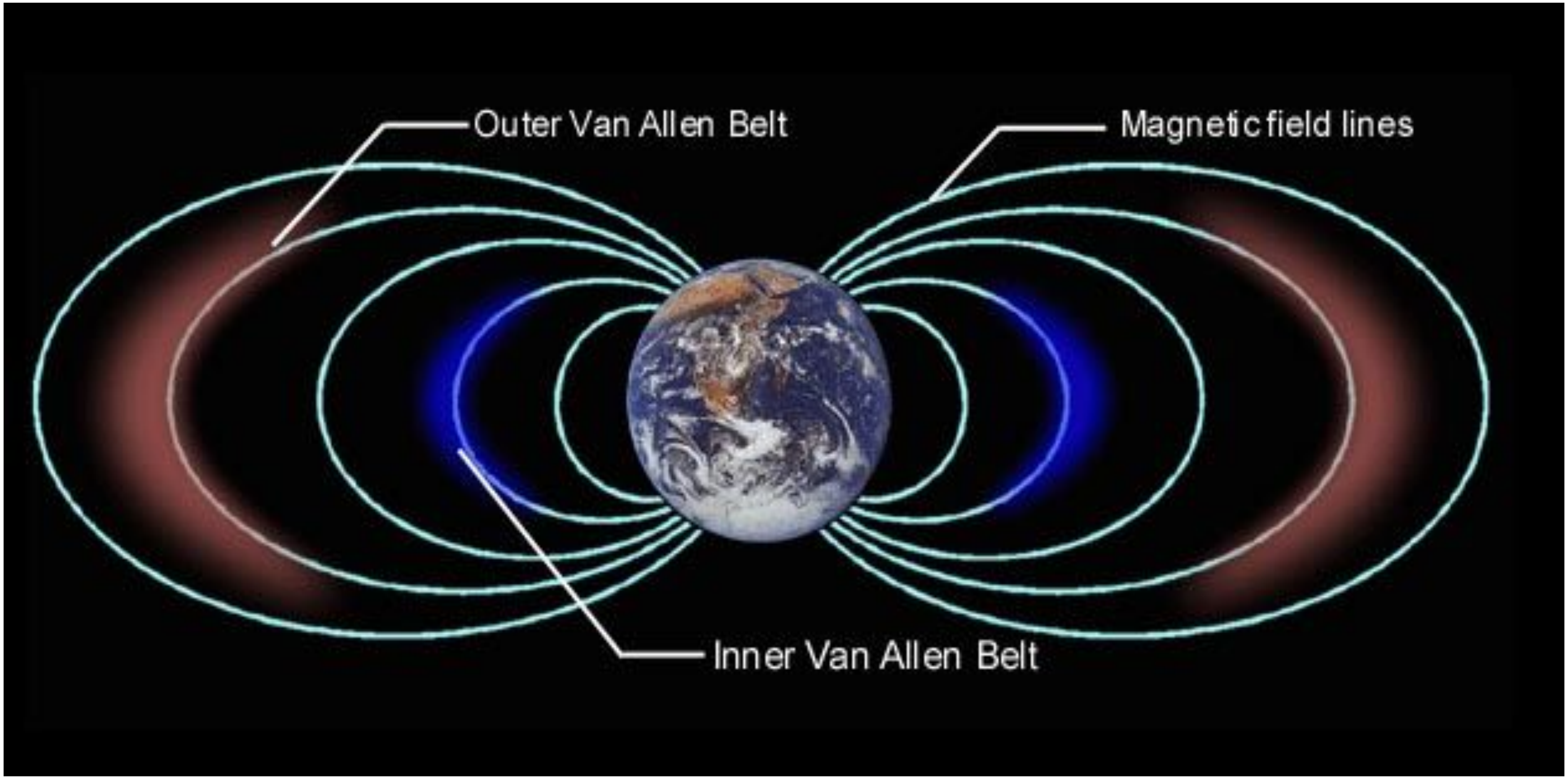
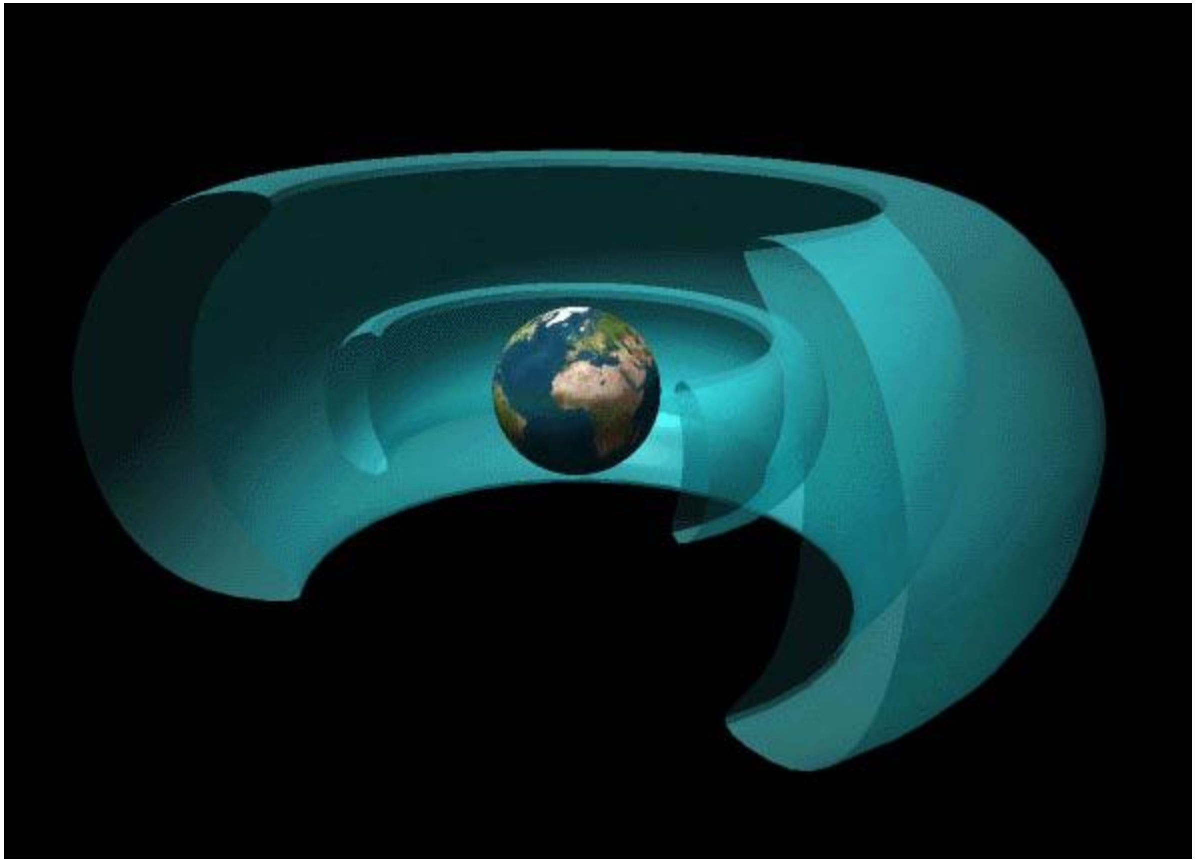
Резонансное взаимодействие энергичных электронов с монохроматической свистовой волной, распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля в неоднородной плазме (магнитосфере)

Радиационные пояса Земли



Картинка из Интернета

Радиационные пояса Земли



Картинка из Интернета

1. Свисты - волны ОНЧ диапазона (1–30 кГц) в магнитосфере

Электронная гирочастота f_{H} в плазмосфере ($L \lesssim (2-4)$)меняется от 1000 кГц до 15 кГц, а плазменная электронная частота f_p, как правило, выше f_{H}. Таким образом, ОНЧ диапазон попадает в интервал

$$f_{\text{H}i} \ll f < f_{\text{H}}$$

где $f_{\text{H}i}$ - ионная гирочастота, что соответствует свистовым волнам.

