Университетский лицей №1523

Предуниверситария НИЯУ МИФИ

Лекции по алгебре и началам анализа

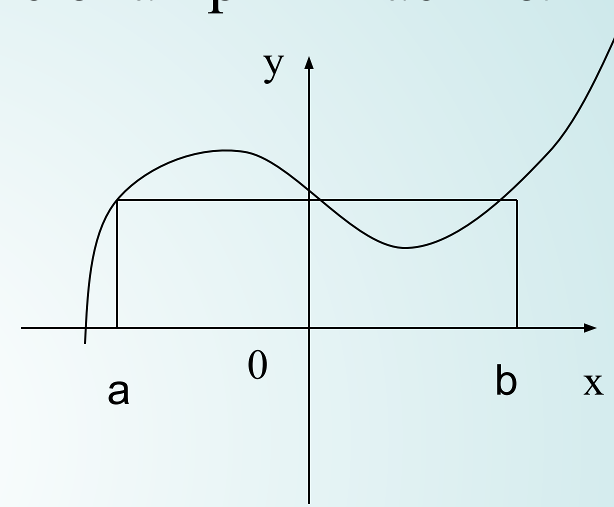
10 класс

Лекция

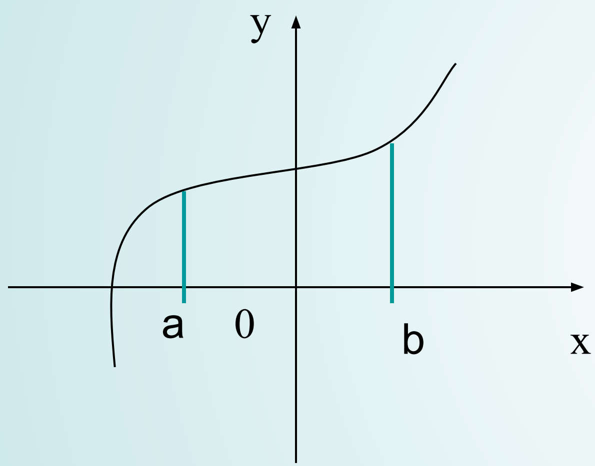
Обратные тригонометрические функции

I. Понятие обратной функции

Функция $y = f(x)$, определенная на промежутке X, называется ***обратимой,*** если любое свое значение она принимает только в одной точке промежутка X.



Функция $y = f(x)$ <u>не обратима</u> на $[a; b]$



Функция $y = f(x)$ <u>обратима</u> на $[a; b]$

<u>Теорема.</u> Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на промежутке X, то она обратима на этом промежутке.

Доказательство.

Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на X, тогда по определению возрастающей функции

$$\forall\, x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

т.о. различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции, т.е. функция обратима.

Пусть обратимая функция $y = f(x)$ определена на промежутке X, а областью значений ее является промежуток Y. Поставим в соответствие каждому $y \in Y$ то единственное значение $x \in X$, при котором $y = f(x)$ Тогда получим функцию, которая обозначается

$$x = f^{-1}(y)$$

и называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$.

Обычно для обратной функции делают переход к привычным обозначениям, т.е. аргумент обозначают буквой *x*, а значение функции *y*.

Поэтому вместо $x = f^{-1}(y)$ пишут $y = f^{-1}(x)$

<u>Замечание</u>. Графики взаимообратных функций симметричны относительно прямой $y = x$

Алгоритм получения обратной функции

1) Убедиться в том, что функция $y = f(x)$ обратима на X.

2) Из уравнения $y = f(x)$ выразить x через y.

3) В полученном равенстве поменять местами x и y.

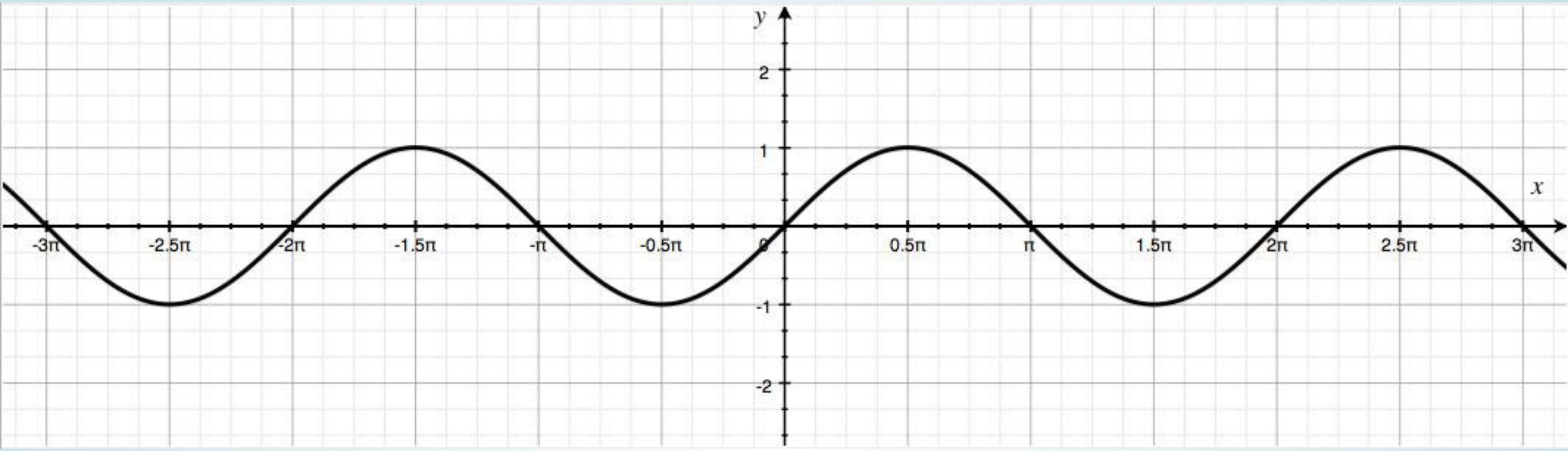
Свойства обратной функции

1) $D(f) = E(f^{-1}); \quad E(f) = D(f^{-1})$

2) Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на $D(f)$, то и функция $y = f^{-1}(x)$ возрастает (убывает) на $D(f^{-1})$;

