Лекция 1. Основы математического анализа

Лектор: Войтик Виталий Викторович

Литература

- Лобоцкая Н.Л. Основы высшей математики 2015, Москва
- Ремизов А.Н. Максина А.Г., Потапенко А. Я. Медицинская и биологическая физика 2013, Москва
- Ремизов А.Н., Максина А.Г. Сборник задач по медицинской и биологической физике 2014, Москва
- Антонов В.Ф. Физика и биофизика (http://www.studmedlib.ru/book/ISBN9785970426777.html) 2013, Москва

Определение производной

Если существует предел отношения

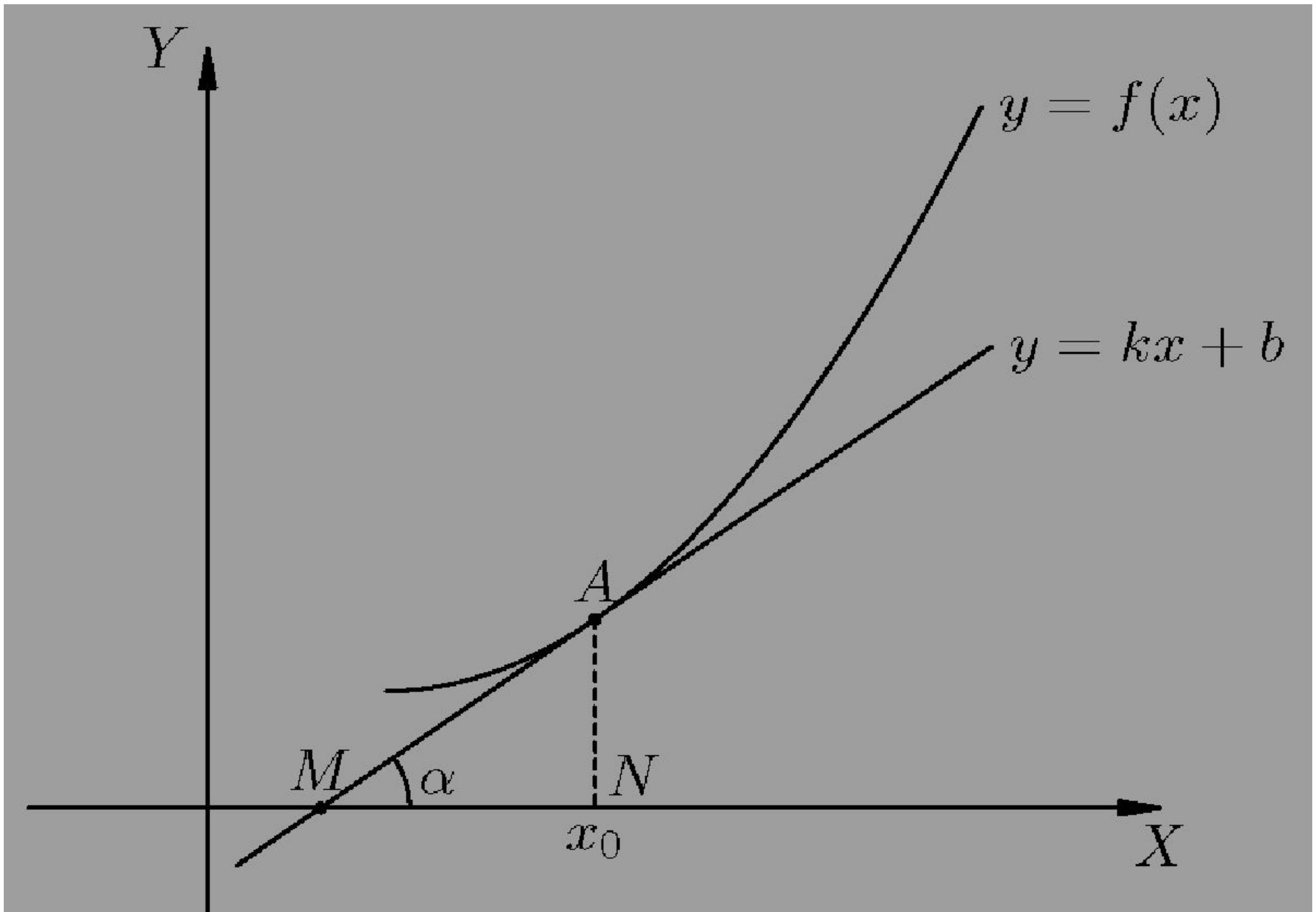
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

