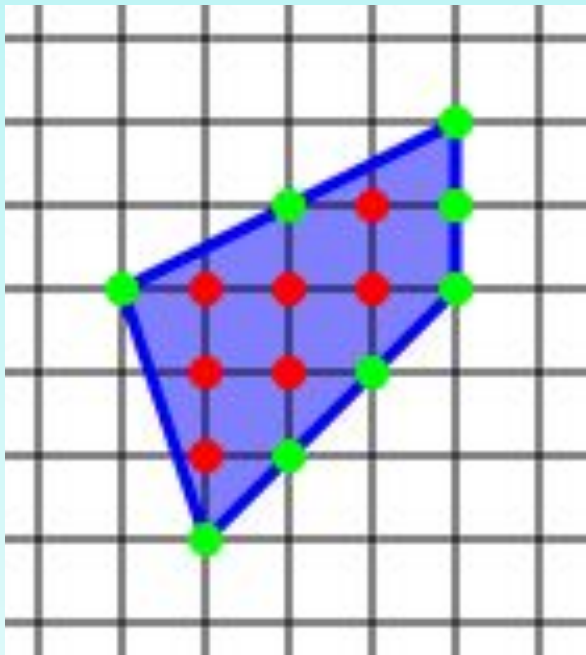


# Формула Пика для вычисления площадей многоугольников с дырками

# Формула Пика

**Теорема.** Пусть  $A$  – число целочисленных точек внутри многоугольника,  $B$  – количество целочисленных точек на его границе,  $S$  – его площадь. Тогда