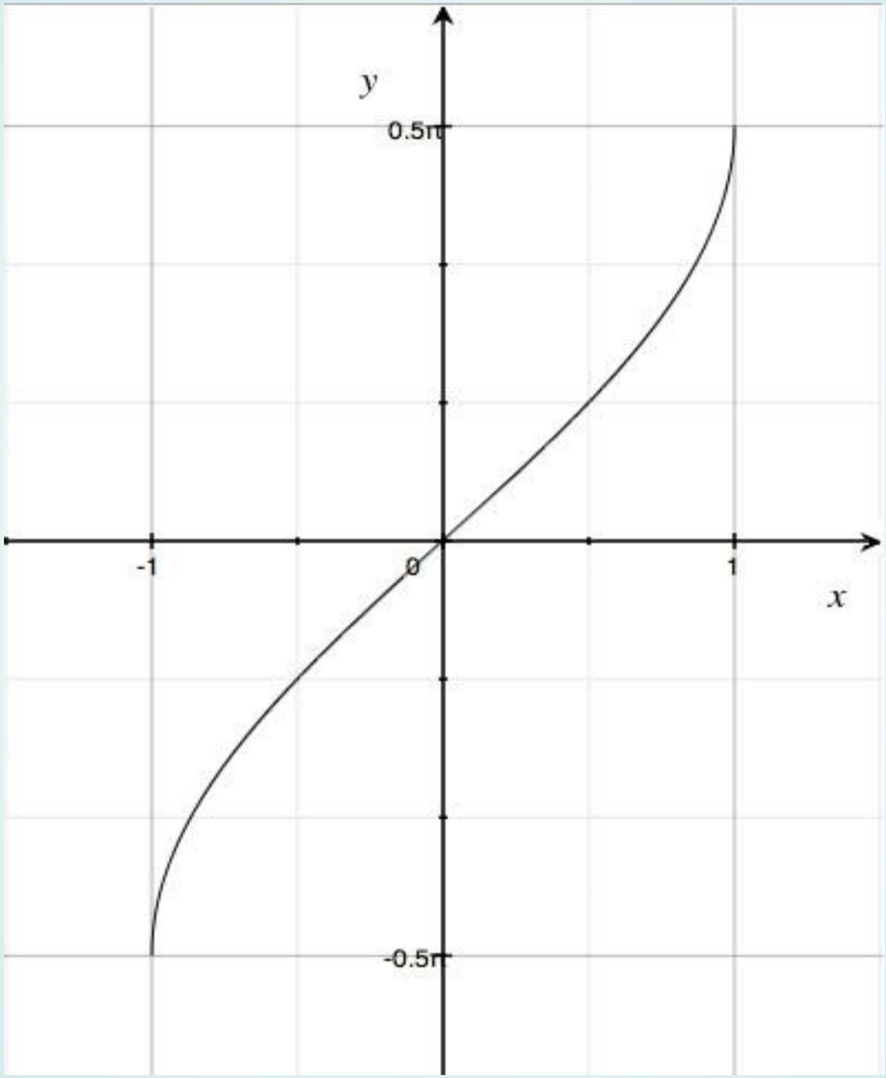
3) $f^{-1}(f(x)) = x, x \in D(f)$

II. Обратные тригонометрические функции



На промежутке $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ строго возрастает, следовательно можно рассмотреть функцию обратную к функции $y = \sin x$ на этом промежутке. Эту функцию обозначают $y = \arcsin x$.

y = arcsin x



y = arcsin x

1) Область определения $D(y) = [-1; 1]$

2) Область значений $E(y) = [-\pi/2; \pi/2]$

3) Функция нечетная *arcsin x=-arcsin (-x)* ;

4) Функция не является периодической ;