Нижняя гибридная частота

$$f_{\text{LH}}^2 = \frac{1}{M_{eff}} \frac{f_p^2 f_{\text{H}}^2}{(f_p^2 + f_{\text{H}}^2)}\,; \qquad \frac{1}{M_{eff}} = \frac{m_e}{n_e} \sum_{\text{ions}} \frac{n_\alpha}{m_\alpha}\,,$$

где n_e, m_e - заряд и масса электрона, n_α, m_α - то же для ионов сорта α.

2. Дисперсионное соотношение и поляризация свистов

$$\omega^2 = \omega_{\mathrm{LH}}^2 \frac{k^2}{k^2+q^2} + \omega_{\mathrm{H}}^2 \frac{k_\parallel^2 k^2}{(k^2+q^2)^2}$$

$$\equiv \frac{\omega_{\mathrm{LH}}^2}{1+q^2/k^2} + \frac{\omega_{\mathrm{H}}^2 \cos^2\theta}{(1+q^2/k^2)^2}, \tag{1}$$

где

$$k^2 = k_\parallel^2 + k_\perp^2 \, ; \quad \theta = \cos^{-1}(k_\parallel/k) \, ; \quad q = \omega_p^2/c^2 \, .$$

Из (1) следует

$$\omega_{\mathrm{H}}^2 \cos^2\theta > \omega^2 - \omega_{\mathrm{LH}}^2 \, , \tag{2}$$

так что для $\omega > \omega_{\mathrm{LH}}$, угол волновой нормали θ не может приближаться к $\pi/2$. Равенство в соотношении (2) определяет резонансный конус для волн с $\omega > \omega_{\mathrm{LH}}$ при котором $k \to \infty$.

При $\omega < \omega_{\mathrm{LH}}$ угол волновой нормали может проходить через 90^o, что ведет к изменению знака продольной групповой скорости.

При $\omega^2 \gg \omega_{\mathrm{LH}}^2$, дисперсионное уравнение (1) сводится к известному выражению

$$\omega = \omega_{\mathrm{H}} |\cos\theta| \frac{k^2}{k^2 + q^2}\,, \tag{3}$$

которое соответствует показателю преломления

$$N^2 \equiv \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega_{\mathrm{H}} |\cos\theta| - \omega)}\,. \tag{4}$$

В случае продольного распространения

$$\omega = \omega_{\mathrm{H}} \frac{k^2}{k^2 + q^2}\,, \quad N^2 \equiv \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega_{\mathrm{H}} - \omega)}\,.$$

3. Поляризация свистовой волны

В плоской волне

$$\mathcal{B} \equiv Re\{\mathbf{B}\} = Re\{\mathbf{b}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\} \ ; \quad \mathcal{E} \equiv Re\{\mathbf{E}\} = Re\{\mathbf{a}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}\} \ ; \quad (5)$$

прчем

$$\mathbf{b} = \frac{c}{\omega}[\mathbf{k}\times\mathbf{a}] \ . \quad (6)$$

При $\omega^2 \gg \omega_{\mathrm{LH}}^2$ и $\omega_p^2 \gg \omega_{\mathrm{H}}^2$ поляризационные коэффициенты имеют вид:

$$a_x = 1 \ ; \quad a_y = i\,\frac{\omega_{\mathrm{H}}\,|\cos\theta| - \omega}{\omega_{\mathrm{H}} - \omega\,|\cos\theta|} \ ; \quad a_z = \frac{\omega\sin\theta\,\mathrm{sign}(\cos\theta)}{\omega_{\mathrm{H}} - \omega\,|\cos\theta|} \ ;$$

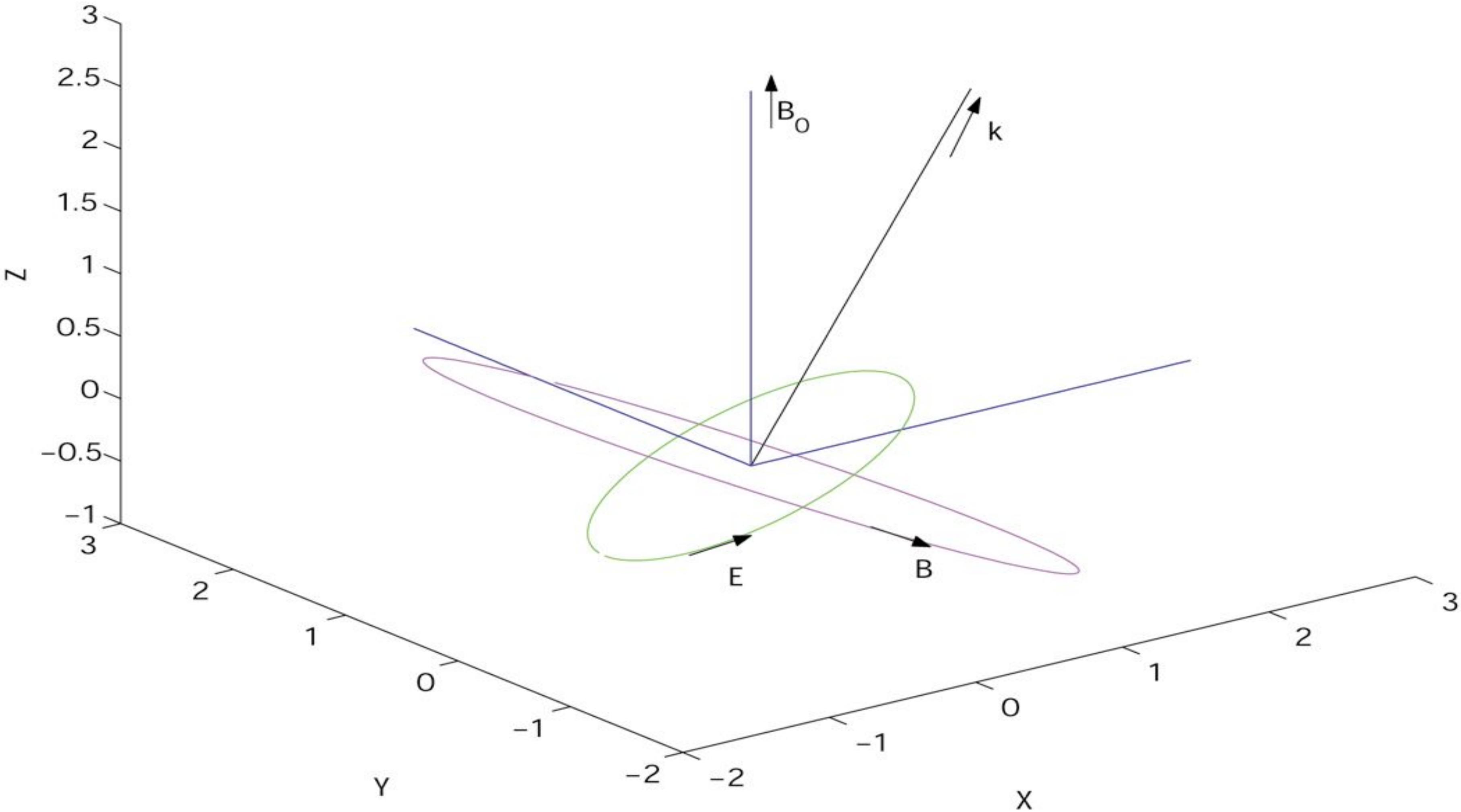
$$b_x = -iN\cos\theta\,\frac{\omega_{\mathrm{H}}\,|\cos\theta| - \omega}{\omega_{\mathrm{H}} - \omega\,|\cos\theta|} \ ; \quad b_z = iN\sin\theta\,\frac{\omega_{\mathrm{H}}\,|\cos\theta| - \omega}{\omega_{\mathrm{H}} - \omega\,|\cos\theta|} \ ;$$

