Предел функции в точке и на бесконечности.

Свойства пределов.

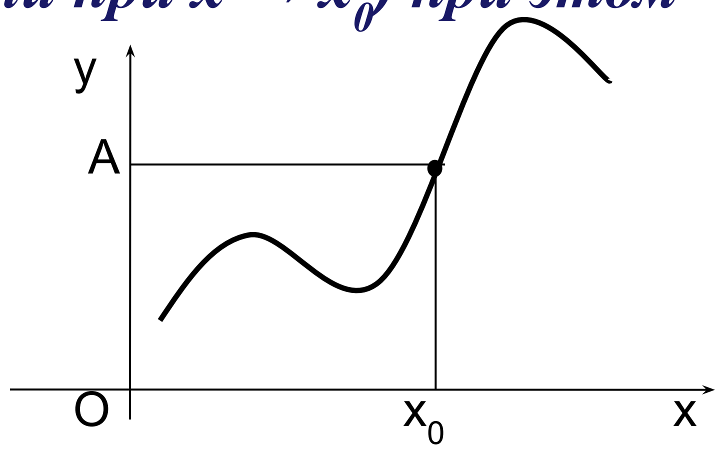
Замечательные пределы.

Определение

Пусть функция f, принимающая действительные значения, определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Функция f имеет предел в точке x_0, если для любой последовательности точек x_n, $n = 1, 2,...$, $x_n \neq x_0$, стремящейся к точке x_0, последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к одному и тому же числу A, которое и называется пределом функции f в точке x_0, (или при $x \to x_0$) при этом пишется

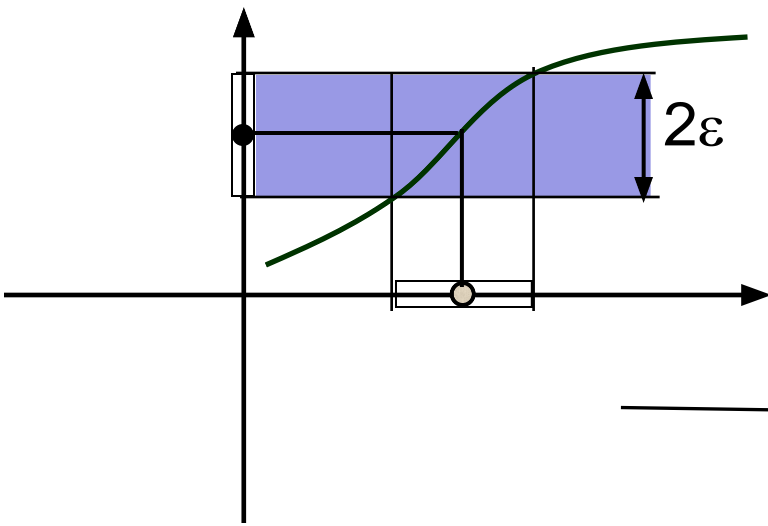
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$



Предел функции в точке

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

окрестность точки



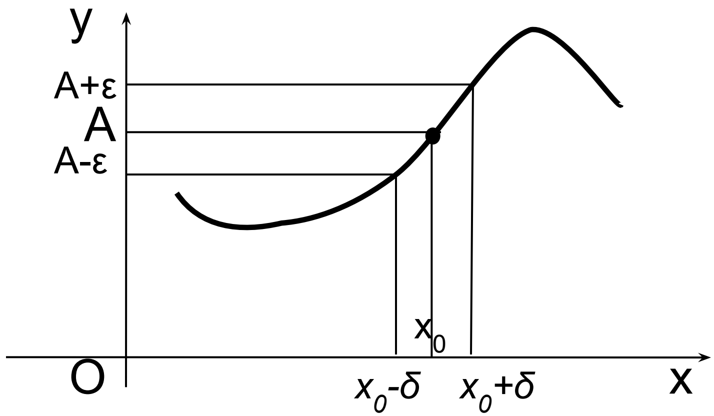
окрестность точки

Геометрический смысл предела: для всех из – окрестности точки точки графика функции лежат внутри полосы, шириной , ограниченной прямыми: , .