5) Функция возрастает на *D(y);*

6) Точки пересечения с осями: *x=0, y=0;*

7) Промежутки знакопостоянства *arcsin x>0 при* $x \in (0; 1]$

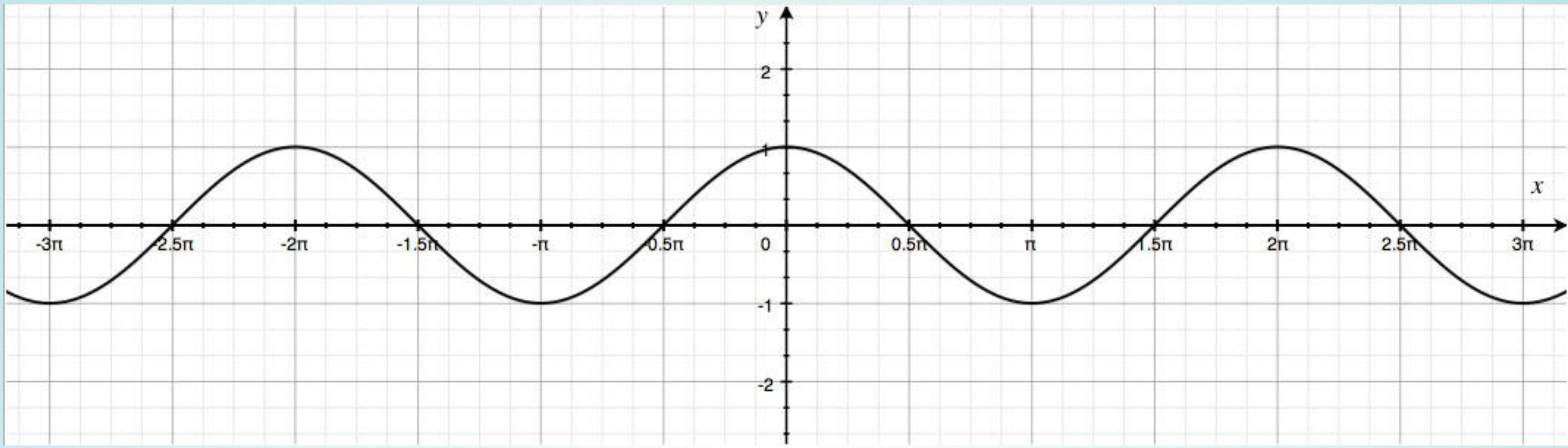
arcsin x<0 при $x \in [-1; 0)$

8) Наибольшее значение $y = \dfrac{\pi}{2}$ при *x=1*,

наименьшее значение $y = -\dfrac{\pi}{2}$ при *x=-1*;

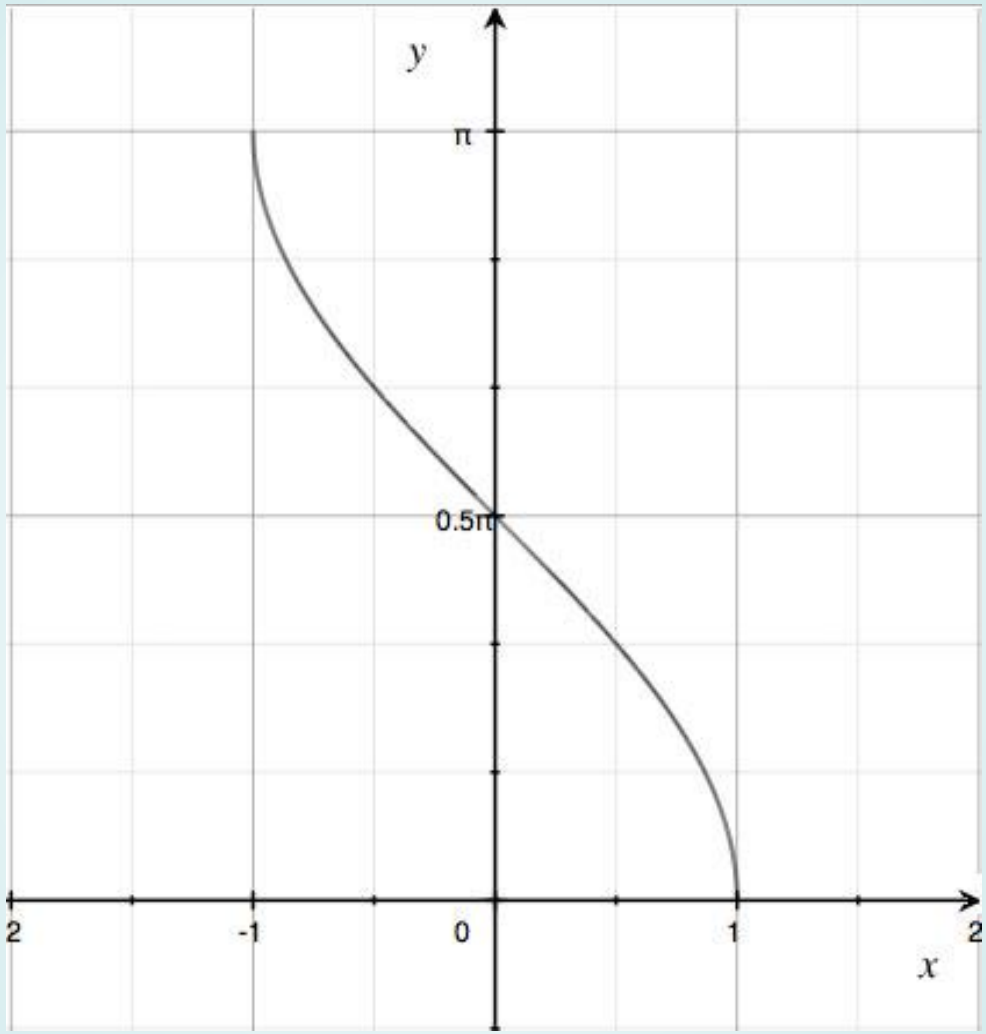
9) Ассимптот нет ;

II. Обратные тригонометрические функции



На промежутке $x \in [0; \pi]$ функция $y = \cos x$ строго убывает, следовательно можно рассмотреть функцию обратную к функции $y = \cos x$ на этом промежутке. Эту функцию обозначают $y = \arccos x$.

y = arccos x



y = arccos x

1) Область определения $D(y)=[-1;\,1];$

2) Область значений $E(y)=[0;\,\pi]$;

3) Функция не обладает определенной четностью;

4) Функция не является периодической ;