$$S = A + \frac{B}{2} - 1.$$

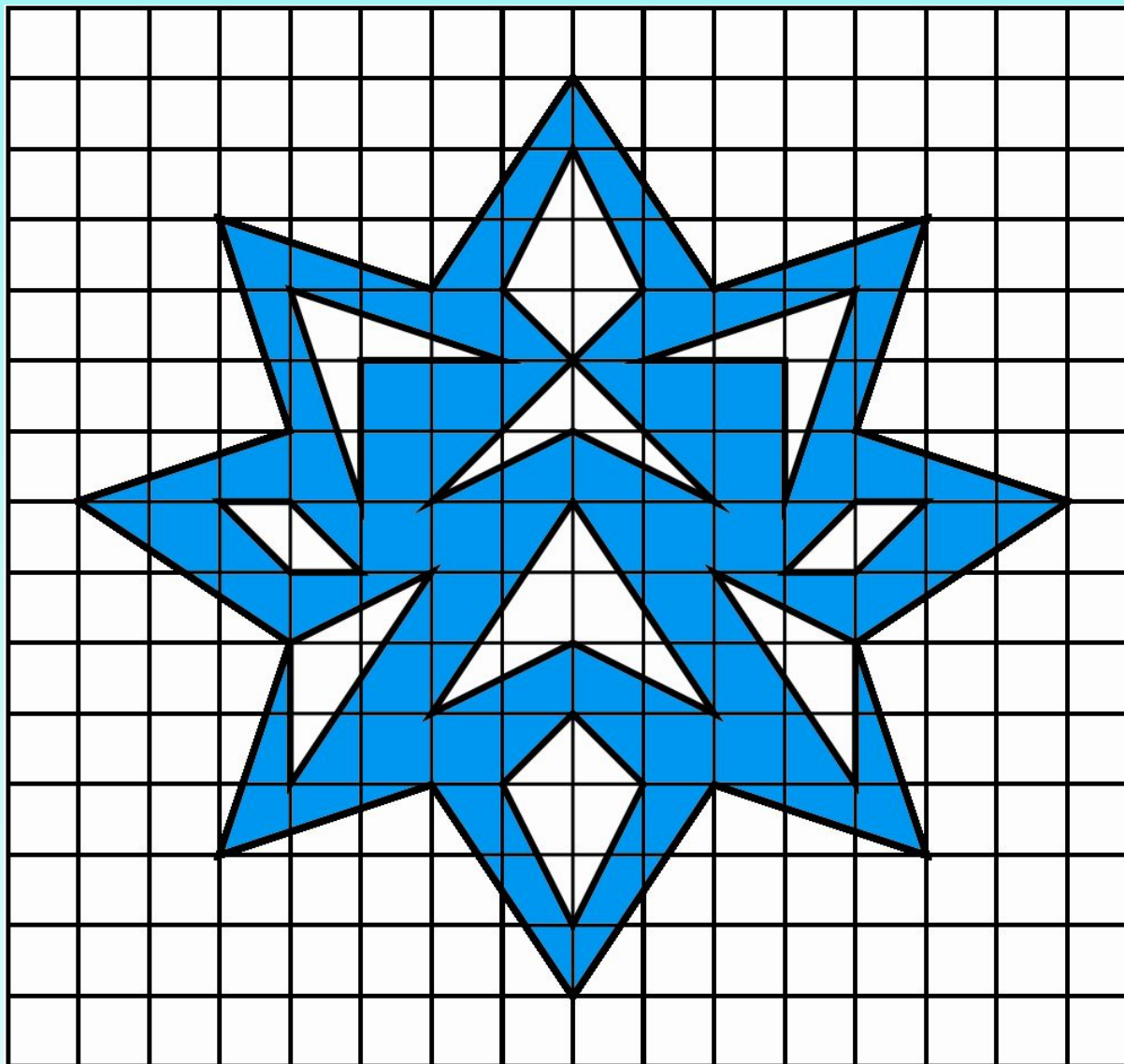


**Пример.**

$$A = 7, \quad B = 8$$

$$S = 7 + \frac{8}{2} - 1 = 10$$

# Многоугольник с дырками

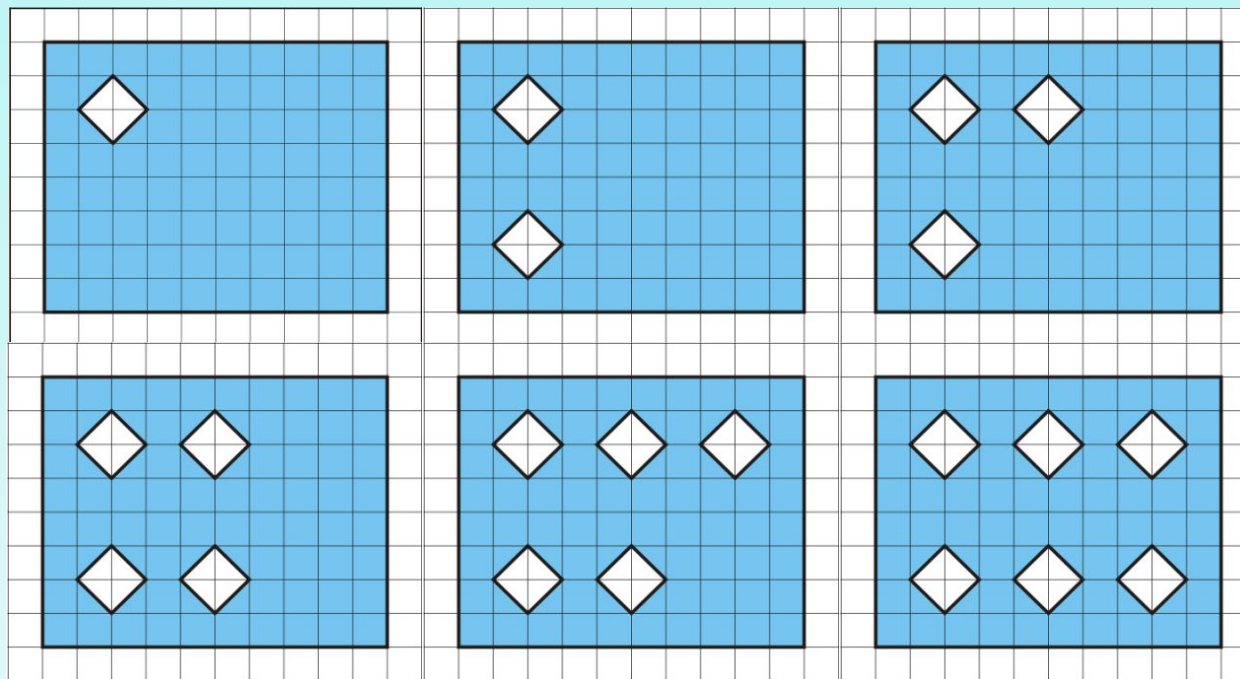


# Цели работы

- 1) выявить зависимость между расположением дырок внутри многоугольника и изменением формулы Пика для вычисления площади такого многоугольника;
- 2) получить изменённую формулу Пика для вычисления площади многоугольника с некоторыми видами дырок.

# Задача 1. Дырки, не касающиеся сторон многоугольника

Дан прямоугольник размером 10 на 8 клеток. Поочередно вырежем внутри прямоугольника, не касаясь его сторон, дырки (собственные дырки) в виде квадрата площади 2 и найдем его площадь по формуле Пика.



