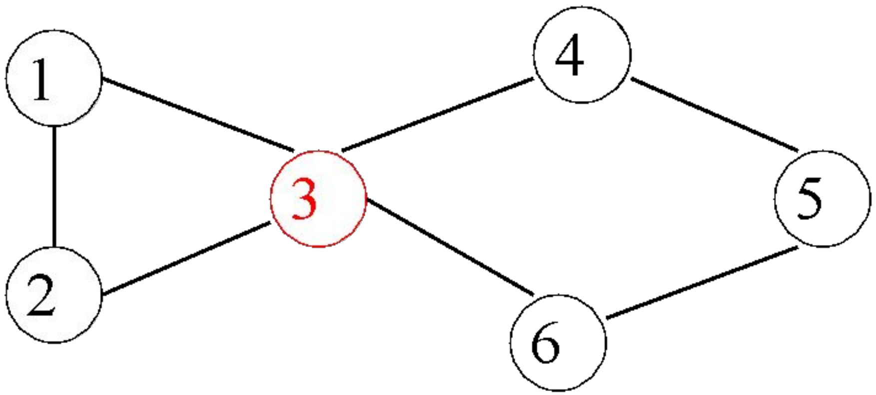
где m – число ребер, n – порядок графа G.

3.5.2. Вершинная и реберная связность

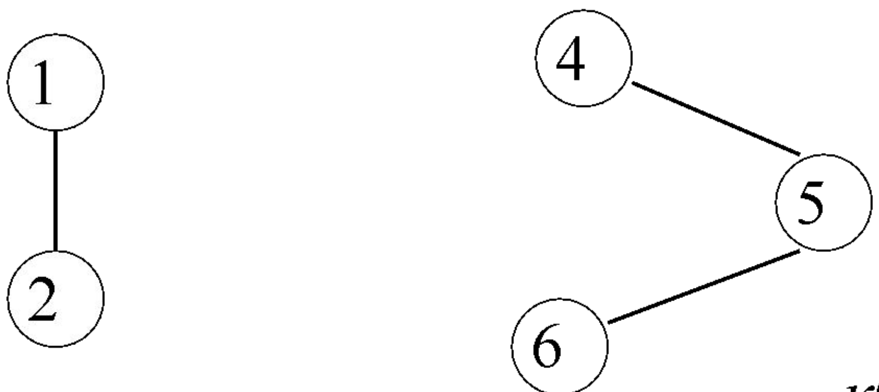
Числом вершинной связности $\kappa(G)$ *(каппа)* графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу. Если граф несвязный, то $\kappa(G) = 0$.