то функция f(x) называется дифференцируемой в точке x, а значение предела называется производной от функции f(x) в точке x и обозначается

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) = f'_x = \frac{df}{dx}$$

Геометрический смысл производной

Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту k касательной к графику функции y=f(x) в этой точке; $f'(x_0)=k=\operatorname{tg}\alpha$



Правила дифференцирования

1) $\left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right]' = c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x)$

2) $\left[f(x)\,g(x)\right]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)\text{-}f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Производные элементарных функций

$$C' = 0; \quad (\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$x' = 1;$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}; \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(n^x)' = n^x \ln n; \quad (e^x)' = e^x; \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Производная сложной функции

Если y=f(g(x)), то $y' = f'(u)\cdot u'(x)$

где u=g(x)

Пример. Найти производную функции

$$y = x\cos x\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$$

.

Сначала преобразуем данную функцию:

$$y = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x\,;\qquad y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x\cdot 2\cos 2x +$$

$$+\frac{1}{2}2\cos x\cdot(-\sin x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x$$

Дифференциал функции

Дифференциалом df(x) функции f(x) в точке x называется произведение производной от функции f(x) в этой точке на величину приращения аргумента Δx

$$df(x) = f'(x)dx$$

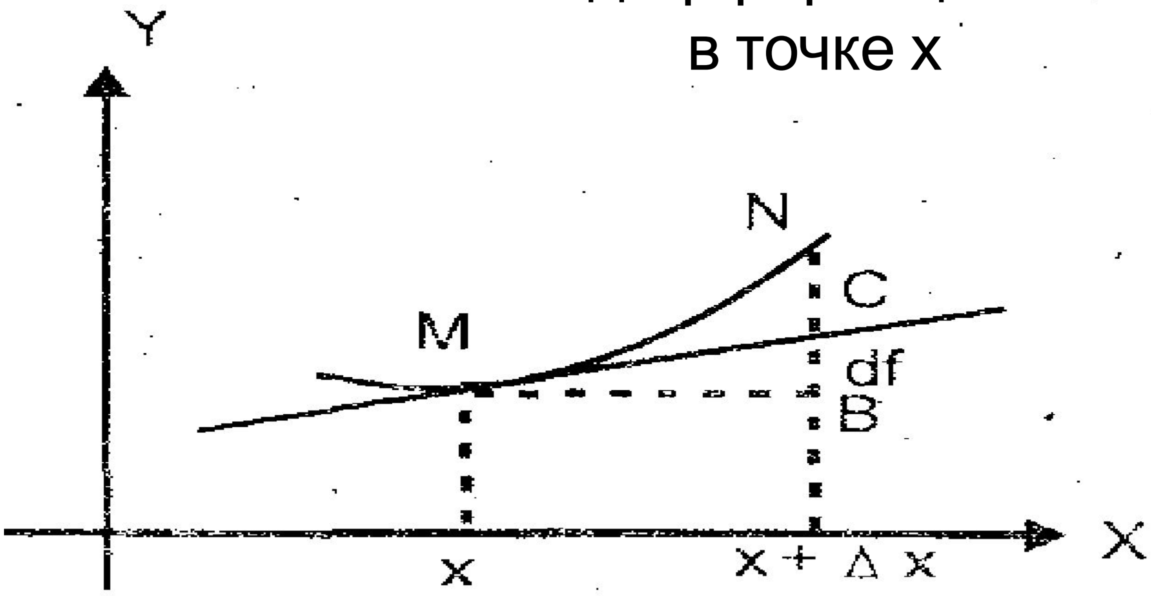
Связь между дифференциалом функции и её приращением