$$b_y = N\mathrm{sign}(\cos\theta)\,\frac{\omega_{\mathrm{H}}\,|\cos\theta| - \omega}{\omega_{\mathrm{H}} - \omega\,|\cos\theta|} \ .$$

Для магнитного поля, в частности, имеем $\mathbf{b}\perp\mathbf{k}$, и

$$(ib_x)^2 + (ib_z)^2 = b_y^2.$$

Поляризация свистовой волны



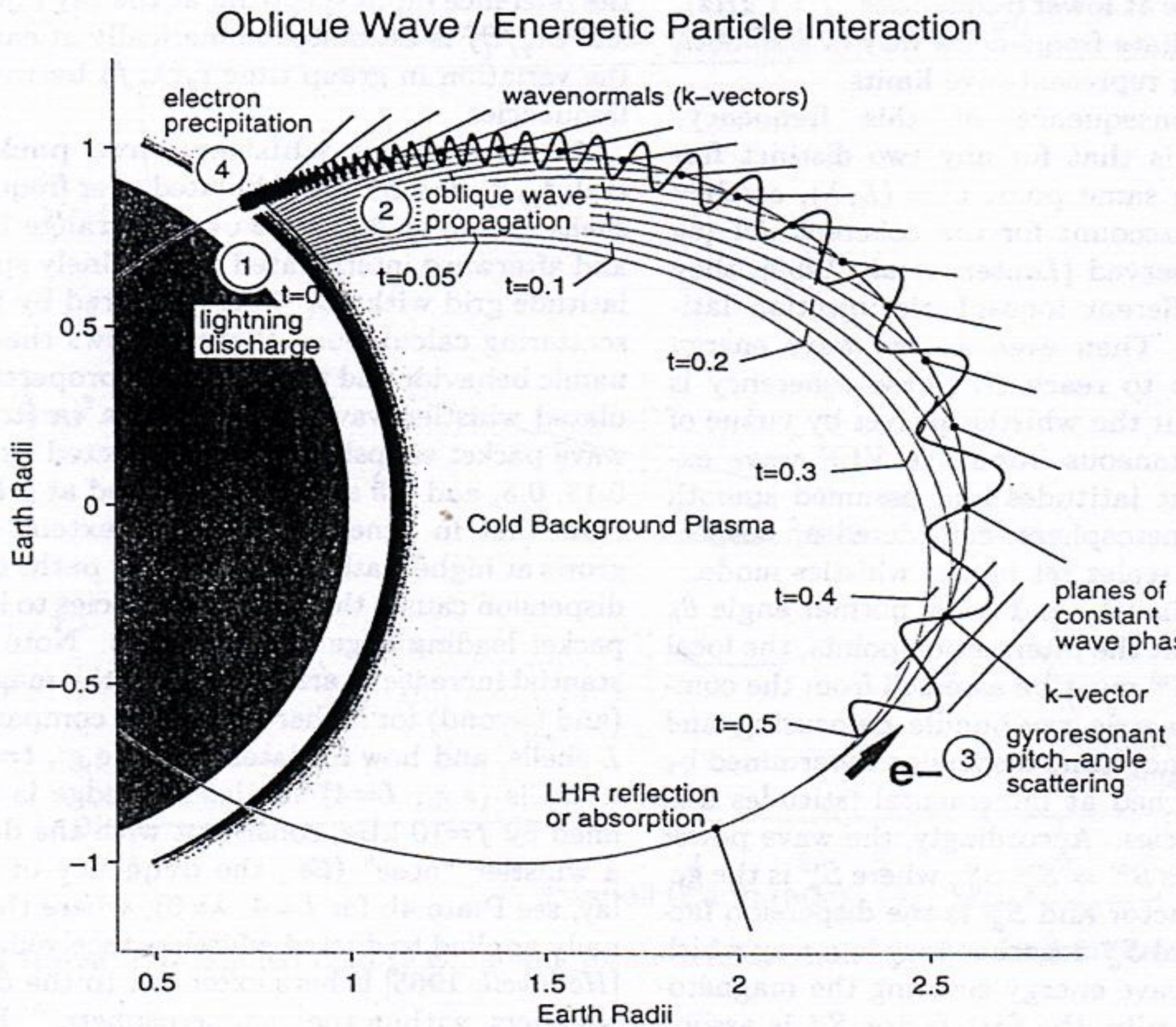
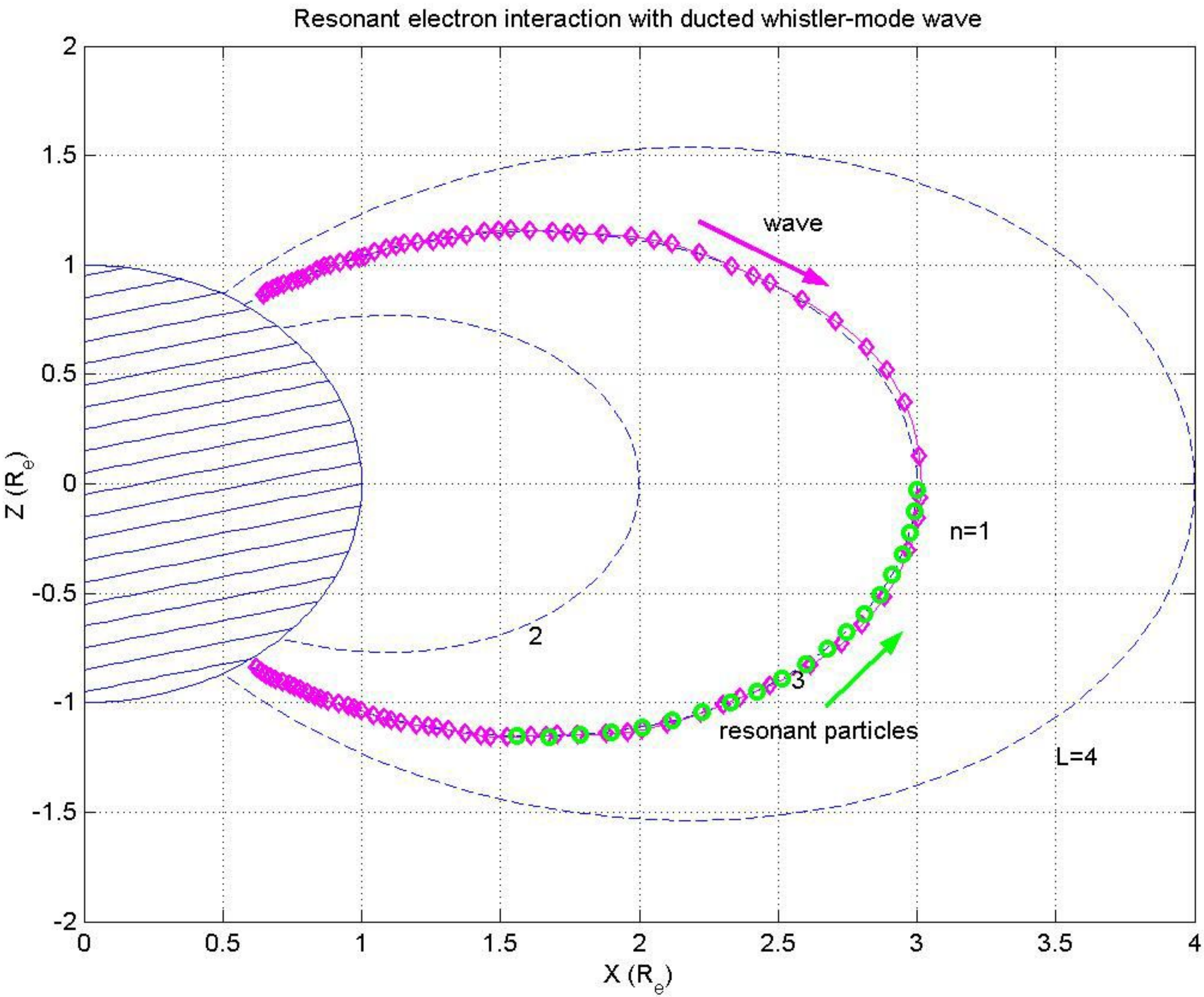


