Срез знаний

1 вариант

1) Следует ли для непрерывных случайных величин, что если P(X=C)=0, то это событие невозможно? Почему?
2) Приведите пример дискретной случайной величины.
3) Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(X)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le -1,\\ a(x+1)^2, & \text{при} \quad -1<x\le 2,\\ 1, & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Найти значение a, построить графики F(x) и f(x).

2 вариант

1) Что представляет собой величина

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

2) Что называется многоугольником распределения?

- Кривая распределения н.с.в. X имеет вид, указанный на рисунке.

Найти выражение для $f_X(x)$, функцию распределения $F_X(x)$, вероятность события $\left\{X\in\left(\frac{1}{4};1\right)\right\}$.

3 вариант

1) Что называется плотностью вероятности случайной величины?
2) Что называют законом распределения дискретной случайной величины?

3. Является ли плотностью распределения некоторой с. в. каждая из следующих функций:

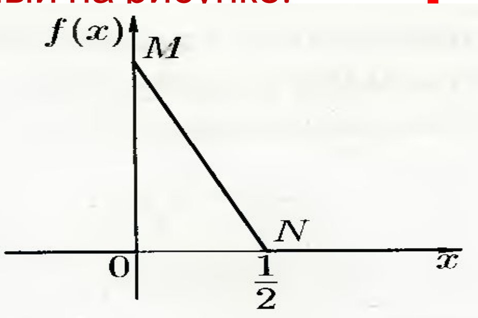
а) $f(x)=\dfrac{x}{\pi(1+x^2)}$ при $x\in(-\infty;+\infty)$;

б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{при } x\in(-1;1],\\ 0, & \text{при } x\notin(-1;1];\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0 \text{ и } x>2,\\ ax^2, & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

4 вариант

1) Как определяется произведение случайных величин?
2) Какая случайная величина называется дискретной?
3) Кривая распределения н.с.в. X имеет вид, указанный на рисунке.



Лекция 4. Числовые характеристики случайных величин

Числовые характеристики случайных величин – числовые параметры, характеризующие отдельные существенные свойства (черты) закона распределения случайных величин.

Рассматриваются две основные группы числовых характеристик случайных величин:

1) Характеристики положения:

– математическое ожидание ($M[X]$, m_x):
– мода (Mo);
– медиана (Me);

2) Характеристики рассеивания (разброса):

– дисперсия ($D[X]$, D_x);
– среднее квадратическое отклонение .

Математическим ожиданием д.с.в. X*, имеющей закон распределения*

x_1	x_2	…	x_n
p_1	p_2	…	p_n

называется число, равное сумме произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности.

Математическое ожидание случайной величины x обозначается

MX, M(X), EX, m_X, a_X или M[X].

Расчетная формула: $$M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

где *X* – дискретная случайная величина.

ТЕОРЕМА.

Среднее арифметическое значений, принимаемых случайной величиной в длинной серии опытов, приближенно равно ее математическому ожиданию.

Эта теорема выражает связь между средним арифметическим и математическим ожиданием.

Действительно:

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = x_{среднее}.$$

Математическим ожиданием н.с.в. X *с плотностью вероятности f(x), называется число*

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

Интеграл предполагается абсолютно сходящимся.

Смысл математического ожидания остается таким же, как и в случае дискретных случайных величин. Меняется вид формулы путем замены:

$$x_i \to x$$

$$p_i \to f(x)dx$$

$$\sum \to \int$$

СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

1

Математическое ожидание от постоянной величины равно этой постоянной величине:

$$M[C]=C, \quad C=const$$

Доказательство:

Рассмотрим ряд распределения случайной величины X=C:

C
1

Тогда математическое ожидание будет равно

M[C]=C

2

Постоянную величину можно выносить за знак математического ожидания:

$$M[c\,X]=c\,M[X],$$ ***где*** $c=const.$

Доказательство:

Используем определение мат. ожидания:

$$M[cX] = \sum_i c \cdot x_i \cdot p_i$$

Постоянную c можно вынести за знак суммы:

$$c\sum_i x_i p_i = c \cdot M[X]$$

3

Математическое ожидание суммы случайных величин Х и У равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$M[X+Y]=M[X]+M[Y]$$

Доказательство:

Распишем математическое ожидание суммы двух случайных величин по определению:

$$M[X+Y]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}p_{ij}+\sum_{j=1}^{n}y_j\sum_{i=1}^{m}p_{ij}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i+\sum_{j=1}^{m}y_j p_j=MX+MY.$$

4

Математическое ожидание отклонения случайной величины X от ее математического ожидания равно нулю, т.е.:

$$M[X-MX]=0.$$

Доказательство:

Согласно свойствам 1 и 3, имеем:

$$M[X-MX]=MX-M[MX]=MX-MX=0.$$

Разность X-MX называется отклонением с.в. X от ее математического ожидания и обозначается:

$$\overset{\circ}{X}=X-MX.$$

$\overset{\circ}{X}$ **- центрированная случайная величина.**

5

Математическое ожидание произведения независимых случайных величин X и У равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$M[XY]=M[X]M[Y]$$

Доказательство:

Распишем математическое ожидание по определению:

$$M[XY]=\sum_{c} c\cdot p(XY=c)=\sum_{a,b} a\cdot b\cdot p(X=a,Y=b) \; =$$

Для независимых случайных величин:

$$p(X=a,Y=b)=p(X=a)\cdot p(Y=b)$$

Тогда:

$$=\; \sum_{a} a\cdot p(X=a)\sum_{b} b\cdot p(X=b)=M[X]\cdot M[Y]$$

Свойства математического ожидания, доказанные для д.с.в., остаются справедливыми и для непрерывных с.в.

Например,

$$Mcc = \int_{-\infty}^{+\infty} cx \cdot f(x)dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = cMX.$$

Пример 2.4. В лотерее имеется 1000 билетов, из них выигрышных: 10 по 500 руб, 50 по 50 руб, 100 по 10 руб, 150 по 1 руб. Найти математическое ожидание выигрыша на один билет.

❍ Ряд распределения с. в. X — суммы выигрыша на один билет таков:

X	500	50	10	1	0
p	0,01	0,05	0,1	0,15	0,69

(Контроль: $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$.) Находим MX:

$MX = 500 \cdot 0{,}01 + 50 \cdot 0{,}05 + 10 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}15 + 0 \cdot 0{,}69 = 8{,}65$ руб. ●

ПРИМЕР.

Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ ax^2, & 0<x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

Найти величину a, плотность вероятности,
вероятность попадания на участок (0.25-0.5) и
математическое ожидание.

РЕШЕНИЕ.

1. **Так как функция распределения** $F(x)$ **непрерывна, то при** $x=1$ $ax^2=1$, **следовательно,** $\underline{a=1}$.
2. **Плотность вероятности находится, как производная от функции распределения:**

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 2x, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

3. **Вычисление вероятности попадания на заданный участок может быть произведено двумя способами: с помощью функции распределения и с помощью плотности вероятности.**

<u>1 способ.</u>

Используем формулу нахождения вероятности через функцию распределения:

$$p(0.25 \le x < 0.5) = F(0.5) - F(0.25) =$$

$$= 0.5^2 - 0.25^2 = 0.1875$$

2 способ.

Используем формулу нахождения вероятности через плотность вероятности:

$$p(0.25 < X < 0.5) = \int_{0.25}^{0.5} 2x dx = x^2 \Big|_{0.25}^{0.5} = 0.1875$$

4. Находим математическое ожидание:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$M[X] = \int_{0}^{1} x \cdot 2x dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3}$$

ПРИМЕР.

Случайная величина X подчиняется закону распределения

$$f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<1 \\ 0, & x<0, x>1 \end{cases}$$

Найти величину a и функцию распределения.

РЕШЕНИЕ.

1. **Для нахождения параметра *a* используем свойство плотности распределения:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_0^1 a \cdot x \cdot dx = \left.\frac{ax^2}{2}\right|_0^1 = \frac{a}{2} = 1$$

$$a = 2$$

2. **Функция распределения находится путем интегрирования плотности вероятности:**

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{0}^{x} 2xdx=x^2$$

При ***0<x<1.*** **Тогда:**

$$\boxed{F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}}$$

Контрольные вопросы

1. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?
2. Свойства математического ожидания.
3. Доказать, что математическое ожидание числа появлений события А в одном испытании равно вероятности появления p события А.
4. Доказать, что математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа появлений события А в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p – равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании, т. е. доказать, что M (X) = np.
5. Доказать, что M (Y) = aM (X) + b, если Y = aX + b.
6. Доказать, что M (X − M (X)) = 0.
7. Доказать, что M (M (X)) = M (X).
8. Доказать, что математическое ожидание дискретной случайной величины заключено между наименьшим и наибольшим её возможными значениями.
9. Доказать, что если случайные величины X_1 , X_2 положительны и одинаково распределены, то $M\left(\dfrac{X_1}{X_1+X_2+\ldots+X_n}\right)=\dfrac{1}{n}.$

10. Случайная величина задана плот $f(x) = 0{,}5e^{-|x|}$. еления. Найти математическое ожидание случай