5) Функция убывает на $D(y);$

6) Точки пересечения с осями: 1) $x=0,\ y=\dfrac{\pi}{2};$ 2) $y=0,\ x=1$

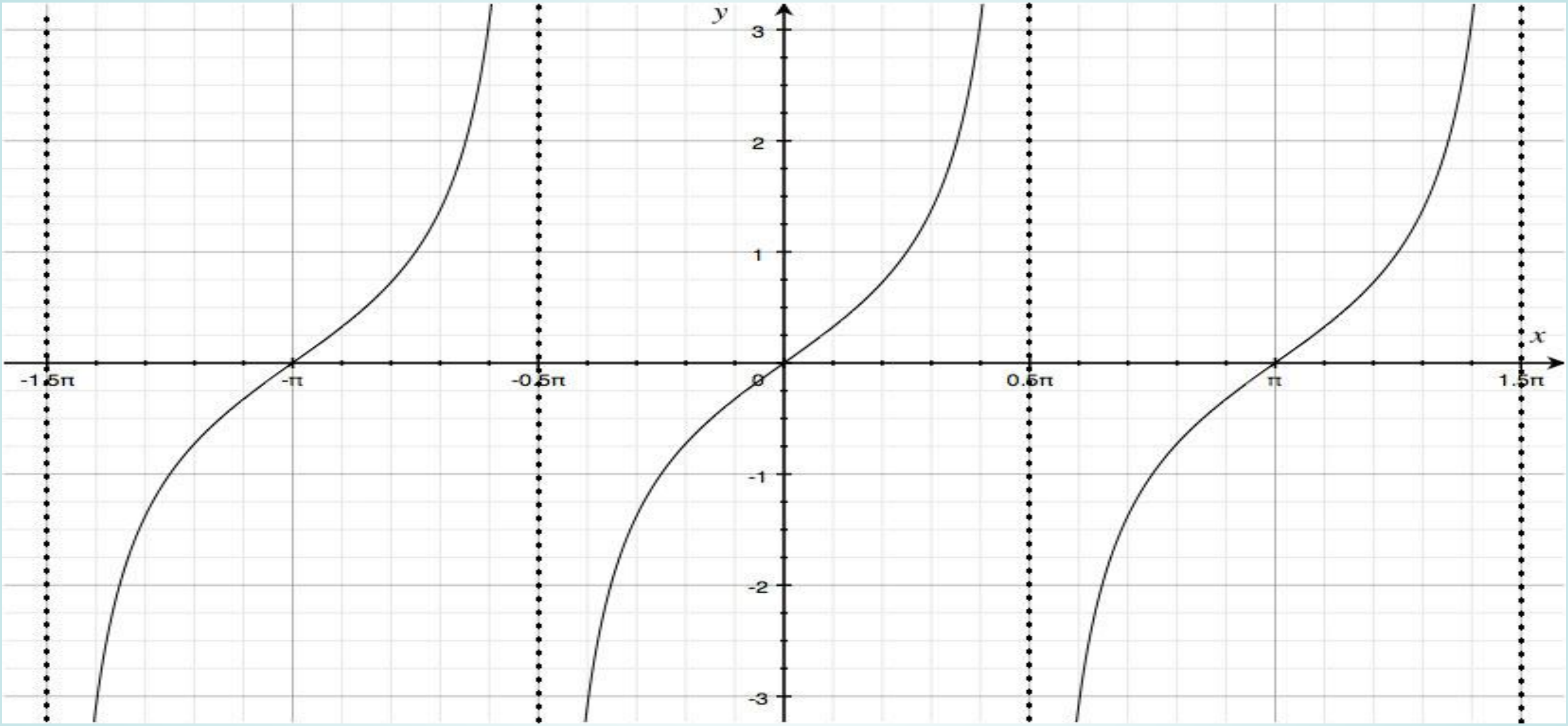
7) Промежутки знакопостоянства $arccos\ x>0$ при $x\in[-1;1]$

8) Наибольшее значение $y=\pi$ при $x=-1$,

наименьшее значение $y=0$ при $x=-1$;