Plate 1. Lightning-induced electron precipitation (LEP) from oblique wave/energetic particle scattering along a particular magnetic field line. The lightning discharge leads to oblique mode propagation throughout the magnetosphere so that particles along field lines both inside and beyond the field line shown are also affected. The event sequence 1-4 is discussed in the text.


Resonant electron interaction with ducted whistler-mode wave
wave
n=1
2
3
resonant particles
L=4
Z (R_e)
X (R_e)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Резонансное взаимодействие энергичных электронов со свистовой волной в случае ее дактированного распространения вдоль геомагнитного поля в магнитосфере

Основная система уравнений и подходы к ее решению

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_s}{m_s}\left\{\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \boldsymbol{\mathcal{B}})]\right\}\frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0\ ;$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}\ ; \quad \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t}\ ,$$

где

$$\mathbf{j} = \sum_s q_s \int \mathbf{v} f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \equiv \sum_s \mathbf{j}_s\ .$$

1. Линейный подход Власова-Ландау.

2. "Нелинейный" подход Мазитова – Альтшуля и Карпмана – О'Нила:

$$f = f_b + f_h\ ;\ \mathbf{j} = \mathbf{j}_b + \mathbf{j}_h \equiv \mathbf{j}_{\mathrm{L}} + \mathbf{j}_{\mathrm{RES}}\ .$$

$$\mathrm{grad\ div}\ \boldsymbol{\mathcal{E}} - \Delta\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(\hat{\varepsilon}\boldsymbol{\mathcal{E}})}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}_{\mathrm{RES}}}{\partial t}\ .$$

Электромагнитное поле свистовой волны, распространяющейся вдоль внешнего неоднородного магнитного поля:

$$E_x = -E\cos\xi;\ E_y = E\sin\xi;\ B_x = -B\sin\xi;\ B_y = -B\cos\xi;$$
$$\xi = \int^z k(z')dz' - \omega t\ ; \quad B = \frac{kc}{\omega}E\ , \tag{7}$$

Изменение кинетической энергии частицы w

$$\frac{dw}{dt} = -e\mathbf{v}\mathbf{E}\ , \tag{8}$$

где $\mathbf{v}$ - скорость электрона. Вводя $v_\perp$ и φ

$$v_x = v_\perp\cos\varphi\ ; \quad v_y = v_\perp\sin\varphi\ , \tag{9}$$

и учитывая (7), (9) получим:

$$\frac{dw}{dt} = eEv_\perp\cos\zeta\ ; \quad \zeta = \int^z k(z')dz' - \omega t + \varphi\ , \tag{10}$$

причем, в отсутствие волны $d\varphi/dt = \omega_{\mathrm{H}}$.

Изменение энергии наиболее существенно для резонансных частиц, для которых $v_\|$ близка к резонансному значению

$$v_\mathrm{R}(z) = \frac{\omega - \omega_\mathrm{H}(z)}{k(z)}\,, \tag{11}$$

поскольку для таких частиц полная фаза в выражении (10) меняется медленно:

$$\frac{d\zeta}{dt} \simeq k(v_\| - v_\mathrm{R}) \simeq 0\,. \tag{12}$$

Изменение поперечного адиабатического инварианта $\mu = mv_\perp^2/2\omega_\mathrm{H}$ связано с изменением кинетической энергии w соотношением:

$$w - \omega\mu \equiv C^2 = \mathrm{const.} \quad (C^2 > \frac{mv_\mathrm{R}^2}{2})\,. \tag{13}$$

Наличие интеграла движения (13) позволяет свести задачу о движении электрона в поле волны и внешнем неоднородном магнитном поле к одномерной.

Для резонансных частиц, уравнение для фазы ζ имеет вид:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{1}{\tau^2}\cos\zeta - \alpha\ , \tag{14}$$

при этом нелинейное время τ и параметр неоднородности α определяются выражениями:

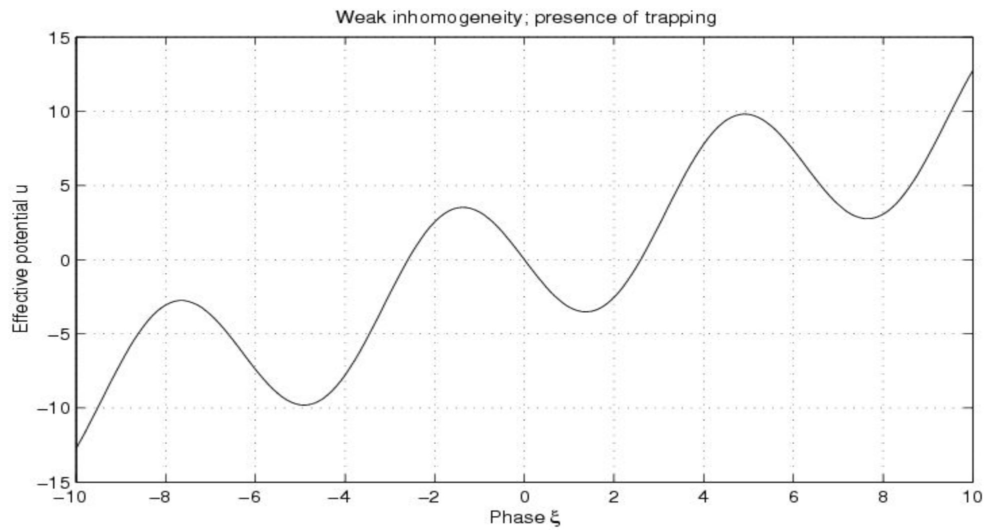
$$\frac{1}{\tau^2} = hkv_{\perp \mathrm{R}}\omega_{\mathrm{H}}\ ; \quad \alpha = \frac{k}{2}\left(\frac{dv_{\mathrm{R}}^2}{dz} + \frac{v_{\perp \mathrm{R}}^2}{\omega_{\mathrm{H}}}\frac{d\omega_{\mathrm{H}}}{dz}\right)\ , \tag{15}$$