Дифференциал функции, в общем случае отличаясь от приращения функции, представляет собой главную часть этого приращения, линейную относительно приращения аргумента. В этом заключается аналитический смысл дифференциала. Отсюда следует, что при достаточно малых приращениях аргумента величина приращения функции приближённо равна дифференциалу этой функции

$$\Delta f = df$$

Геометрический смысл дифференциала

Участок CB - дифференциал df функции f в точке x



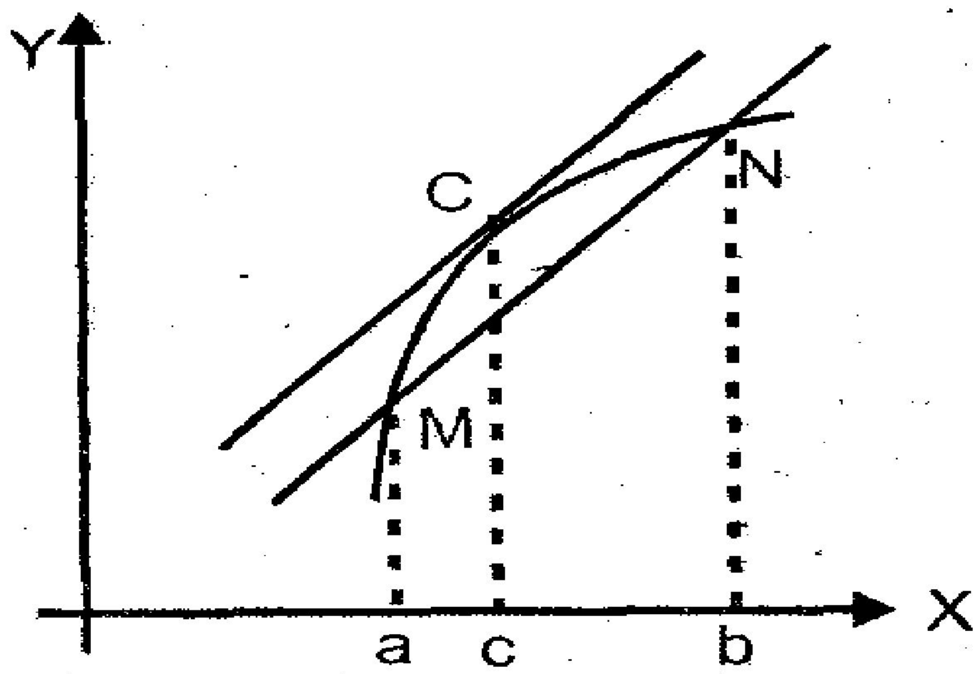
Применение дифференциала для приближенных вычислений.

Оно основывается на приближённой формуле : $\Delta f = f'(x)\Delta x$ или $f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x$.