<u>Пример.</u>

G_1

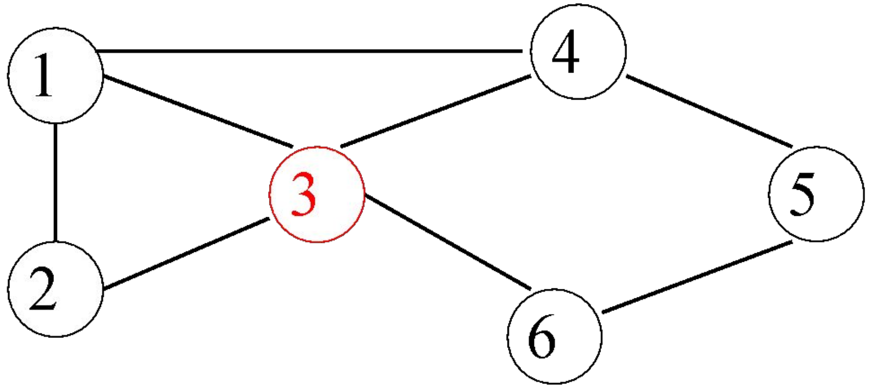


$G_1 - 3$

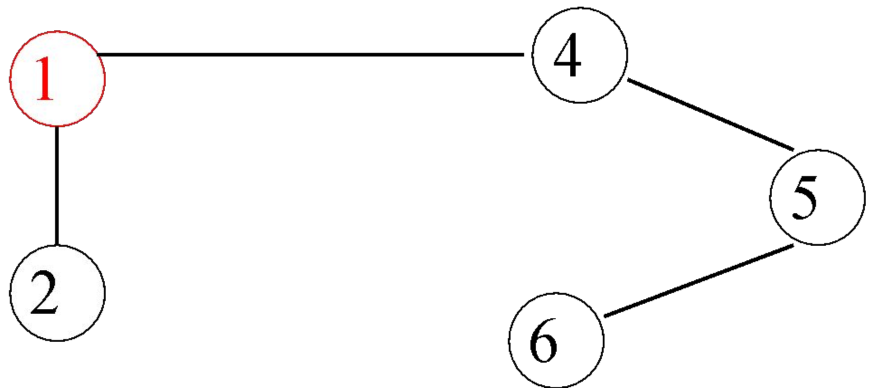


$\kappa(G_1) = 1$

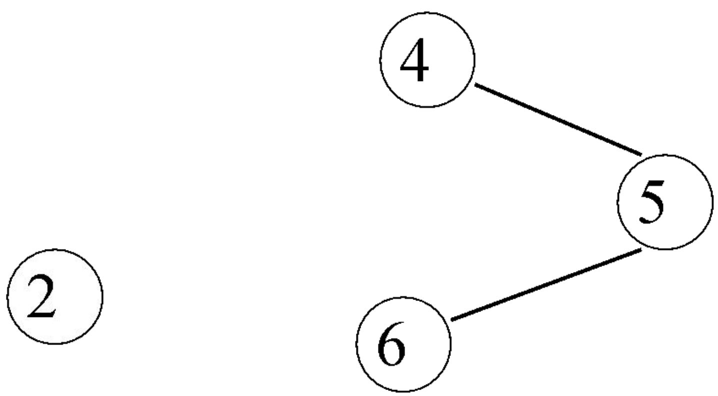
G_2



$G_2 - 3$



$G_2 - 3 - 1$

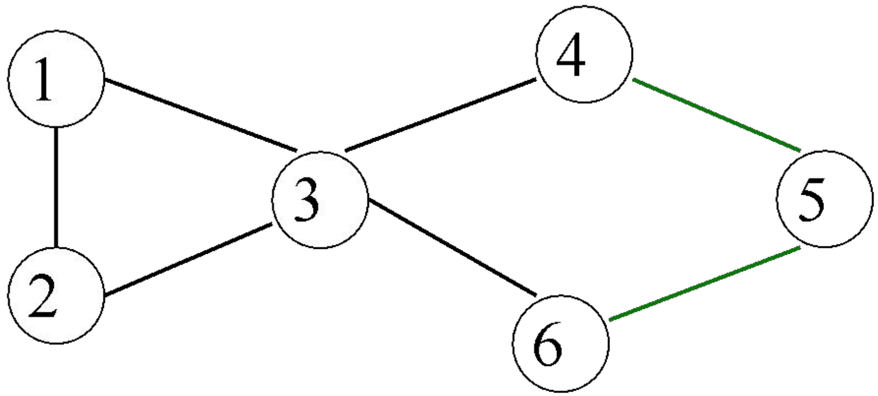


$\kappa(G_2) = 2$

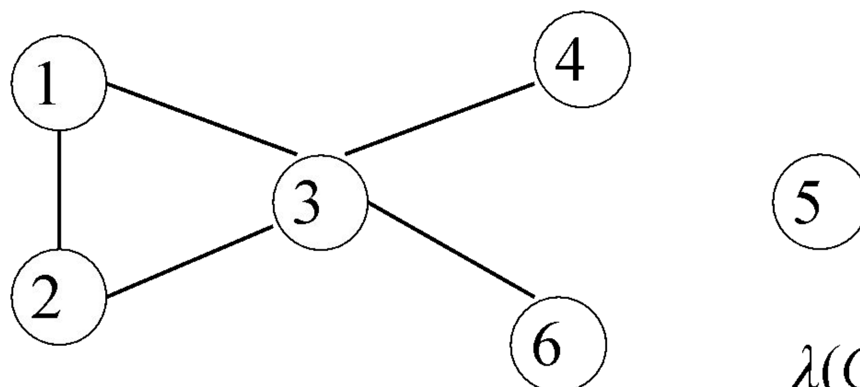
Пусть G – граф порядка $n>1$. *Числом реберной связности* $\lambda(G)$ графа G называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Если граф одновершинный или несвязный, то $\lambda(G) = 0$.