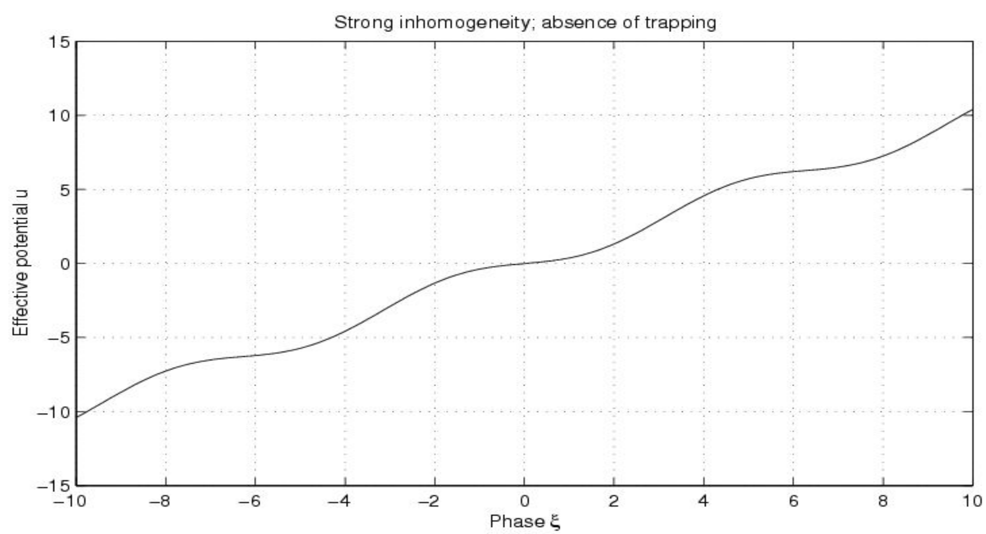
где

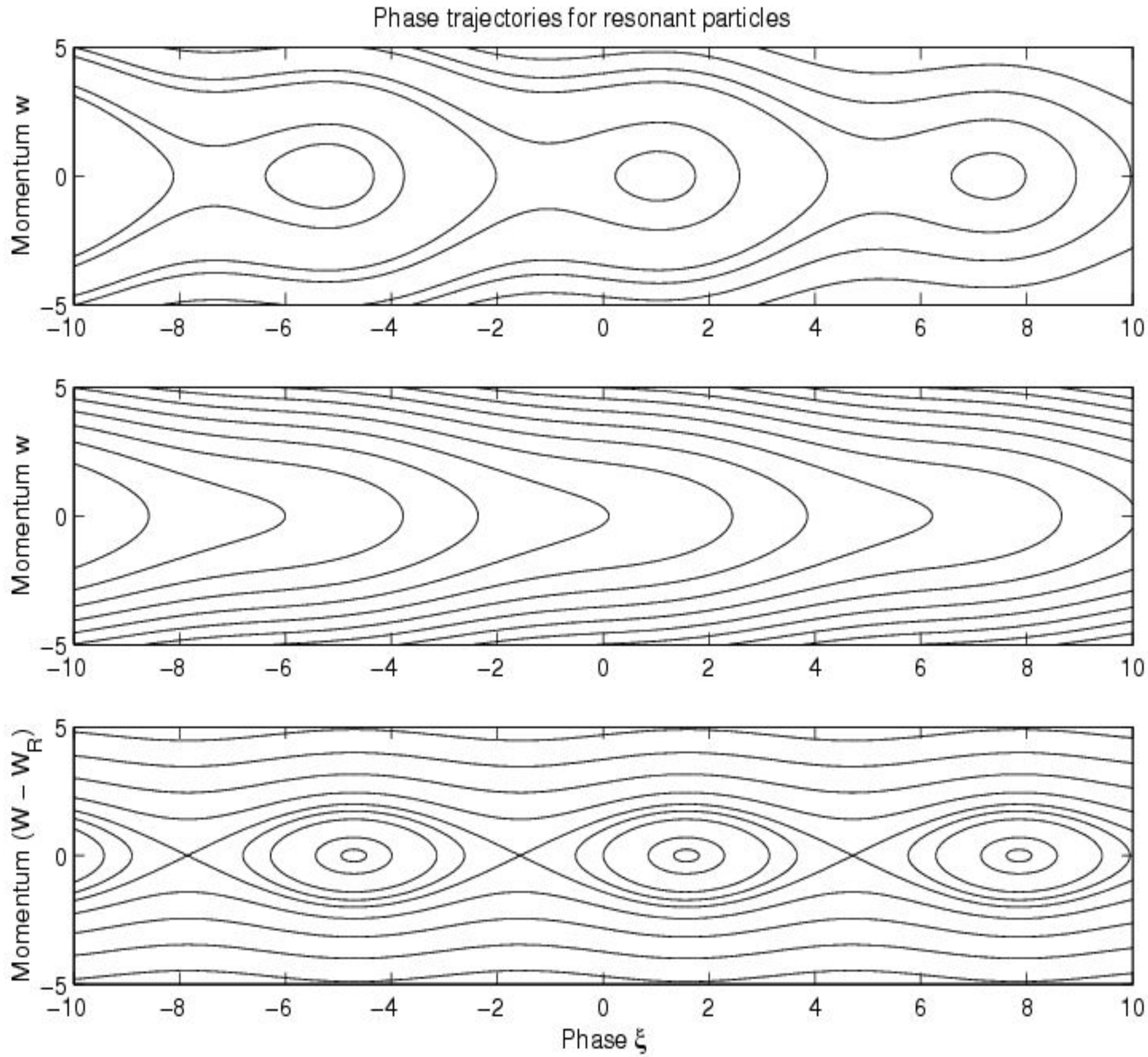
$$h = \frac{B}{B_0}\ ; \quad v_{\perp \mathrm{R}} = \frac{\omega_{\mathrm{H}}}{\omega_{\mathrm{H}} - \omega}\left(\frac{2}{m}C^2 - v_{\mathrm{R}}^2\right). \tag{16}$$