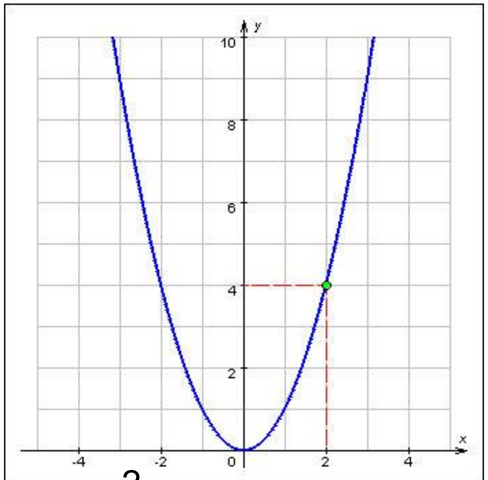
Определение

Число A называется пределом функции f в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$



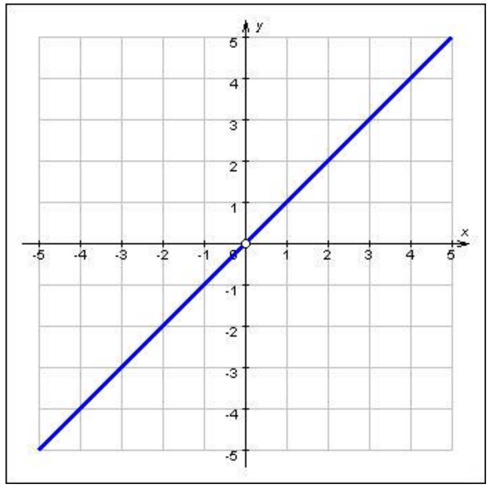
Примеры функций, имеющих предел в точке



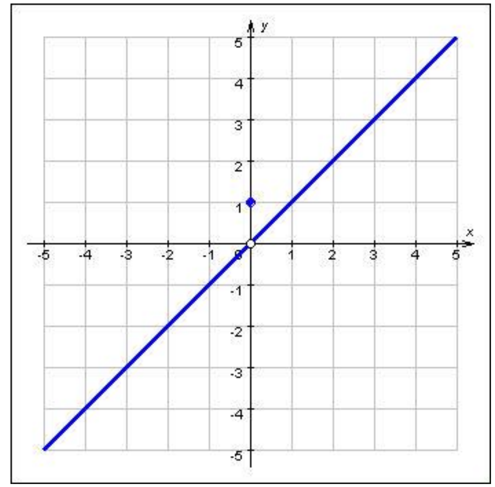
$y = x^2$

$$\lim_{x \to 2} y = 4$$

Предел функции при $x \to 2$ равен 4 (при $x \to 2$ значения функции $\to 4$).



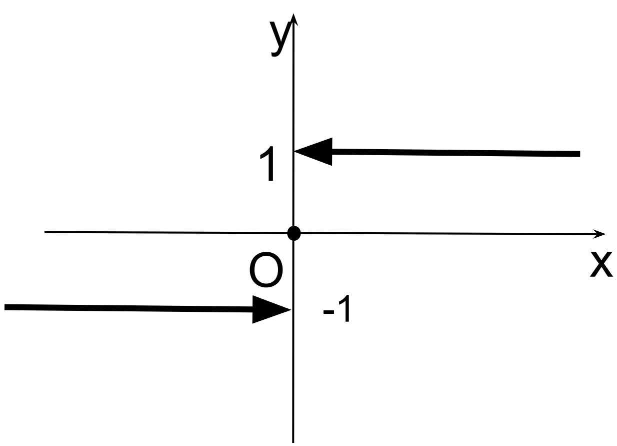
$$y = \frac{x^2}{x}$$

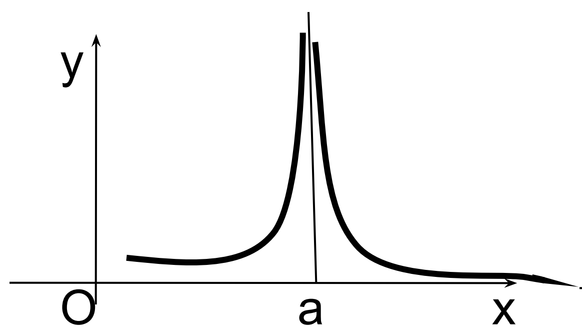


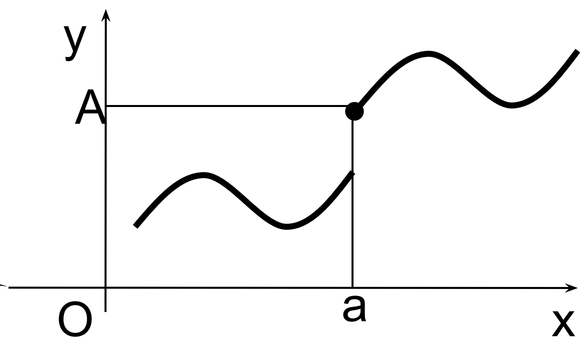
$$y = \begin{cases} x\text{, если } x \neq 0; \\ 1\text{, если } x = 0. \end{cases}$$

Предел функций при $x \to 0$ равен 0.

