ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСК ИХ ГИПОТЕЗ

Определение статистической гипотезы

<u>Статистической гипотезой</u> называется всякое высказывание о генеральной совокупности (случайной величине), проверяемое по выборке (то есть по результатам наблюдений).

<u>Статистические гипотезы</u>

Параметрические;

Непараметрические;

Примеры статистических гипотез:

- математическое ожидание случайной величины равно конкретному числовому значению;
- генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

Классический метод проверки гипотез

Процедура сопоставления гипотезы с выборочными данными называется **проверкой гипотезы**. Для проверки гипотез используют **аналитические** и **статистические** методы.
В соответствии с поставленной задачей и на основании выборочных данных формулируется (выдвигается) гипотеза H_0, которая называется основной или **нулевой**. Одновременно с выдвинутой гипотезой , рассматривается противоположная ей гипотеза H_1, которая называется конкурирующей или **альтернативной**.
Для проверки нулевой гипотезы вводят специально подобранную случайную величину K, распределение которой известно и называют ее **критерием**.

Сущность метода

Множество всех значений критерия разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается; другое – при которых она принимается.

<u>Критической областью</u> называется совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

<u>Областью принятия гипотезы</u> (областью допустимых значений) называется совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Обозначим критическую область ω.

Если вычисленное по выборке значение критерия K попадает в критическую область ω, то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. В этом случае можно совершить ошибку первого рода, вероятность которой равна α. Иначе, вероятность того, что критерий примет значение из критической области K, должна быть равна заданному значению, то есть $P(K \in \omega) = \alpha$.

Три случая расположения ω

Они определяются видом нулевой и альтернативной гипотез и законом распределения критерия:

- Правосторонняя критическая область
- Левосторонняя критическая область
- Двусторонняя критическая область

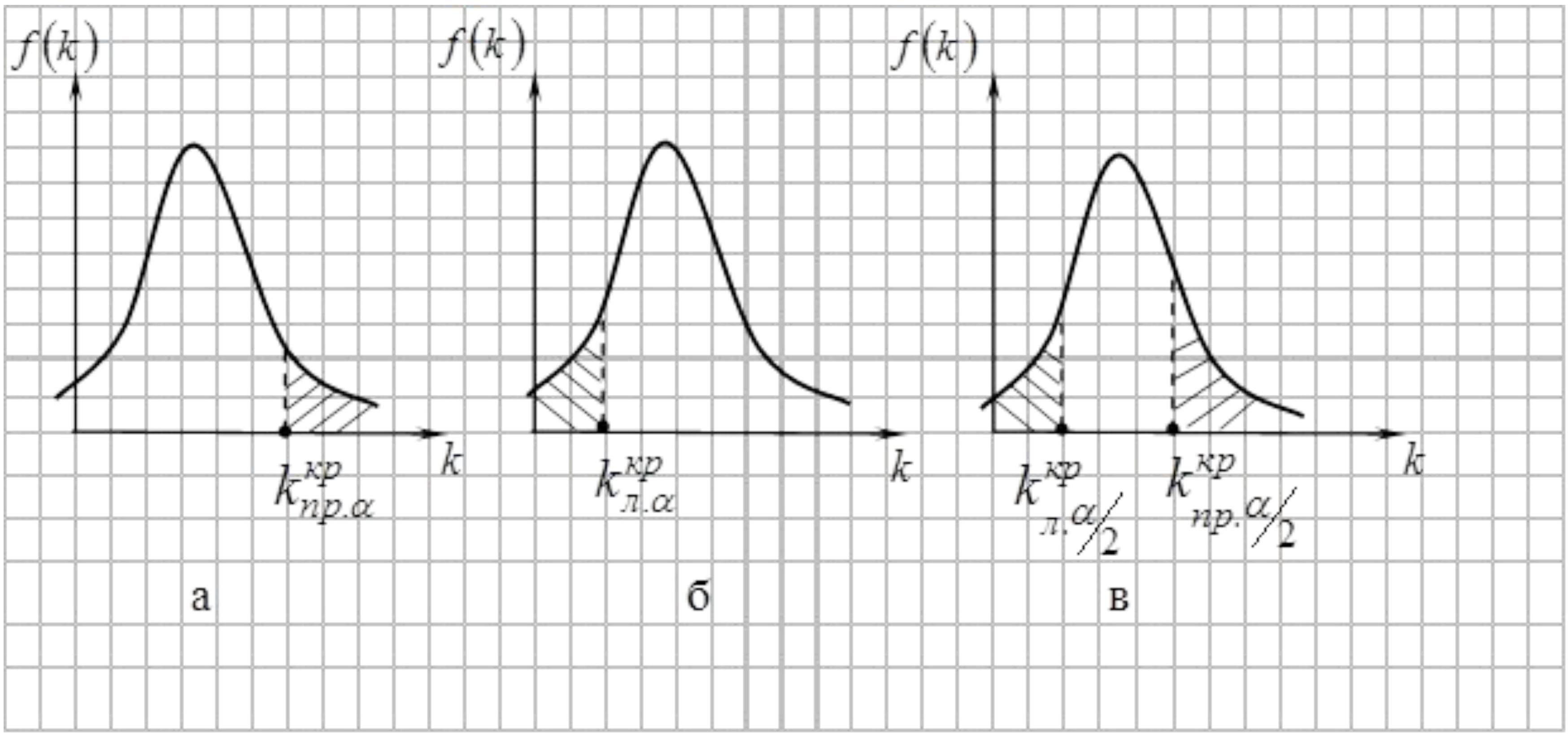
Правосторонняя критическая область состоит из интервала $\left(k_{пр.\alpha}^{кр};+\infty\right)$ где $k_{пр.\alpha}^{кр}$ определяется из условия $P\left(K>k_{пр.\alpha}^{кр}\right)=\alpha$ и называется правосторонней точкой, отвечающей уровню значимости.