Уравнение (14) описывает движение частиц в эффективном потенциале

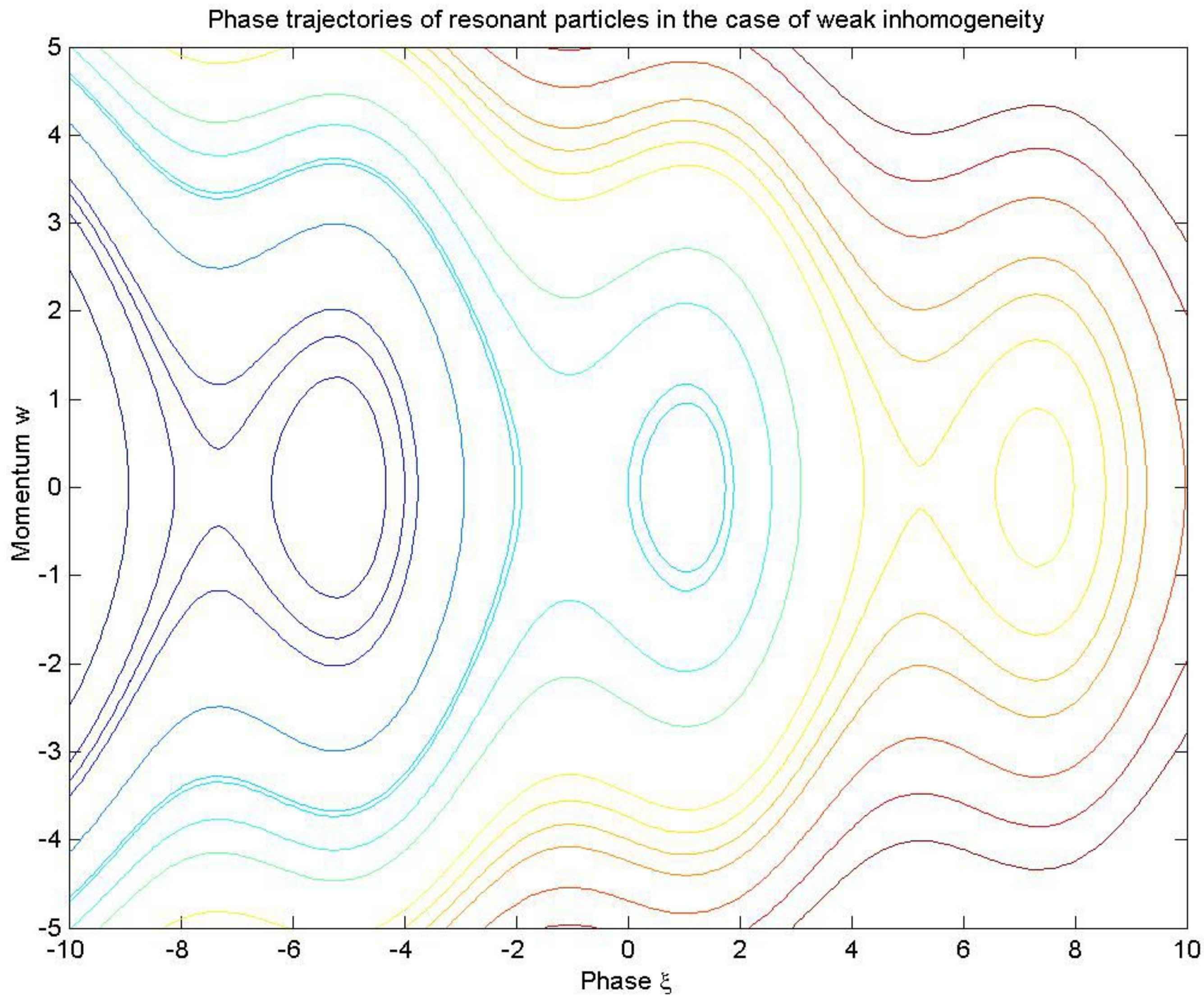
$$P = \alpha\zeta - \frac{1}{\tau^2}\sin\zeta\ . \tag{17}$$


Weak inhomogeneity; presence of trapping
Effective potential u
Phase ξ
15
10
5
0
−5
−10
−15
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10


Strong inhomogeneity; absence of trapping
Effective potential u
Phase ξ
15
10
5
0
−5
−10
−15
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10



Phase trajectories for resonant particles
Momentum w
Momentum w
Momentum (W − W_R)
Phase ξ
5
0
−5
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10



Phase trajectories of resonant particles in the case of weak inhomogeneity
Momentum w
Phase ξ
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

Приближение заданного поля

$$\gamma\tau \ll 1 \,, \tag{18}$$

где γ – инкремент (или декремент) волны.

При $\alpha\tau^2 < 1$ потенциал P (17) имеет потенциальные ямы и, следовательно, существуют захваченные по фазе частицы. Для таких частиц: ζ - ограничена, $\overline{d\zeta/dt} = 0$ и, следовательно:

$$\overline{v}_{\|} = v_{\mathrm{R}}(z) \,. \tag{19}$$

Соотношения (13) и (19) определяют кинетическую энергию захваченной частицы как функцию координаты и интеграла движения $C^2 = \mathrm{const}$, а именно:

$$w = C^2 + \frac{\omega}{\omega_{\mathrm{H}}(z) - \omega}\left[C^2 - \frac{m v_{\mathrm{R}}^2(z)}{2}\right] \,. \tag{20}$$

Скорость изменения энергии захваченных частиц равна

$$\frac{dw_{\mathrm{T}}}{dt} = \frac{m\omega}{k^2}\alpha \,, \tag{21}$$

и имеет знак α.

Некоторые вспомогательные соотношения.

Определим область захвата условием:

$$\alpha\tau^2 < 1/3 \,. \tag{22}$$

Квадратичная аппроксимация гирочастоты:

$$\omega_{\mathrm{H}} = \omega_{\mathrm{H}eq}\left[1 + \frac{9}{2}\left(\frac{z}{LR_{\mathrm{E}}}\right)^2\right] \tag{23}$$

Соотношение между электронной плазменной и гирочастотой:

$$\omega_p \propto \omega_{\mathrm{H}}^{\eta} \,, \quad (0 < \eta \lesssim 1/2) \,.$$

При этом условие существования захваченных частиц принимает вид:

$$|z| < z_m \equiv \frac{2}{27}\frac{h v_{\perp\mathrm{R}}\omega_{\mathrm{H}}(LR_{\mathrm{E}})^2}{(v_{\perp\mathrm{R}}^2 + b v_{\mathrm{R}}^2)}\bigg|_{eq} \,, \tag{24}$$

где

$$b = \frac{3\omega_{\mathrm{H}eq}}{\omega_{\mathrm{H}eq} - \omega} - \eta \,. \tag{25}$$

Ограничения на изменение энергии захваченных частиц

Изменение энергии захваченной частицы при ее движении к экватору:

$$\Delta w_{\mathrm{T}} = -\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{H}eq} - \omega}\left(\mu \Delta\omega_{\mathrm{H}} + \frac{m}{2}\Delta v_{\mathrm{R}}^2\right)$$

$$= -\frac{m}{2}\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{H}eq} - \omega}\left(v_{\perp \mathrm{R}eq}^2 + b v_{\mathrm{R}eq}^2\right)\frac{\Delta\omega_{\mathrm{H}}}{\omega_{\mathrm{H}eq}} . \tag{26}$$

Используя выражения для ω_{H} и z_m получим:

$$\Delta w_{\mathrm{T}} = \frac{m}{2}\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{H}} - \omega}\frac{h^2 v_{\perp \mathrm{R}}^2 \omega_{\mathrm{H}}^2 (L R_{\mathrm{E}})^2}{(v_{\perp \mathrm{R}}^2 + b v_{\mathrm{R}}^2)}\Bigg|_{eq} . \tag{27}$$