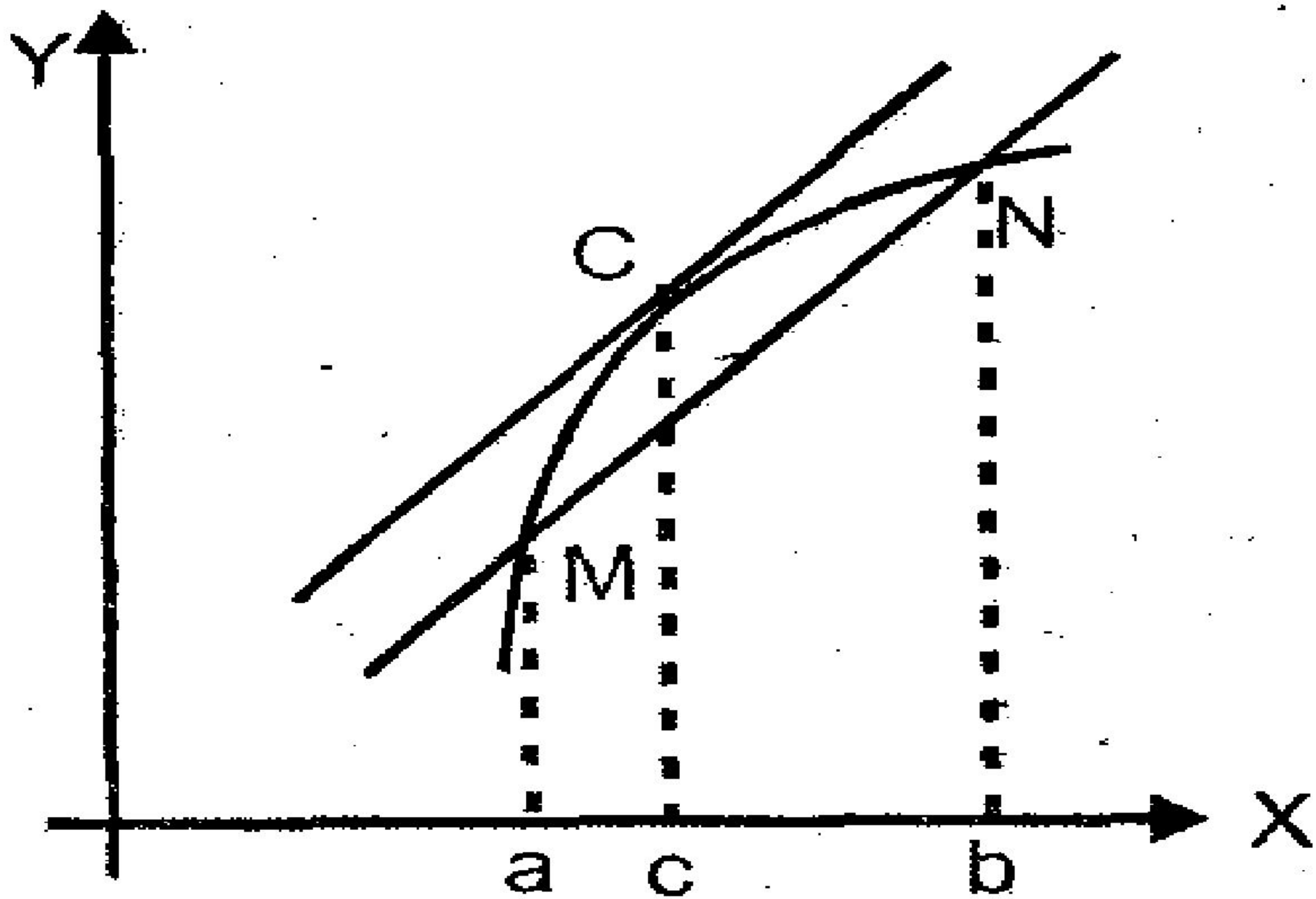
Отсюда мы можем вычислить значение функции в точке $x+\Delta x$: $f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$,

если $f(x)$ и $f'(x)$ можно легко вычислить в точке x.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



- **Применение производной при исследовании функции**
- **Теорема о признаке возрастания и убывания функции**. *Если производная функции положительна на некотором интервале, то функция возрастает на этом интервале, наоборот если производная отрицательна, то функция убывает на этом интервале*. Производная дифференцируемой функции в точке экстремума равна нулю.

Порядок действий при исследовании функции.

1. Найти область определения функции.
2. Найти производную функции и определить точки, в которых производная не существует.
3. Приравнять производную к нулю и решить полученное уравнение

$$f'(x) = 0$$

Корни этого уравнения являются экстремумами функции.

4. Найти критические точки функции, как совокупность всех экстремумов и точек, в которых производная не существует и отметить их на оси OX.

5.Определить знаки производных на интервалах, на которые критические точки делят область определения функции.

6.По знаку производной найти интервалы возрастания и убывания функции.
7. Найти точки экстремумов функции.

Первообразная функция

Функция F(x) называется первообразной функцией функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

Неопределенным интегралом функции f(x) называется вся совокупность первообразных функций F(x), которые определены соотношением:

$$\int f(x)dx = F(x) + C;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

Свойства интегралов:

$$1. \left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$$

$$2. d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

$$3. \int dF(x) = F(x)+C;$$

$$4. \int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$$

где u, v, w – некоторые функции от x.

$$5. \int C\cdot f(x)dx = C\cdot \int f(x)dx;$$

Методы интегрирования

А) Непосредственное интегрирование.

$$\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}+\cos x\right)dx=\int\frac{5}{\sqrt{x}}dx-\int\frac{1}{2x}dx+\int\cos x dx=5\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-\frac{1}{2}\ln|x|+\sin x+C=10\sqrt{x}-$$

$$-\frac{1}{2}\ln|x|+\sin x+C$$

Б) Способ подстановки (замены переменных).

$$\int f(x)dx=\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt$$

$$\int\sqrt{\sin x}\cos x dx$$

Сделаем замену $t=\sin x;\quad dt=\cos x dx$

$$\int\sqrt{\sin x}\cos x dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C==\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x+C$$