Пример.

G



$G - \{4,5\} - \{5,6\}$

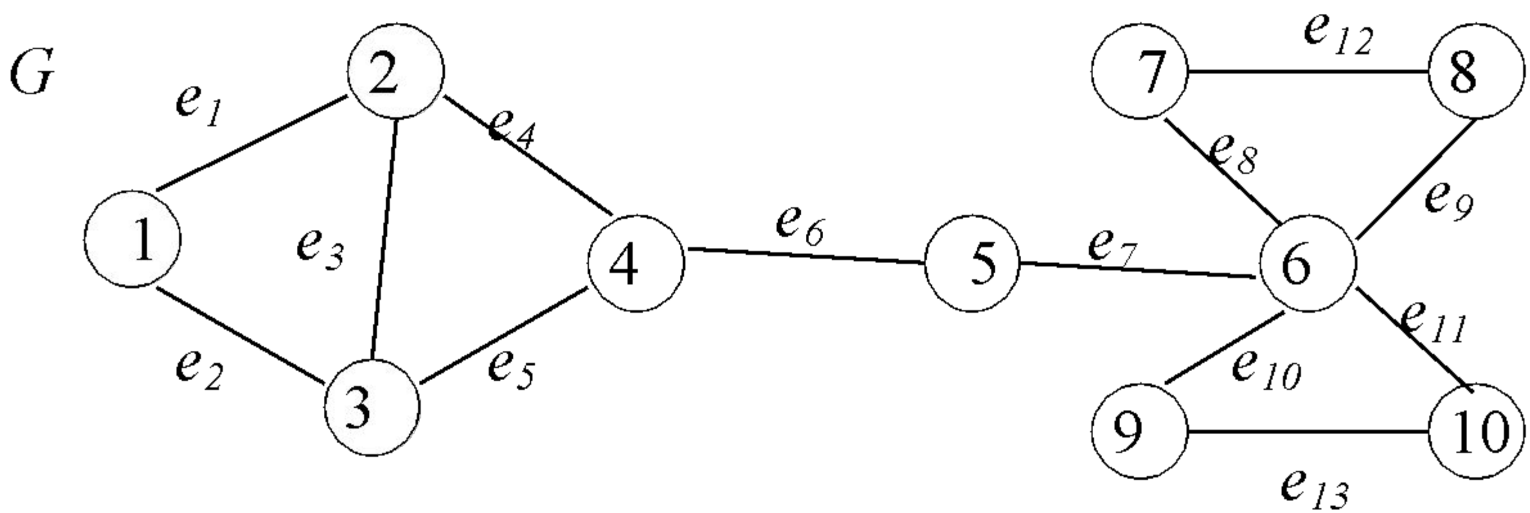


$\lambda(G) = 2$

Вершина v графа G называется *точкой сочленения* (или *разделяющей вершиной*), если граф $G - v$ имеет больше компонент связности, чем G.

Ребро e графа G называется *мостом*, если граф $G - e$ имеет больше компонент связности, чем G.

Пример.



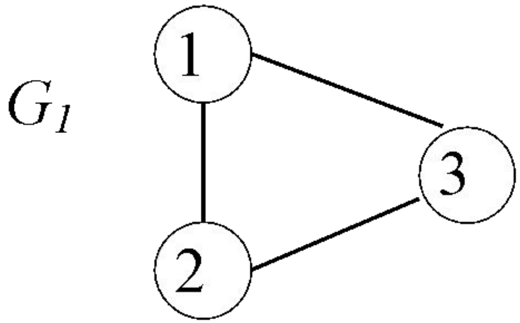
Точки сочленения: 4, 5, 6
Мосты: e_6, e_7.

3.5.3. Двусвязные графы

Неориентированный граф называется *двусвязным*, если он является связным и не содержит точек сочленения.