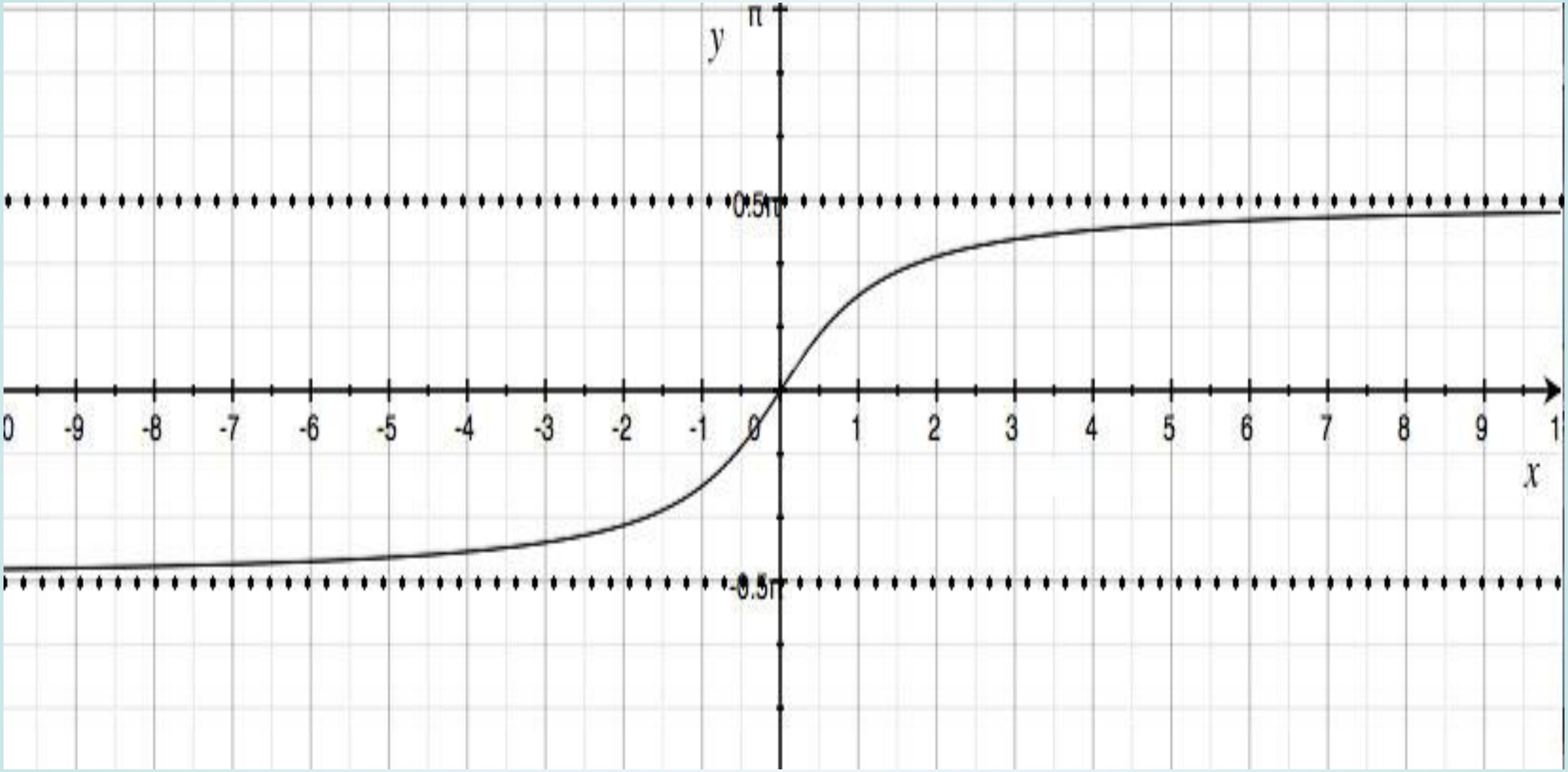
9) Ассимптот нет .

II. Обратные тригонометрические функции



На промежутке $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = tgx$ строго возрастает, следовательно можно рассмотреть функцию обратную к функции $y = tgx$ на этом промежутке. Эту функцию обозначают $y = arctgx$.