Примеры функций, не имеющих предел в точке







Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функций.

Формулировка теорем, когда $x \to x_0$ или $x \to \infty$ аналогичны, поэтому будем пользоваться обозначением: $\lim f(x)$

- Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов:

$$\lim[f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x)$$

- Предел произведения двух функций равен произведению пределов:

$$\lim[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x)$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim[C \cdot f(x)] = C \cdot \lim f(x)$$

Основные теоремы о пределах

- Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} \quad \left(\lim f_2(x) \neq 0\right)$$

- Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim\left[f(x)\right]^n = \left[\lim f(x)\right]^n$$

- Предел показательно – степенной функции:

$$\lim\left[f(x)\right]^{g(x)} = \left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}$$

Основные теоремы о пределах

- Если между соответствующими значениями трех функций

$$u = u(x); \quad z = z(x); \quad v = v(x)$$

выполняются неравенства: $u \le z \le v,$ при этом:

$$\lim u(x) = \lim v(x) = A$$ тогда: $$\lim z(x) = A$$

- Если функция монотонна и ограничена при или при , то существует соответственно ее левый предел:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$$

или ее правый предел:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$$

Вычисление пределов

Вычисление предела: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

начинают с подстановки предельного значения в функцию

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения в функцию получаются выражения вида:

то предел будет равен:

$$\frac{C}{0} = \infty \qquad \frac{C}{\infty} = 0$$

Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения в функцию получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0\cdot\infty;\quad 1^{\infty};\quad 0^{0};\quad 0^{\infty};\quad \infty^{0};\quad \infty-\infty$$

Эти выражения называются неопределенности, а вычисление пределов в этом случае называется раскрытие неопределенности.

Вычисление предела функции в точке

Сначала просто пытаемся подставить число в функцию

$$\lim_{x\to 3}(x^2-5x+8)=9-15+8=2$$

Найдем $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x^2-x+4}.$$

Предел числителя $$\lim_{x\to 3}(x^2-5x+8)=9-15+8=2$$

Предел знаменателя $$\lim_{x\to 3}(x^2-x+4)=9-3+4=10$$

.

Используя теорему о пределе частного, получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x^2-x+4}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+8)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-x+4)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

Найдем

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x-3}.$$

Предел числителя $\lim_{x\to 3}(x^2-5x+8)=9-15+8=2$

Предел знаменателя равен нулю, поэтому теорему о пределе частного применять нельзя.
Величина 1/(x-3) является бесконечно большой величиной при $x\to 3$.

Тогда

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x-3}=\infty.$$

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{18}{-2}=-9$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x+1-1}}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

Если f(x) – дробно – рациональная функция, необходимо разложить на множители числитель и знаменатель дроби

Если f(x) – иррациональная дробь, необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\left[\frac{C}{\infty}=0\right]=\frac{2+0+0}{4+0+0}=\frac{1}{2}$$

Если f(x) - дробно - рациональная функция или иррациональная дробь необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на x в старшей степени

Раскрытие неопределенности

Для того, чтобы раскрыть неопределенность ∞/∞ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\frac{\infty}{\infty}=(^*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(^*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\dfrac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7}{x}^{\to 0}+\dfrac{15}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{9}{x^3}^{\to 0}+\dfrac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\dfrac{6}{x^2}^{\to 0}-\dfrac{3}{x^3}^{\to 0}-\dfrac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$ Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{x}^{\to 0}+\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\left[\infty-\infty\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

Умножим и разделим функцию на сопряженное выражение.

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$=\frac{2}{\infty}=0$$

Решим:

$$\lim_{x\to 3}\left(2(x+3)-\frac{x}{x-2}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^3+2x^2-x}{5x}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-25}{x-5}$$

Решить:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{5x+3}$$

$$f(x)=\frac{5x^3-1}{10x^3+5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-3x+10}{8x^3+5}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^4 - 2x^2 + 1}{12x^4 + 5}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 9x + 1}{10x^4}$$