В) Интегрирование по частям

Способ основан на формуле:

$$\int u dv=uv-\int v du$$

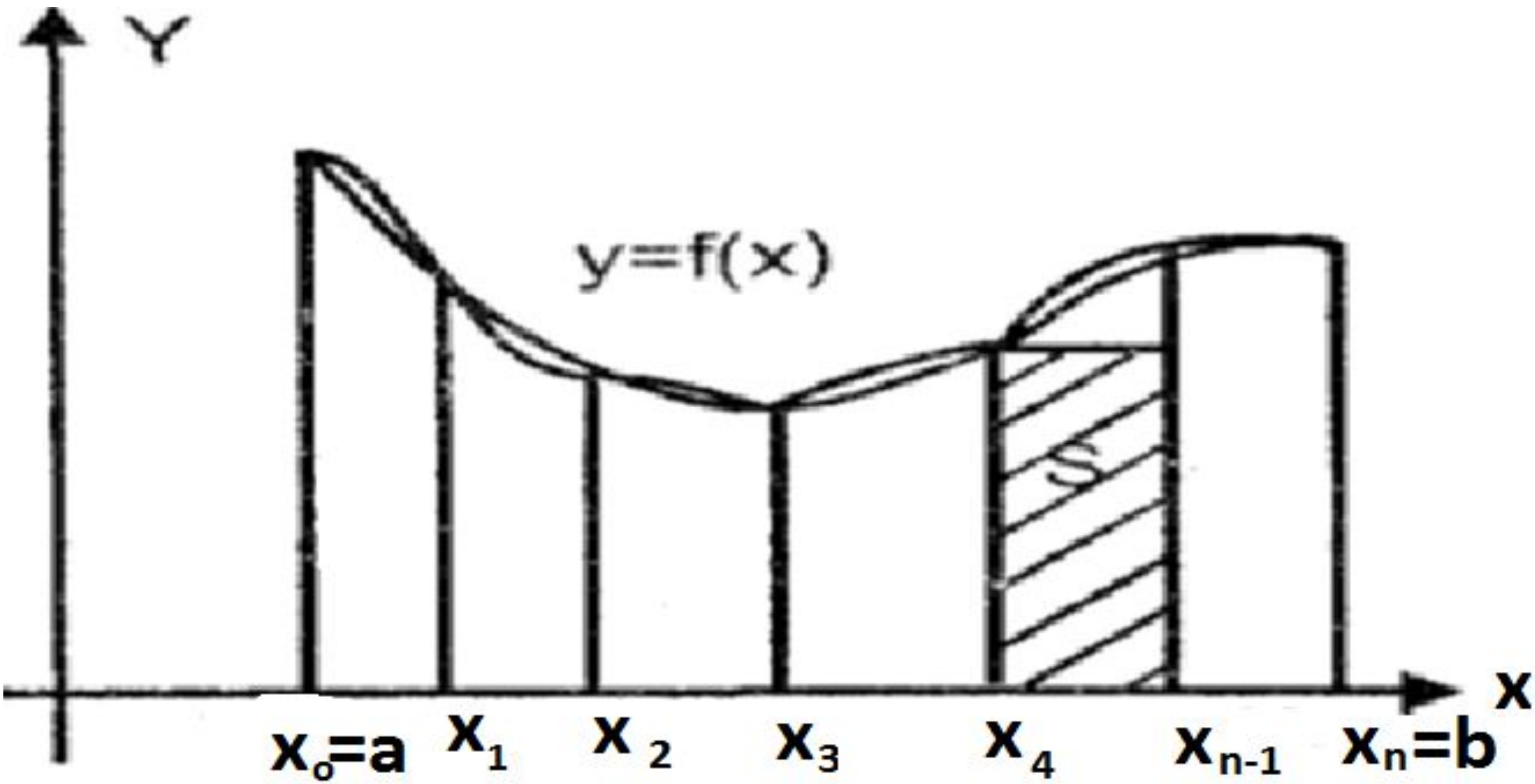
$$\int x^2\sin x dx=\begin{cases}u=x^2;du=2xdx\\ dv=\sin x dx;v=-\cos x\end{cases}=-x^2\cos x-\int\left(-\cos x\right)\cdot 2xdx=-x^2\cos x+2\int x\cos x dx=$$

$$=\begin{cases}u=x;du=dx\\ dv=\cos x dx;v=\sin x\end{cases}=-x^2\cos x+2\left(x\sin x-\int\sin x dx\right)+$$

$$+C=\begin{cases}u=x;du=dx\\ dv=\cos x dx;v=\sin x\end{cases}=-x^2\cos x+2\left(x\sin x+\cos x\right)+C$$