Левосторонняя критическая область состоит из интервала $\left(-\infty;k_{л.\alpha}^{кр}\right)$, где определяется из условия $k_{л.\alpha}^{кр}$ и называется левосторонней точкой, отвечающей уровню значимости $P\left(K<k_{л.\alpha}^{кр}\right)=\alpha$.

Двусторонняя критическая область (рис.4 в) состоит из следующих двух интервалов: $\left(-\infty;k_{л.\alpha/2}^{кр}\right)$ и $\left(k_{пр.\alpha/2}^{кр};+\infty\right)$ где точки $k_{л.\alpha/2}^{кр}$ и $k_{пр.\alpha/2}^{кр}$

определяются из условий $P\left(K>k_{пр.\alpha/2}^{кр}\right)=\dfrac{\alpha}{2}$ и $P\left(K<k_{л.\alpha/2}^{кр}\right)=\dfrac{\alpha}{2}$.

Правосторонняя, левосторонняя, двусторонняя критические области



Алгоритм проверки нулевой гипотезы

1. Располагая выборкой, формулируют нулевую гипотезу H_0 и альтернативную гипотезу H_1.
2. Выбирают критерий проверки гипотезы H_0, зависящий от выборочных данных и условий рассматриваемой задачи. Наиболее часто используют случайные величины, имеющие следующие законы распределения: нормальный, Стъюдента, Фишера-Снедекора, хи-квадрат.
3. Задают уровень значимости выбранного критерия и определяют соответствующую ему критическую область. Для определения критической области достаточно найти критическую точку $t_{кр}$ - ее границу. Для каждого критерия имеются таблицы, по которым находят критическую точку.

Алгоритм проверки нулевой гипотезы (продолжение)

3.Вычисляют значение критерия по результатам произведенных измерений и сравнивают с критической точкой.

4. Нулевую гипотезу **отвергают**, если вычисленное значение критерия попадает в критическую область, или считают **справедливой**, если оно окажется внутри области допустимых значений.

Проверка гипотез о законе распределения

Во многих случаях закон распределения изучаемой случайной величины X неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет вполне определенный вид: нормальный, экспоненциальный или какой-либо другой.

Пусть выдвинута гипотеза H_0 о каком-либо законе распределения.