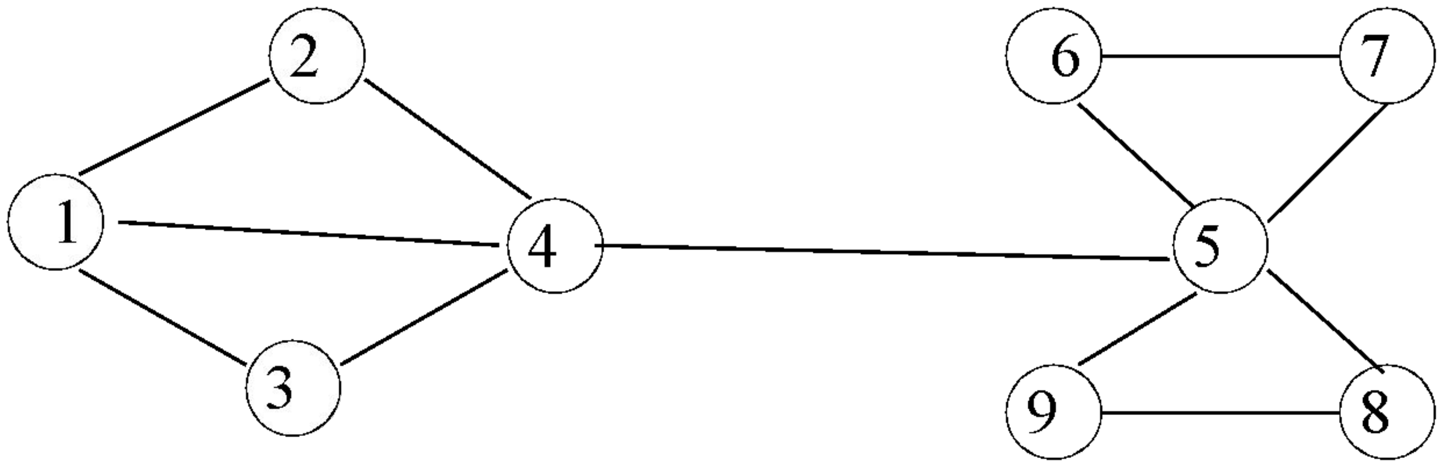
Произвольный максимально возможный двусвязный подграф графа G называется *блоком* (*компонентой двусвязности*) этого графа.

<u>Пример.</u>



граф G_1 является двусвязным

G_2



Блоки:

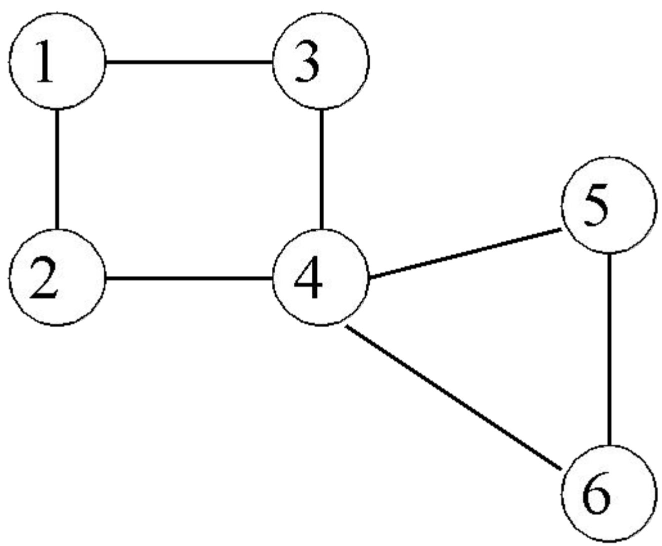
$\{1, 2, 4, 3\}$
$\{5, 6, 7\}$
$\{5, 8, 9\}$
$\{4, 5\}$

Неориентированный граф называется *реберно-двусвязным*, если он является связным и не содержит мостов.