Определенный интеграл

- Пусть на отрезке [ab] задана непрерывная функция y=f(x)



Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \ \ldots\ , x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Определение: Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \rightarrow 0$ и произвольном выборе точек ε_i *интегральная сумма* $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b]: $\int_a^b f(x)dx$

Определение: Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i *интегральная сумма* $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b]: $\int_a^b f(x)dx$

Свойства определенного интеграла.

$$1) \int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx \quad 2) \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3) \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

4) Если f(x) ≤ ϕ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

5. Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \mathrm{F(x)}\Big|_a^b$$

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную (аргумент) x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные различных порядков y', y'',.., $y^{(n)}$:

$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Например, дифференциальные уравнения

$$y' - 3xy^2 + 4 = 0$$

$$t^2 \frac{ds}{dt} = 2ts - 3$$

Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = y(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

Например, функция $y = x^2 + Cx$, где C – любая постоянная величина, является решением дифференциального уравнения $y'x - x^2 - y = 0$.

Заметим, что данное дифференциальное равнение имеет бесконечное множество решений, так как C – произвольная постоянная величина.

Процесс нахождения решения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция

$y=f(x,C_1,C_2,..,C_n)$,

зависящая от x и n произвольных независимых постоянных, обращающая это уравнение в тождество при любых значениях постоянных $C_1,C_2,..,C_n$.

Частным решением дифференциального уравнения n-ого порядка называется решение $y=f(x,C_1^0,C_2^0,\ldots,C_n^0)$, где $C_1^0,C_2^0,\ldots,C_n^0$ - фиксированные числа, которое получается из общего, если придать определенные значения произвольным постоянным $C_1,C_2,..,C_n$.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x\ , y, y') = 0\ .$$

Если это уравнение разрешено относительно y' , то это уравнение имеет вид: $y' = f\,(x\ , y)$ или $dy{=}f\,(x\ , y)dx$

Общим решением уравнения будет функция $y{=}y(x\ ,C)$, зависящая от x и от одной произвольной постоянной, и обращающая это уравнение в тождество.

Частным решением уравнения будет решение $y{=}\ y(\ x\ ,C_0\ )$, полученное из общего при фиксированном значении C, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y = y_0$ при $x = x_0$.

Другими словами: найти интегральную кривую уравнения, проходящую через заданную точку $M_0\,(x_0,y_0\,)$.

Дифференциальное уравнение вида

$P_1\,(x)Q_1(y)dx{+}P_2(x)Q_2\,(y)\ dy =0$,

где $P_1\left(x\right)$, $P_2\left(x\right)$ – функции только от x, а $Q_1(y)$, $Q_2(y)$ – функции только от y, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Делением обеих частей уравнения на произведение $Q_1(y)P_2(x)$ может быть приведено к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{P_1(x)Q_1(y)}{Q_1(y)P_2(x)}dx+\frac{P_2(x)Q_2(y)}{Q_1(y)P_2(x)}dy=0$$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0$$

щим интегралом уравнения будет:

$$\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=C.$$

Пример. Дано уравнение $$xy'-2y=0$$

Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y=4$ при $x=2$. Уравнение имеет вид: $$x\frac{dy}{dx}-2y=0$$

Разделяя переменные, получим: $$\frac{dy}{y}-\frac{2dx}{x}=0$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dy}{y}-\int\frac{2dx}{x}=C_1 \rightarrow \ln|y|-2\ln|x|=C_1=\ln C$$

$$\rightarrow \ln|y|=2\ln|x|+\ln C$$

$$\rightarrow \ln|y|=\ln\left(Cx^2\right) \rightarrow y=Cx^2 -$$ Это общее решение

Теперь найдем частное решение уравнения. Подставляя в общее решение, x=2, y=4, получим $4 = C \cdot 2^2$, откуда $C = 1$.

Подставляя $C = 1$ в общее решение, получим частное решение $y = x^2$.