Для проверки этой гипотезы H_0 требуется по выборке сделать заключение, согласуются ли результаты наблюдений с высказанным предположением.

Проверка гипотез о законе распределения (продолжение)

Статистический критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения называется **критерием согласия**.

Он используется для проверки согласия предполагаемого вида распределения с опытными данными на основании выборки.

Существуют различные критерии согласия: Пирсона, Колмогорова, Фишера и другие. Наиболее часто применяется критерий Пирсона.

Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона

Пусть выборка из генеральной совокупности X задана в виде статистического интервального ряда ряда:

$[x_1, x_2)$	$[x_2, x_3)$	$\ldots$	$[x_m, x_{m+1})$
n_1	n_2	$\ldots$	n_m

где n_i - интервальные частоты, $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$ - объем выборки,

m -число интервалов , h - длина интервала, X - середина интервала.

Правило проверки

1)Вычисляем $\overline{x_в}$ и $\sigma_в$.

2) Находим теоретические частоты n_i' .

Их можно вычислить двумя способами.

Два способа нахождения частот. Первый способ

$$n_i{}' = \frac{n \cdot h}{\sigma_в} \cdot \varphi(t_i)$$

где n - объем выборки, h - шаг, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$;

$t_i = \frac{x_i - \overline{x_в}}{\sigma_в}$ - функция Гаусса, значение которой в точке находим по таблице (Приложение 1).

$P_i = \frac{\varphi(t_i)}{\sigma_в} \cdot h$ - вероятность попадания значений случайной величины X в i- й интервал. Для вычисления $n_i{}'$ составляем табл. 9.

i	x_i	n_i	$x_i - \overline{x_в}$	t_i	$\varphi(t_i)$	P_i	$n_i{}' = P_i \cdot n$
1	x_1	n_1	$x_1 - \overline{x_в}$	t_1	$\varphi(t_1)$	P_1	$n_1{}' = P_1 \cdot n$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	x_m	n_m	$x_m - \overline{x_в}$	t_m	$\varphi(t_m)$	P_m	$n_m{}' = P_m \cdot n$
$\sum$		n				1	n

Второй способ

$$n_i' = P_i \cdot n$$

Где n_i' - объем выборки, $z_1 = (-\infty)$,

$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ - вероятность попадания X в i - й интервал,

$\Phi(z)$ - значение функции Лапласа (Приложение 2).

Полагают $z_i = \dfrac{x_i - x_в}{\sigma_в}$, $z_{m+1} = +\infty$.

Для вычисления n составляем табл. 10.

Таблица 10.

i	Границы интервала		n_i	Границы интервала		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	P_i	n_i'
	x_i	x_{i+1}		z_i	z_{i+1}				
1	x_1	x_2	n_1	$-\infty$	z_2	-0,5	$\Phi(z_2)$	P_1	n_1'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	x_m	x_{m+1}	n_m	z_m	$+\infty$	$\Phi(z_m)$	0,5	P_m	n_m'
$\sum$			n					1	n

Правило проверки(продолжение)

3. Сравниваем эмпирические (n_i) и теоретические (n_i') частоты с помощью критерия Пирсона.

Для этого:

1) составляем расчетную табл.11 , по которой находим

$\chi^2_{набл}$ - наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$

Таблица 11

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
1	n_1	n_1'	$n_1 - n_1'$	$(n_1 - n_1')^2$	$\frac{(n_1 - n_1')^2}{n_1'}$	n_1^2	$\frac{n_1^2}{n_1'}$
…	…	…	…	…	…	…	…
m	n_m	n_m'	$n_m - n_m'$	$(n_m - n_m')^2$	$\frac{(n_m - n_m')^2}{n_m'}$	n_m^2	$\frac{n_m^2}{n_m'}$
$\sum$	n				$\chi^2_{набл}$		

Правило проверки (продолжение)

2) Находим число степеней свободы k : $k = m - r - 1$

где m - число интервалов; r - число параметров предполагаемого распределения,

Для нормального распределения $k = m - 3$, так как $r = 2$ (нормальный закон распределения характеризуется двумя параметрами a и σ).