y = arctg x

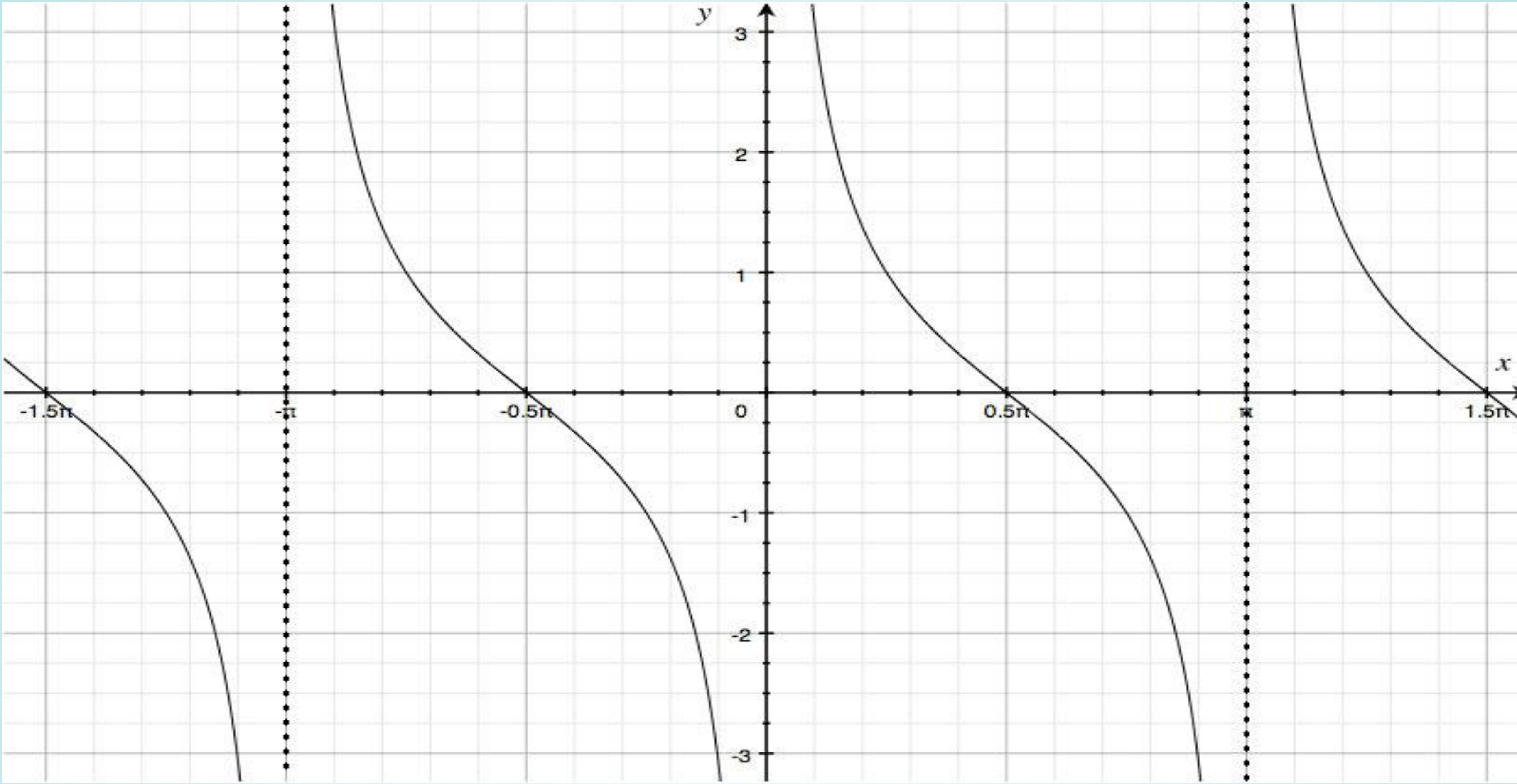


$y = \text{arctg } x$

1) Область определения $D(y)=R$;
2) Область значений $E(y)=(-\pi/2;\, \pi/2)$;
3) Функция нечетная $arctg\ x=-arcctg\ (-x)$;
4) Функция непериодическая ;
5) Функция возрастает на $D(y)$;
6) Точки пересечения с осями: $x=0,\ y=0;$
7) Промежутки знакопостоянства $arctg\ x>0$ *при* $x \in (0;+\infty)$

   $arctg\ x<0$ *при* $x \in (-\infty;0)$
8) Наибольшего и наименьшего значений не существует ;
9) Горизонтальные асимптоты $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$;

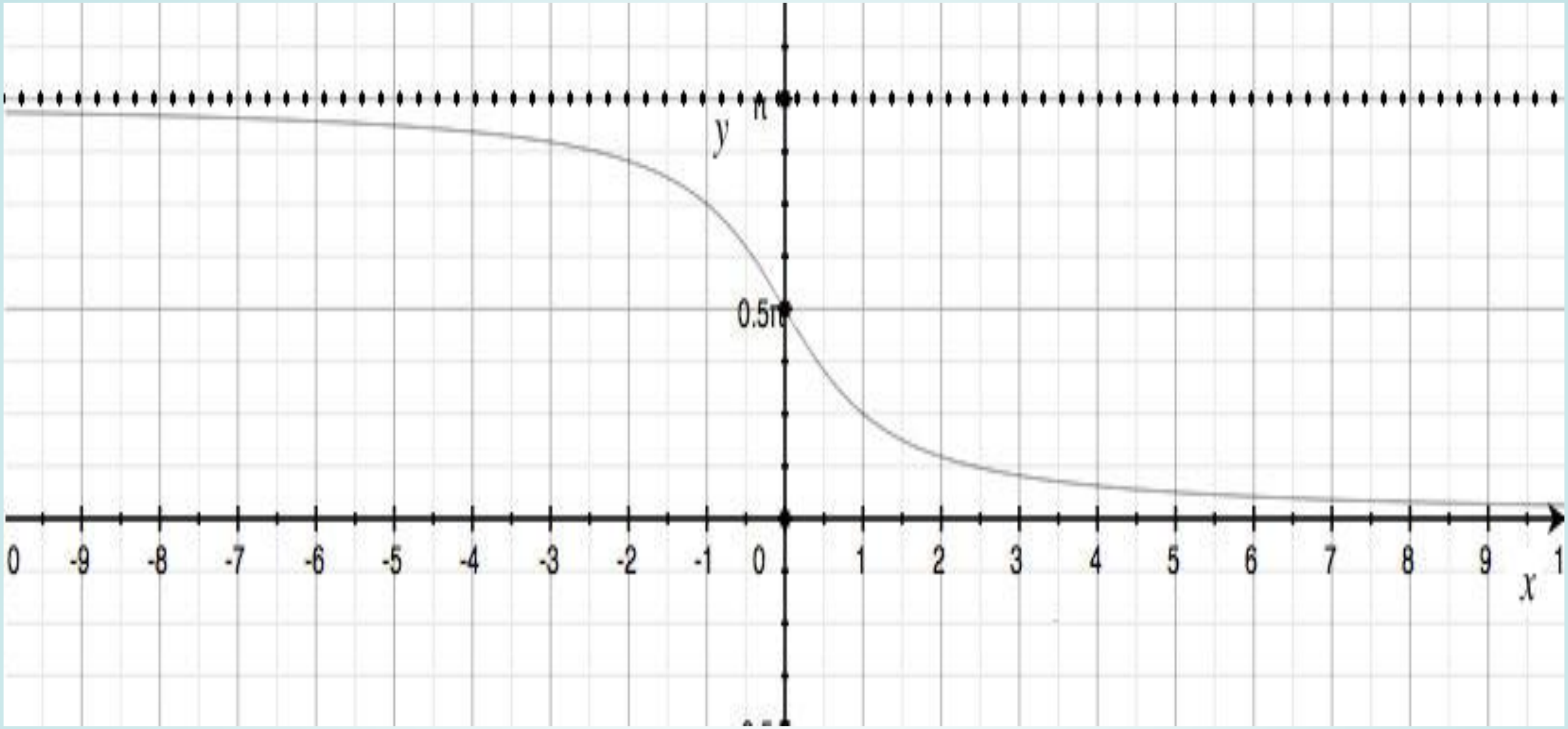
II. Обратные тригонометрические функции



На промежутке $x \in (0; \pi)$ функция $y = ctgx$ строго убывает, следовательно можно рассмотреть функцию обратную к функции $y = ctgx$

на этом промежутке. Эту функцию обозначают $y = arcctgx$.