# Таблица вычисления площади многоугольника с собственными дырками

Количество дырок	Площадь прямоугольника с дырками	Величина по формуле площади Пика	Величина отличия
1	$80 - 1 \cdot 2 = 78$	$(63 - 1 \cdot 5) + \frac{36 + 1 \cdot 4}{2} - 1 = 77$	1
2	$80 - 2 \cdot 2 = 76$	$(63 - 2 \cdot 5) + \frac{36 + 2 \cdot 4}{2} - 1 = 74$	2
3	$80 - 3 \cdot 2 = 74$	$(63 - 3 \cdot 5) + \frac{36 + 3 \cdot 4}{2} - 1 = 71$	3
4	$80 - 4 \cdot 2 = 72$	$(63 - 4 \cdot 5) + \frac{36 + 4 \cdot 4}{2} - 1 = 68$	4
5	$80 - 5 \cdot 2 = 70$	$(63 - 5 \cdot 5) + \frac{36 + 5 \cdot 4}{2} - 1 = 65$	5
6	$80 - 6 \cdot 2 = 68$	$(63 - 6 \cdot 5) + \frac{36 + 6 \cdot 4}{2} - 1 = 62$	6

# Формула вычисления площади многоугольника с собственными дырками

**Теорема 1.** Площадь произвольного многоугольника с собственными дырками равна

$$S = A + \frac{B}{2} - 1 + k,$$

где  $A$  – количество собственных внутренних точек многоугольника с дырками,

$B$  – количество граничных точек многоугольника (включая точки на границе дырок),

$k$  – количество собственных дырок внутри многоугольника.

# Доказательство теоремы 1

$$S = S_M - S_D = A_M + \frac{B_M}{2} - 1 - \left( \left( A_1 + \frac{B_1}{2} - 1 \right) + \left( A_2 + \frac{B_2}{2} - 1 \right) + \dots + \left( A_k + \frac{B_k}{2} - 1 \right) \right)$$

Количество собственных внутренних точек многоугольника с дырками

$$A = A_M - (A_1 + A_2 + \dots + A_k) - (B_1 + B_2 + \dots + B_k)$$

Количество граничных точек многоугольника (включая границы дырок)

$$B = B_M + (B_1 + B_2 + \dots + B_k)$$

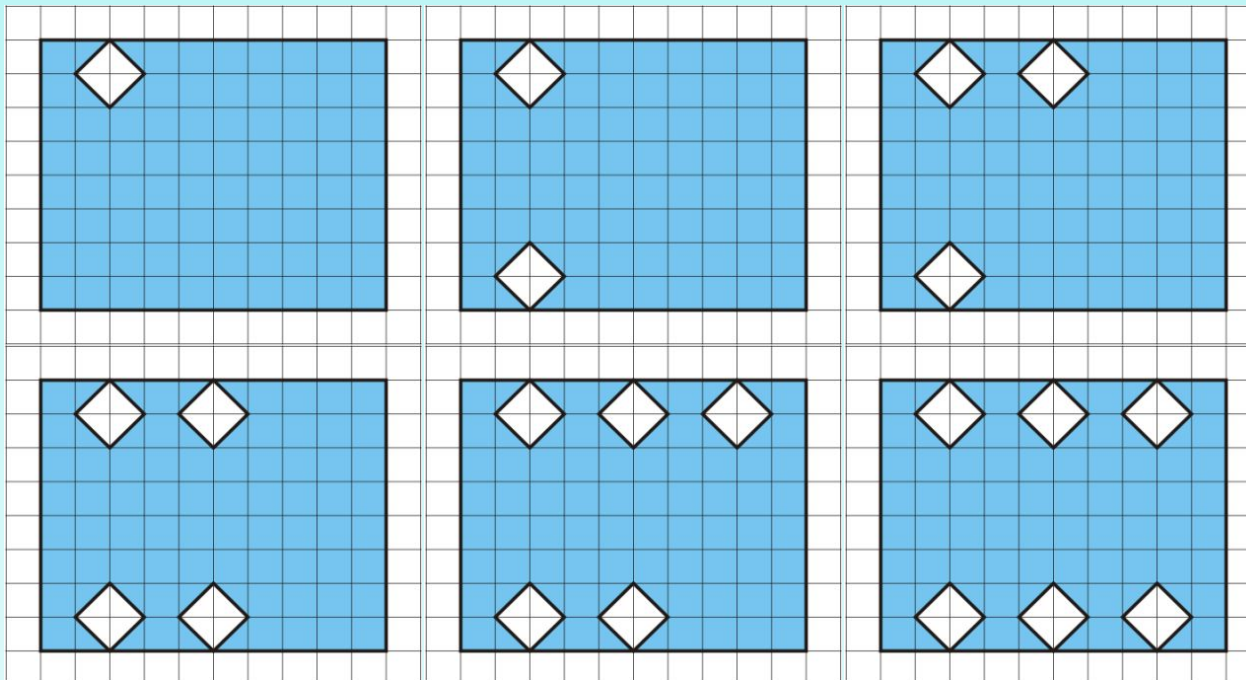
Подставляя выражения для  $A_M$  и  $B_M$  в формулу, получим