4. . В таблице критических точек (**квантилей**) распределения

(Приложение 3) по заданному уровню значимости и числу степеней свободы находим правосторонней критической области.

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ - нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 о нормальном χ^2 распределении генеральной совокупности.

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ - гипотезу **отвергаем**.

Замечание

1) Объем выборки должен быть достаточно велик $(n \geq 50)$

2) Малочисленные частоты $(n_i < 5)$ следует объединить. В этом случае и соответствующие им теоретические частоты также надо сложить.

$$k = m - 3$$

Если производилось объединение частот, то при определении числа степеней свободы по формуле следует в качестве m принять число интервалов, оставшихся после объединения частот.

Пример.

Пусть из генеральной совокупности X задана выборка объемом 50 . Требуется проверить гипотезу H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности по данной выборке.

1. Из рассмотренных выше примеров известно:

m - интервальный ряд (таблица 12) Таблица 12

Интервалы	$[-2{,}06;-1{,}46)$	$[-1{,}46;-0{,}86)$	$[-0{,}86;-0{,}26)$	$[-0{,}26;0{,}34)$
Частоты n_i	2	6	11	15

Интервалы	$[0{,}34;0{,}94)$	$[0{,}94;1{,}54)$	$[1{,}54;2{,}14)$
Частоты n_i	11	3	2

$\sum_{i=1}^{7} n_i = 50$.

- числовые характеристики выборки $\overline{x_в} = -0{,}032$,$\sigma_в = 0{,}8195$,

$E_k^* = 0{,}3112$,$A_S^* = 0{,}0759$

Пример

3. **Проверим гипотезу по критерию Пирсона**.

1) $\overline{x_в} = -0{,}032$, $\sigma_в = 0{,}8195$.

2) Найдем теоретические частоты n_i' вторым способом. Интервальный ряд (табл.12) содержит интервалы с частотами меньшими 5. Следовательно, два первых и два последних интервала объединяем, при этом соответствующие частоты суммируем.

Составим расчетную табл.13 по форме табл.10.

i	Границы интервала		n_i	Границы интервала		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	P_i	n_i'
	x_i	x_{i+1}		z_i	z_{i+1}				
1	-2,06	-0,86	8	$-\infty$	-1,01	-0,5	-0,3438	0,1562	7,81
2	-0,86	-0,26	11	-1,01	-0,28	-0,3438	-0,1103	0,2335	11,675
3	-0,26	0,34	15	-0,28	0,45	-0,1103	0,1736	0,2839	14,195
4	0,34	0,94	11	0,45	1,19	0,1736	0,3830	0,2094	10,47
5	0,94	2,14	5	1,19	$+\infty$	0,3830	0,5	0,1170	5,85
$\sum$								**1**	**50**

Пример

3) Сравним эмпирические (n_i') и теоретические (n_i) частоты. Для этого составляем расчетную табл.14 по форме табл.11

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
1	8	7,810	0,190	0,0361	0,0046	64	8,1946
2	11	11,675	-0,675	0,4556	0,0390	121	10,3640
3	15	14,195	0,805	0,6480	0,0457	225	15,8507
4	11	10,470	0,530	0,2809	0,0268	121	11,5568
5	5	5,850	-0,850	0,7225	0,1235	25	4,2735
Σ					**0,2396**		**50,2396**

Контроль:

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{n_i^2}{n_i'} - n = 50,2396 - 50 = 0,2396$$, $\chi^2_{набл} = 0,2396$. Расчеты проведены верно.

Пример

4) Зададим $\alpha = 0{,}05$.