y = arcctg x



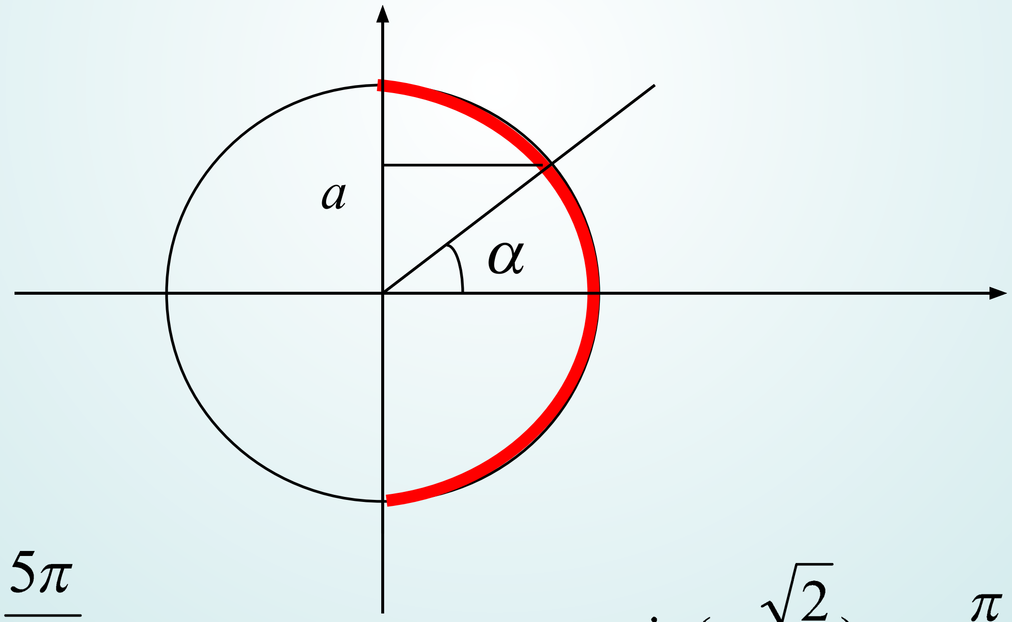
$y = \mathrm{arcctg}\ x$

1) Область определения $D(y)=R$;
2) Область значений $E(y) = (0; \pi)$;
3) Функция не имеет определенной четности ;
4) Функция непериодическая ;
5) Функция убывает на $D(y)$;
6) Точки пересечения с осями: $x=0$, $y = \dfrac{\pi}{2}$;
7) Промежутки знакопостоянства $\mathrm{arcctg}\, x>0$ *при* $x \in R$;
8) Наибольшего и наименьшего значений не существует ;
9) Горизонтальные асимптоты $y = 0$; $y = \pi$.

Смысловые значения записей arcsin a, arccos a, arctg a, arcctg a

arcsin a – это угол из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

$$\arcsin a=\alpha,\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \sin\alpha=a$$



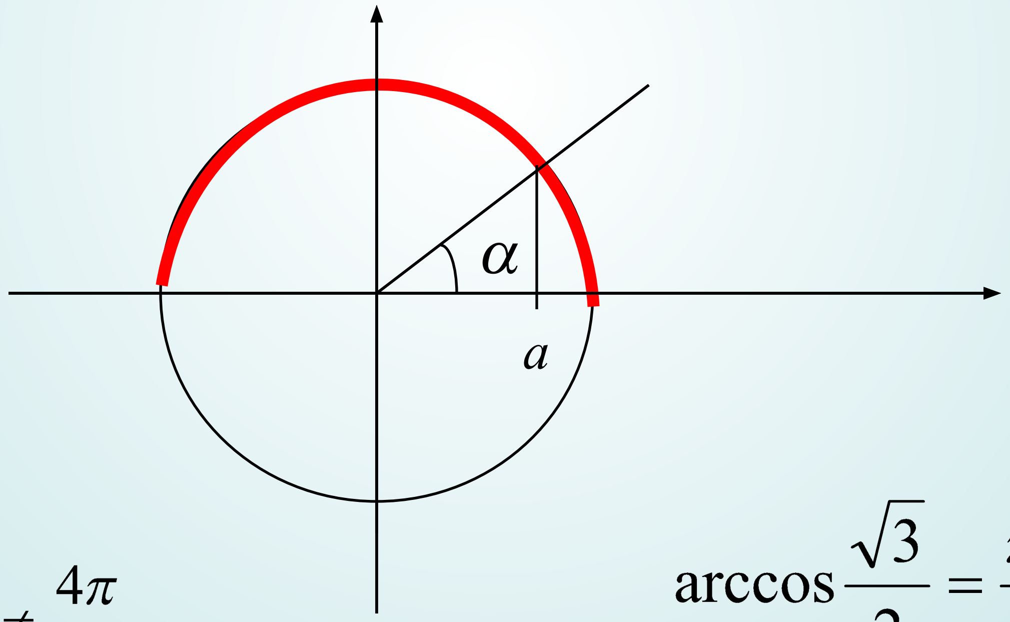
$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}\neq\frac{5\pi}{6}$$

$$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\pi}{4}\neq-\frac{3\pi}{4}\neq\frac{5\pi}{4}$$

Смысловые значения записей arcsin a, arccos a, arctg a, arcctg a

arccos a – это угол из промежутка $\left[0;\,\pi\right]$, косинус которого равен a.

$$\arccos a = \alpha,\ \alpha \in \left[0;\pi\right] \Rightarrow \cos\alpha = a$$