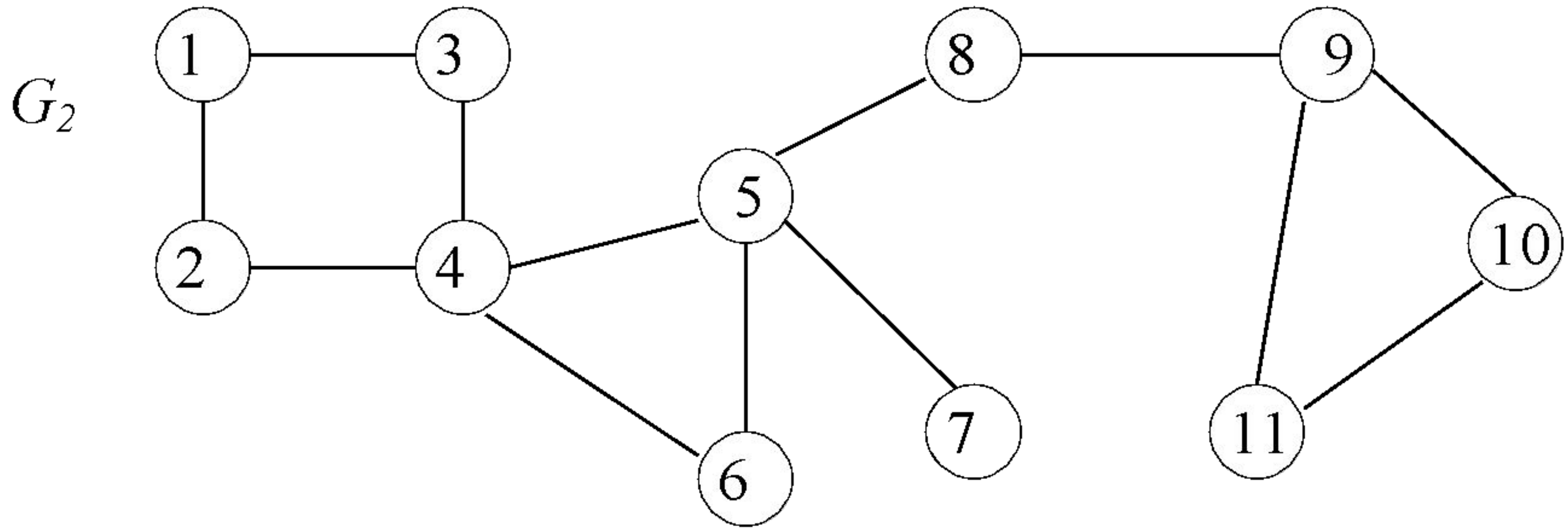
Произвольный максимально возможный реберно-двусвязный подграф графа G называется *листом* этого графа.

Пример.

G_1



Граф G_1 является реберно-двусвязным



Листы:

{2, 1, 3, 4, 5, 6}
{7}
{9, 10, 11}
{8}

3.5.4. Связность в орграфах

Путь в ориентированном графе – ориентированная цепь.

Пусть $D(V, A)$ – орграф, v_1 и v_2 – его вершины. Тогда

1) две вершины v_1 и v_2 *сильно связаны* в орграфе D, если существует путь из v_1 в v_2 и из v_2 в v_1;

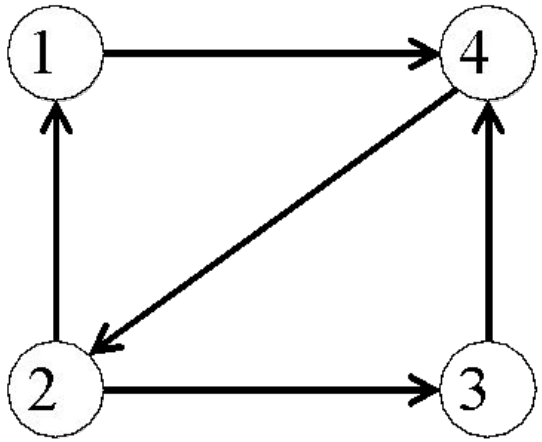
2) две вершины v_1 и v_2 *односторонне связаны* в орграфе D, если существует путь либо из v_1 в v_2, либо из v_2 в v_1;

3) две вершины v_1 и v_2 *слабо связаны* в орграфе D, если они связаны в неориентированном графе G, полученном из орграфа D путем отмены ориентации дуг.