Плотность захваченных частиц:

$$n_{\mathrm{T}} \sim n_{\varepsilon}\frac{\Delta v_{\|\mathrm{T}}}{v_{\varepsilon}} ; \quad \Delta v_{\|\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\Delta v_{\|\mathrm{T}}\right)_{\max} = \frac{4}{\pi k \tau} . \tag{28}$$

Изменение плотности энергии захваченных частиц:

$$\Delta W_{\mathrm{T}} \equiv n_{\mathrm{T}} \Delta w_{\mathrm{T}} = \frac{4 n_{\varepsilon}}{\pi k \tau v_{\varepsilon}} \Delta w_{\mathrm{T}} . \tag{29}$$

Сравним величину ΔW_{T} с плотностью энергии волны U:

$$U = \frac{B^2}{8\pi}\frac{\omega_{\text{H}}}{\omega_{\text{H}} - \omega} \tag{30}$$

Используя значения параметров типичных для $L = 4$, а именно:

$$\omega_{\text{H}eq} = 8.5 \cdot 10^4 \text{ rad/s} \; ; \quad \omega_{peq} = 7.9 \cdot 10^5 \text{ rad/s} \; ;$$

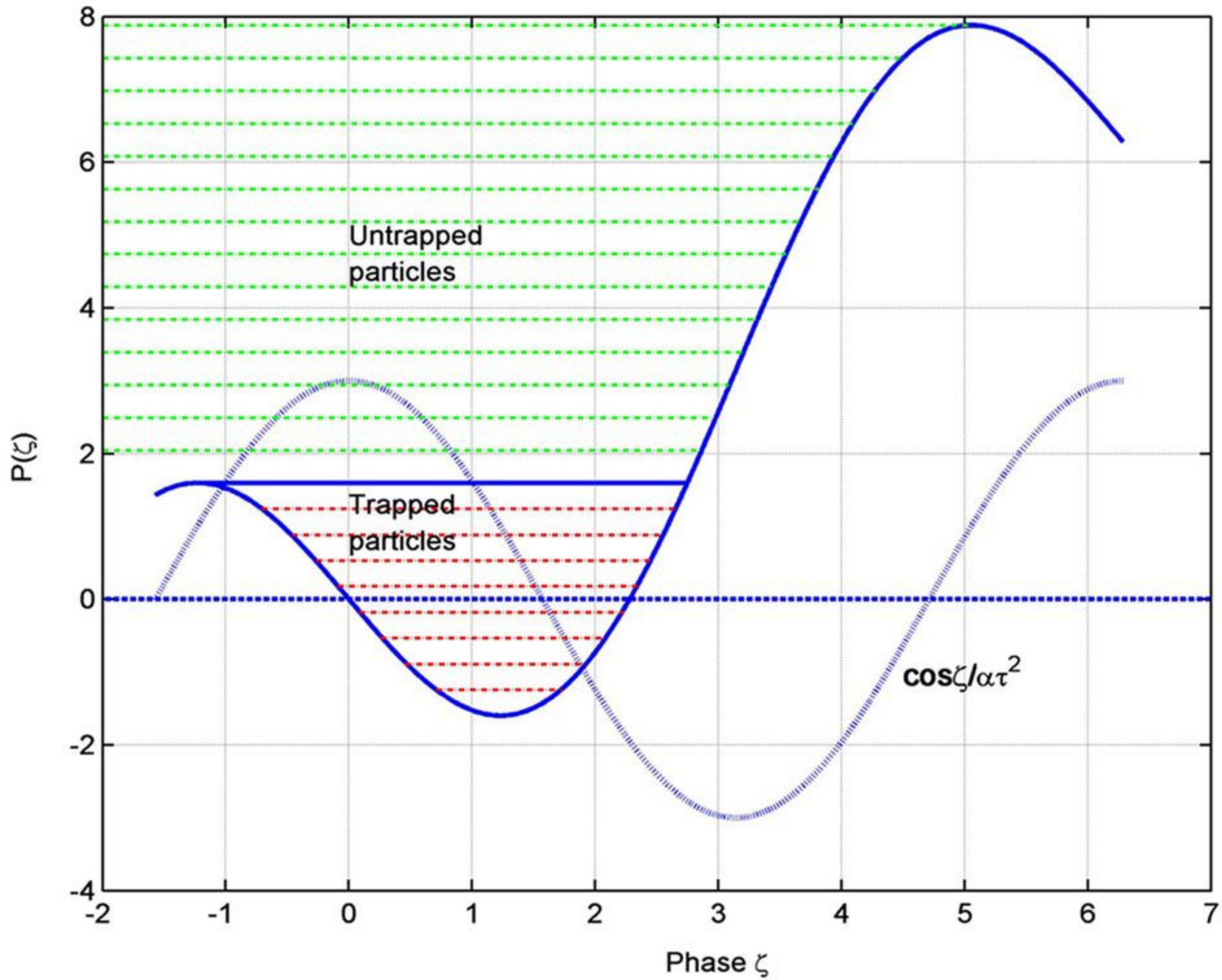
$$n_{\mathcal{E}} = 0.2 \text{ cm}^{-3} \; ; \;\; v_{\mathcal{E}} = 2.7 \cdot 10^9 \text{ cm/s} \; ,$$

частоту волны $\omega = 3.14 \cdot 10^4$ rad/s ($f = 5$kHz) и амплитуду волны $B = 3 \cdot 10^{-7}$gauss (30 pT), находим:

$$U = 5.7 \cdot 10^{-15} \text{ erg/cm}^3 \; ; \quad \Delta W_{\text{T}} = 2.3 \cdot 10^{-13} \text{ erg/cm}^3 \; ,$$

при этом полная плотность энергии захваченных частиц $W_{\text{T}} \sim 3 \cdot 10^{-12}$ erg/cm^3.

Откуда берется такой прирост энергии захваченных частиц?



Untrapped
particles
Trapped
particles
$\cos\zeta/\alpha\tau^2$
P(ζ)
Phase ζ
8
6
4
2
0
-2
-4
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

Изменение энергии пролетных частиц

Интеграл энергии уравнения для фазы ζ:

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + \alpha\zeta - \frac{1}{\tau^2}\sin\zeta \ . \tag{31}$$

Используя $dt = d\zeta/\sqrt{2(\epsilon - \alpha\zeta + \sin\zeta/\tau^2)}$, получим изменение энергии пролетной частицы в виде:

$$\begin{gathered} \Delta w_{\mathrm{UT}} = \frac{\sqrt{2}m\omega}{k^2\tau^2}\Phi(\epsilon) \ , \\ \Phi(\epsilon) = \int_{-\alpha\infty}^{\zeta_r(\epsilon)} \frac{\mathrm{sign}\alpha \cos\zeta \, d\zeta}{\sqrt{\epsilon - \alpha\zeta + \sin\zeta/\tau^2}} \ , \end{gathered} \tag{32}$$

где точка отражения $\zeta_r(\epsilon)$ удовлетворяет соотношению:

$$\epsilon - \alpha\zeta_r + \sin\zeta_r/\tau^2 = 0 \ .$$

$\Phi(\epsilon)$ - периодическая функция ϵ с периодом $2\pi|\alpha|$:

$$\Phi(\epsilon) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{n\epsilon}{|\alpha|} + c_n \sin\frac{n\epsilon}{|\alpha|} \ , \tag{33}$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi|\alpha|}\int_a^{a+2\pi|\alpha|} d\epsilon \int_{-\alpha\infty}^{\zeta_r(\epsilon)} \frac{\mathrm{sign}\alpha \cos\zeta \, d\zeta}{\sqrt{\epsilon - \alpha\zeta + \sin\zeta/\tau^2}} \ . \tag{34}$$