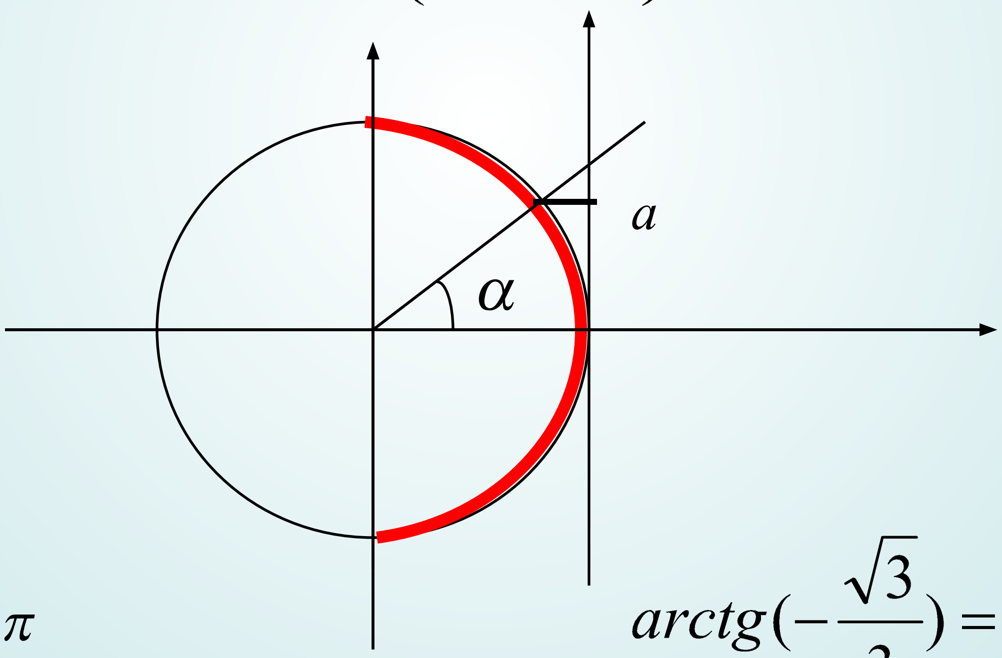
$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \neq \frac{4\pi}{3}$$

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \neq -\frac{\pi}{6}$$

Смысловые значения записей arcsin a, arccos a, arctg a, arcctg a

arctg a – это угол из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен *a*.

$$arctg\ a=\alpha,\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow tg\alpha=a$$



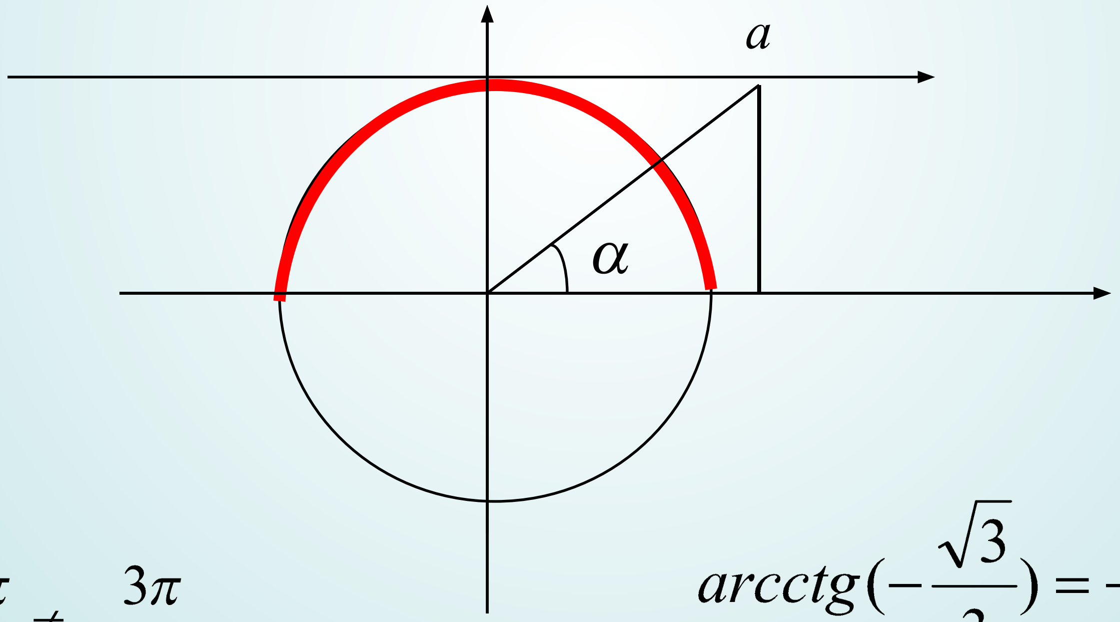
$$arctg1=\frac{\pi}{4}\neq\frac{5\pi}{4}$$

$$arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{\pi}{6}\neq\frac{5\pi}{6}$$

Смысловые значения записей arcsin a, arccos a, arctg a, arcctg a

arcctg a – это угол из промежутка $(0;\pi)$, котангенс которого равен *a*.

$$arcctg\ a=\alpha,\ \alpha\in(0;\pi)\Rightarrow ctg\alpha=a$$



$$arcctg1=\frac{\pi}{4}\neq-\frac{3\pi}{4}$$

$$arcctg(-\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{2\pi}{3}\neq-\frac{\pi}{3}$$

Основные свойства обратных тригонометрических функций

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$arctg(-x) = -arctgx$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$arcctg(-x) = \pi - arcctgx$$

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$$

$$arctgx + arcctgx = \pi/2$$