$$S = A + (A_1 + \dots + A_k) + (B_1 + \dots + B_k) + \frac{B - (B_1 + \dots + B_k)}{2} - 1 - \left( (A_1 + \dots + A_k) + \frac{B_1 + \dots + B_k}{2} - k \right)$$



## Задача 2. Дырки, касающиеся сторон многоугольника

Дан прямоугольник размером 10 на 8 клеток. Поочередно вырежем внутри прямоугольника, касаясь его сторон ровно в одной точке, дырки (собственные дырки) в виде квадрата площади 2 и найдем его площадь по формуле Пика.



# Таблица вычисления площади многоугольника с граничными дырками

Количество дыр	Площадь прямоугольника с дырками	Величина по формуле площади Пика	Величина отличия
1	$80 - 1 \cdot 2 = 78$	$(63 - 1 \cdot 4) + \frac{36 + 1 \cdot 3}{2} - 1 = 77,5$	0,5
2	$80 - 2 \cdot 2 = 76$	$(63 - 2 \cdot 4) + \frac{36 + 2 \cdot 3}{2} - 1 = 75$	1
3	$80 - 3 \cdot 2 = 74$	$(63 - 3 \cdot 4) + \frac{36 + 3 \cdot 3}{2} - 1 = 72,5$	1,5
4	$80 - 4 \cdot 2 = 72$	$(63 - 4 \cdot 4) + \frac{36 + 4 \cdot 3}{2} - 1 = 70$	2
5	$80 - 5 \cdot 2 = 70$	$(63 - 5 \cdot 4) + \frac{36 + 5 \cdot 3}{2} - 1 = 67,5$	2,5
6	$80 - 6 \cdot 2 = 68$	$(63 - 6 \cdot 4) + \frac{36 + 6 \cdot 3}{2} - 1 = 65$	3

# Формула вычисления площади многоугольника с граничными дырками

**Теорема 2.** Площадь произвольного многоугольника с граничными дырками равна

$$S = A + \frac{B}{2} - 1 + \frac{k}{2},$$

где  $A$  – количество собственных внутренних точек многоугольника с дырками,

$B$  – количество граничных точек многоугольника (включая границы дырок),

$k$  – количество граничных дырок внутри многоугольника.

## Доказательство теоремы 2

$$S = S_M - S_D = A_M + \frac{B_M}{2} - 1 -$$

$$- \left( \left( A_1 + \frac{B_1}{2} - 1 \right) + \left( A_2 + \frac{B_2}{2} - 1 \right) + \dots + \left( A_k + \frac{B_k}{2} - 1 \right) \right)$$

Количество собственных внутренних точек многоугольника с дырками

$$A = A_M - (A_1 + A_2 + \dots + A_k) - (B_1 - 1 + B_2 - 1 + \dots + B_k - 1),$$

Количество граничных точек многоугольника (включая границы дырок)

$$B = B_M + (B_1 - 1 + B_2 - 1 + \dots + B_k - 1).$$

Подставляя выражения для  $A_M$  и  $B_M$  в формулу, получим

$$S = S_M - S_D = A + (A_1 + \dots + A_k) + (B_1 + \dots + B_k) - k +$$

$$+ \frac{B - (B_1 + \dots + B_k) + k}{2} - 1 - \left( (A_1 + \dots + A_k) + \frac{B_1 + \dots + B_k - k}{2} \right)$$

# Формула вычисления площади многоугольника с дырками двух видов

**Теорема 3.** Площадь произвольного многоугольника с собственными и граничными дырками равна

$$S = A + \frac{B}{2} - 1 + k + \frac{m}{2},$$

$A$  – количество собственных внутренних точек многоугольника с дырками,

$B$  – количество граничных точек многоугольника (включая точки на границе дырок),