Величина b_0 связана с фазовым объемом захваченных частиц (или с эффективной шириной по продольной скорости области захваченных частиц) соотношением:

$$\sqrt{2} b_0 = -\mathrm{sign}\alpha \cdot \tau^2 \Omega_{\mathrm{T}}/2\pi \equiv -\mathrm{sign}\alpha \cdot \tau^2 k \Delta v_{\|\mathrm{T}} \ .$$

Таким образом, среднее изменение энергии пролетных частиц равно:

$$\Delta w_{\mathrm{UT}} = -\mathrm{sign}\alpha \frac{m\omega}{k} \Delta v_{\|\mathrm{T}} \ . \tag{35}$$

Инкремент волны

Величина γ определяется из закона сохранения энергии в системе *волна – резонансные частицы*:

$$\frac{dU}{dt} \equiv 2\gamma U = -< \mathbf{j}_{\mathrm{R}}\mathbf{E} > , \tag{36}$$

откуда следует

$$\gamma = -\frac{1}{2U}\left\langle \int \frac{dw_{\mathrm{R}}}{dt} f_{\mathrm{R}} d\mathbf{v} \right\rangle . \tag{37}$$

Для пролетных частиц

$$\bar{f}_{\mathrm{UT}} = f_0(w,\, \mu)_{w=mv_{\mathrm{R}}^2/2+\mu\omega_{\mathrm{c}}} . \tag{38}$$

Для захваченных частиц:

$$\bar{f}_{\mathrm{T}} = f_0(w_0,\, \mu_0)\ ; \quad w - w_0 = \omega(\mu - \mu_0) = \frac{m\omega}{k^2}\int_{z_0}^{z} \alpha(z')\frac{dz'}{v_{\mathrm{R}}(z')} . \tag{39}$$

Зная выражения для функции распределения пролетных и захваченных частиц и изменения их энергии, из закона сохранения энергии находим инкремент волны:

$$\gamma = \frac{\pi\omega\omega_c}{k^2 U} \int d\mu(\bar{f}_{\mathrm{UT}} - \bar{f}_{\mathrm{T}})\alpha(z)\Delta v_{\|\mathrm{T}} \,. \tag{40}$$

Для кординат z таких, что $(w - w_0)$ мало по сравнению с тепловой энергией резонансных частиц, разность функций распределения можно разложить в ряд

$$\bar{f}_{\mathrm{UT}} - \bar{f}_{\mathrm{T}} = F_0'(\mu) \cdot \frac{m}{k^2} \int_{z_0}^{z} \alpha(z') \frac{dz'}{v_{\mathrm{R}}(z')} \,;$$

$$F_0'(\mu) \equiv \left(\frac{\partial F_0}{\partial \mu} + \omega \frac{\partial F_0}{\partial w} \right)_{w = m v_{\mathrm{R}}^2/2 + \mu\omega_{\mathrm{C}}} \,, \tag{41}$$

что дает

$$\gamma = \frac{\pi m\omega\omega_c}{k^4 U} \int d\mu F_0'(\mu)\alpha(z)\Delta v_{\|\mathrm{T}} \int_{z_0}^{z} \alpha(z') \frac{dz'}{v_{\mathrm{R}}(z')} \,. \tag{42}$$

Область применимости результатов

Выражение для инкремента может быть записано в виде:

$$\gamma \sim \gamma_{\mathrm{L}} \left\langle \alpha(z)\tau^3 \int_{z_0}^{z} \alpha(z') \frac{dz'}{v_{\mathrm{R}}(z')} \right\rangle ,$$

где γ_{L} - линейный инкремент и $< ... >$ означает усреднение по μ с весовой функцией $F_0'(\mu)\mu$. При этом, условия применимости приближения заданного поля принимают вид:

$$\tau \int_{z_0}^{z} \alpha(z') \frac{dz'}{v_{\mathrm{R}}(z')} \ll \frac{1}{(\gamma_{\mathrm{L}}\tau)(\alpha\tau^2)} ,$$

или эквивалентно:

$$|\bar{f}_{\mathrm{UT}} - \bar{f}_{\mathrm{T}}| \ll F_0' \cdot \frac{m}{k^2\tau} \cdot \frac{1}{(\gamma_{\mathrm{L}}\tau)(\alpha\tau^2)} .$$

Здесь предполагается, что выражения, зависящие от μ, заменены их средними значениями.

Выводы

Рассматриваемая система состоит из волны (U), резонансных захваченных (W_{T}) и пролетных (W_{UT}) частиц. Закон сохранения энергии требует:

$$\Delta U + \Delta W_{\mathsf{T}} + \Delta W_{\mathsf{UT}} = 0; \tag{43}$$

Две возможности: все величины одного порядка, или одна много меньше двух других, которые близки по модулю и имеют разные знаки. Что реализуется в конкретном случае? Оказывается, что

$$\Delta U \ll \Delta W_{\mathsf{T}}\,,\ W_{\mathsf{UT}}\,; \quad \Delta W_{\mathsf{UT}} \simeq -\Delta W_{\mathsf{T}}\,.$$

Приложения:

1. Динамика энергичных электронов в радиационных поясах.
2. Триггерное излучение, возникающее в результате формирования на функции распределения “пучка” или “дырки”, в зависимости от знака неоднородности и вида невозмущенной функции распределения.

Квазимонохроматический пакет ленгмюровских волн в неоднородной плазме

Электрическое поле волны

$$\mathcal{E} = -\mathcal{E}_0(x,t)\cos\left(\int^x k(x')dx' - \omega t\right) . \qquad \text{(L.1)}$$

Уравнения движения:

$$\frac{dx}{dt} = v \; ; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{e\mathcal{E}_0(x,t)}{m}\cos\left(\int^x k(x')dx' - \omega t\right) . \qquad \text{(L.2)}$$

Естественная новая переменная - фаза волны:

$$\zeta = \int^x k(x')dx' - \omega t$$

Уравнение для фазы

$$\frac{d\zeta}{dt} = k(x)v - \omega \equiv k(x)[v - v_{\mathrm{R}}(x)] \; ; \quad v_{\mathrm{R}}(x) = \frac{\omega}{k(x)} . \qquad \text{(L.3)}$$

Новая скорость:

$$u = k(x)[v - v_{\mathrm{R}}(x)] . \qquad \text{(L.4)}$$

Новая независимая переменная, удобная для резонансных частиц:

$$\tilde{t} = \int_0^x \frac{k(x')dx'}{\omega} \; . \tag{5}$$

Для резонансных частиц

$$d\tilde{t} \simeq dt \; .$$

Тогда уравнения движения для резонансных частиц принимают вид (опуская тильду):

$$\frac{d\zeta}{dt} = u \; ; \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{\tau^2}\cos\zeta - \alpha \; , \tag{6}$$

где нелинейное время τ и параметр неоднородности α определяются выражениями:

$$\frac{1}{\tau^2} = \frac{e\mathcal{E}_0 k}{m} \; ; \quad \alpha = -\frac{\omega^2}{k^2}\frac{dk}{dx} \; . \tag{7}$$