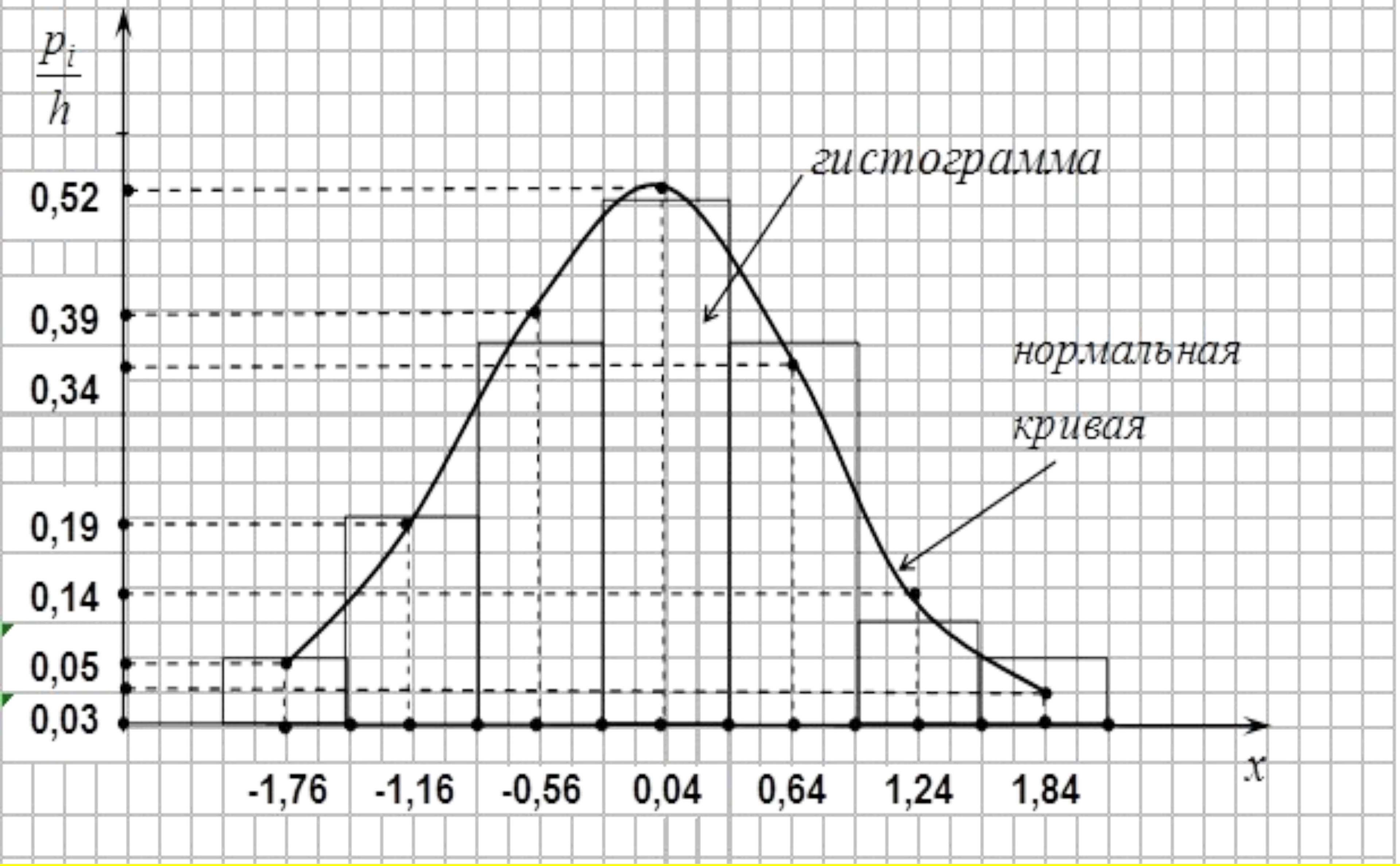
Вычислим число степеней свободы $k_2 = 5 - 3 = 2$ и найдем $\chi^2_{кр}(0{,}05;2) = 6{,}0$ (Приложение 3). Получим $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$.

Следовательно, нет оснований отвергать гипотезу H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности X.

Другими словами различие между эмпирическими (n_i) и теоретическими (n_i') частотами незначительное (случайное), которое можно объяснить малым объемом выборки.

Построим нормальную кривую. Для этого составим табл.15. *Таблица15*

Середины интервалов	-1,76	-1,16	-0,56	0,04	0,64	1,24	1,84
$\frac{p_i}{h}$	0,05	0,19	0,39	0,52	0,34	0,14	0,03



Так как гипотеза о нормальном распределении не отвергается, то нормальная кривая хорошо сглаживает гистограмму.