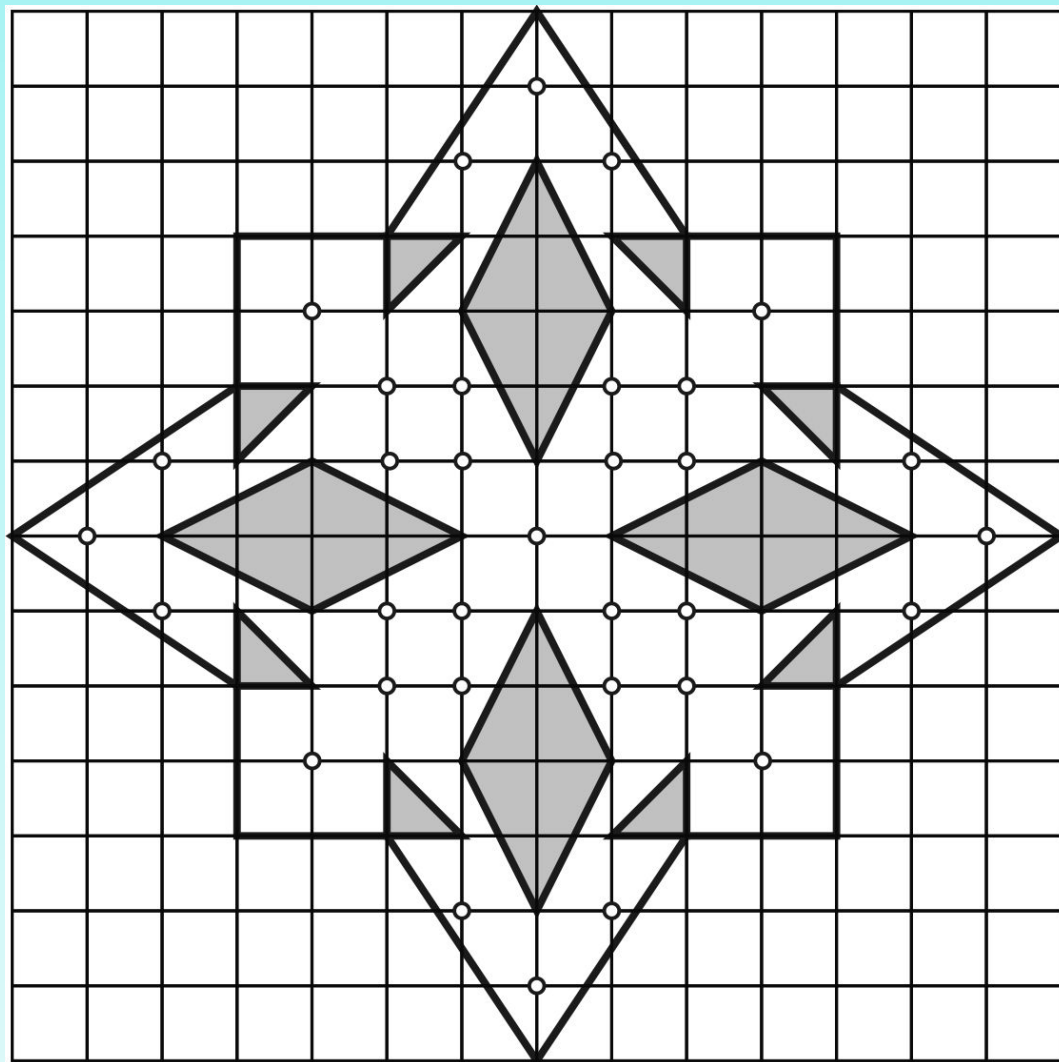
$k$  – количество собственных дырок многоугольника,

$m$  – количество граничных дырок многоугольника.

**Пример.** Вычислить площадь вырезанной из бумаги снежинки, изображенной на рисунке (дырки закрашены).

Эта фигура имеет  $k=4$  внутренних дырки,  $m=8$  граничных дырок,  $A=33$  внутренних точек,  $B=56$  граничных точек. Тогда по теореме 3 площадь этой «снежинки» равна

$$S = 33 + \frac{56}{2} - 1 + 4 + \frac{8}{2} = 68$$



# Заключение

В работе рассмотрены два различных случая расположения дырок внутри многоугольника: без касания сторон многоугольника и с касанием сторон многоугольника в одной точке.

Основные результаты работы :

1) мы установили, что существует зависимость между расположением дырок внутри многоугольника и изменением формулы Пика для вычисления площади такого многоугольника;

2) получили изменённые формулы Пика для вычисления площади многоугольника с тремя видами дырок.



**Спасибо за внимание!**