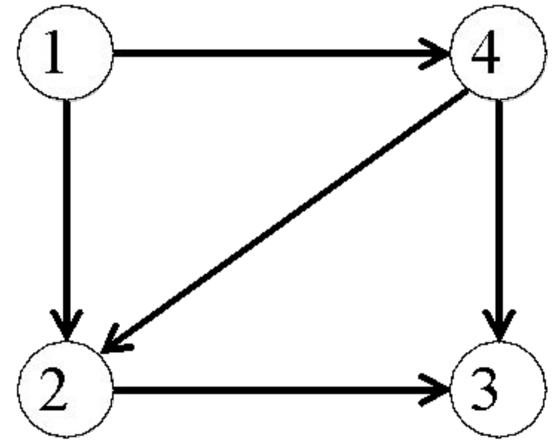
Сильная связанность влечет одностороннюю связанность, которая влечет слабую связанность. Обратное неверно.

Пример.

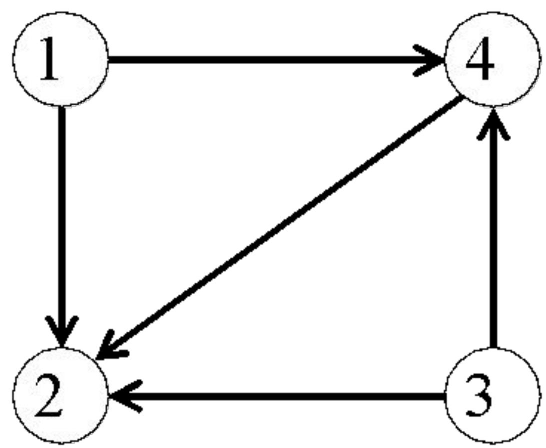
D_1



D_2



D_3



Компонента сильной связности (КСС) орграфа D - это его максимально сильно связный подграф.

Каждая вершина графа принадлежит только одной КСС. Если вершина не связана с другими, то считается, что она сама образует КСС.

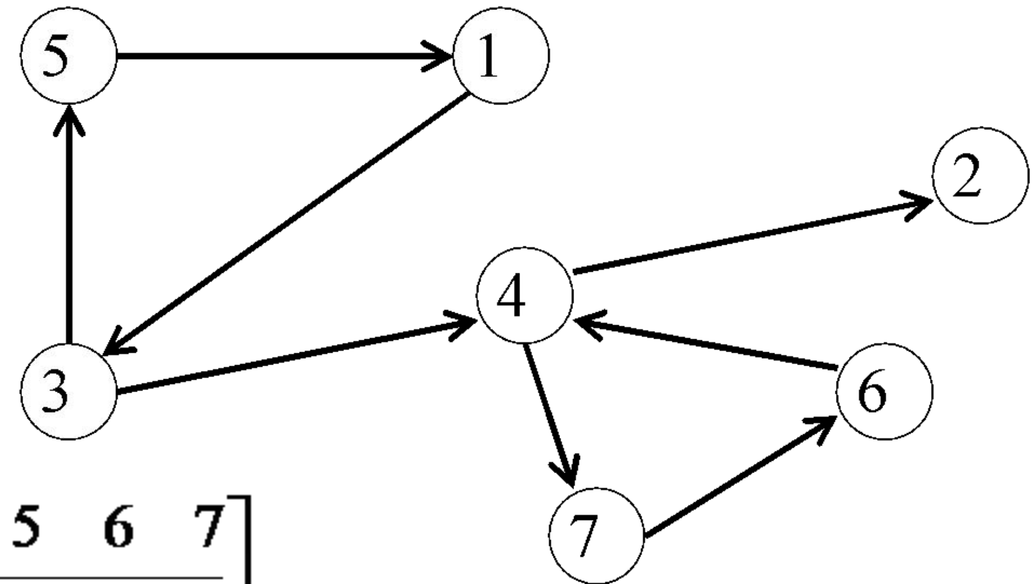
S – матрица компонент сильной связности (n-го порядка)

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i \to j \quad и \quad j \to i, \\ 0, & иначе \end{cases}$$

главная диагональ матрицы содержит 1.

<u>Пример.</u>

D



$$S_1 = \begin{array}{c@{\,}c} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$S_1 = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

$$S_2 = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

$$S_2 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 2 & 4 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$S_3 = \begin{array}{c|c} & 2 \\ \hline 2 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Компоненты сильной связности:

{1, 3, 5}

{4, 6, 7}

{2}