

# Ромб и квадрат

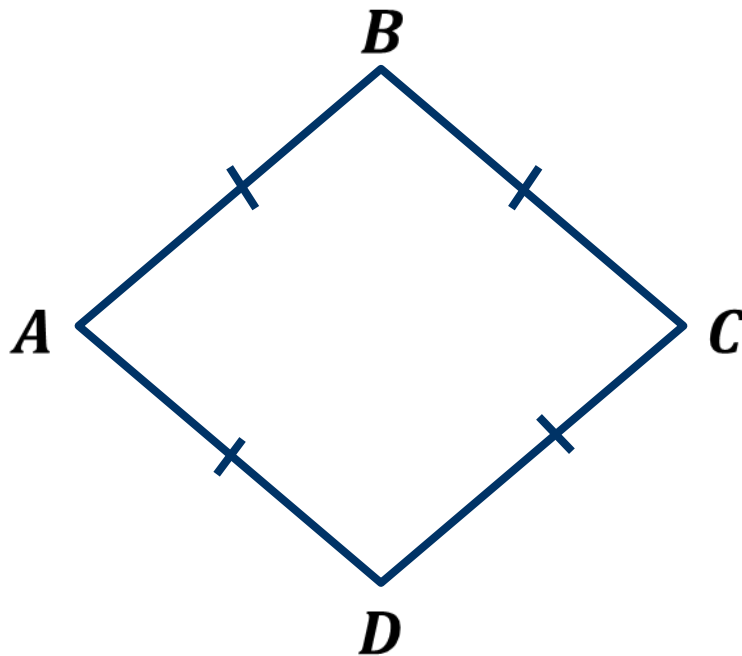
**Параллелограмм** – это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.



**Прямоугольник** – это параллелограмм, у которого все углы прямые.



**Ромб** – это параллелограмм, у которого все стороны равны.



Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

**Теорема. Свойства диагоналей ромба.** У ромба диагонали взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов.

**Доказательство.**

Рассмотрим  $\triangle ABC$ .

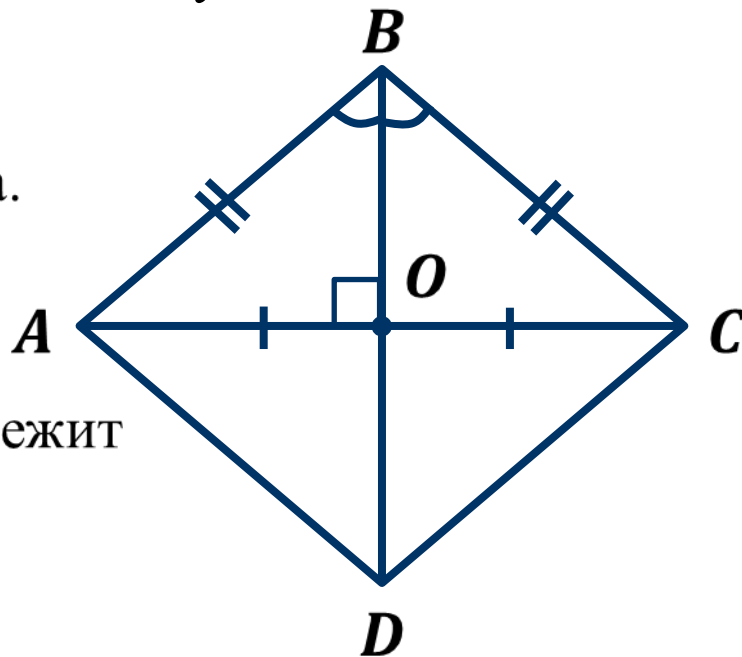
$AO = OC$ , следовательно,  $BO$  – медиана.

$AB = BC$ .

$\triangle ABC$  – равнобедренный.

Медиана  $BO$  – биссектриса, высота.

Следовательно, диагональ  $BD \perp AC$  и лежит на биссектрисе  $\angle ABC$ .



*В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.*

**Теорема. Признак ромба.** Если у параллелограмма диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб.

**Доказательство.**

Рассмотрим  $\triangle AOB$  и  $\triangle BOC$ .

Сторона  $OB$  – общая,

$OA = OC$ , так как диагонали т.  $O$  делятся пополам.

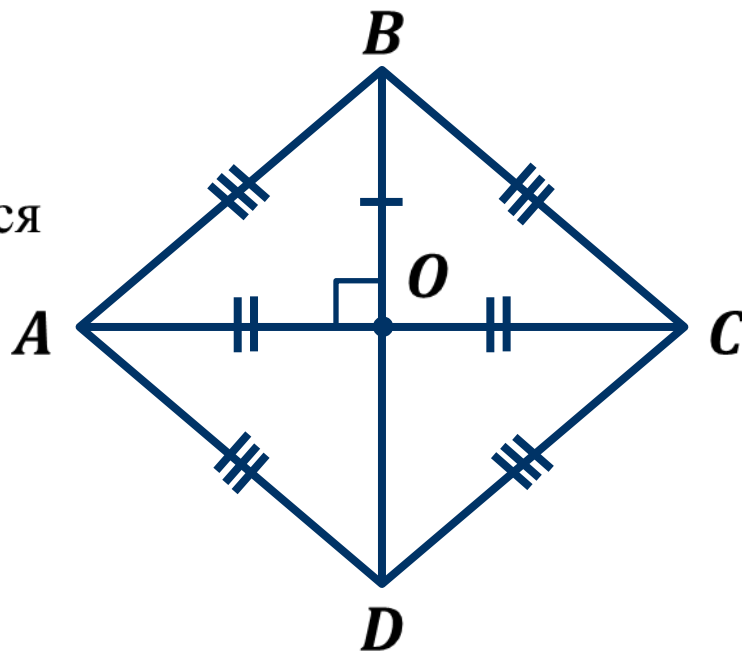
$\triangle AOB = \triangle BOC$  по двум катетам.

Следовательно,  $AB = BC$ .

$AB = CD$ ,  $BC = AD$ .

Следовательно,  $AB = BC = CD = AD$ .

$ABCD$  – ромб.



**Теорема. Признак ромба.** Если у параллелограмма одна из диагоналей лежит на биссектрисе угла, то этот параллелограмм – ромб.

**Доказательство.**

$$\angle 1 = \angle 2.$$

$\angle 2 = \angle 3$  как накр. лежащие при  $AD \parallel BC$  и секущей  $AC$ .

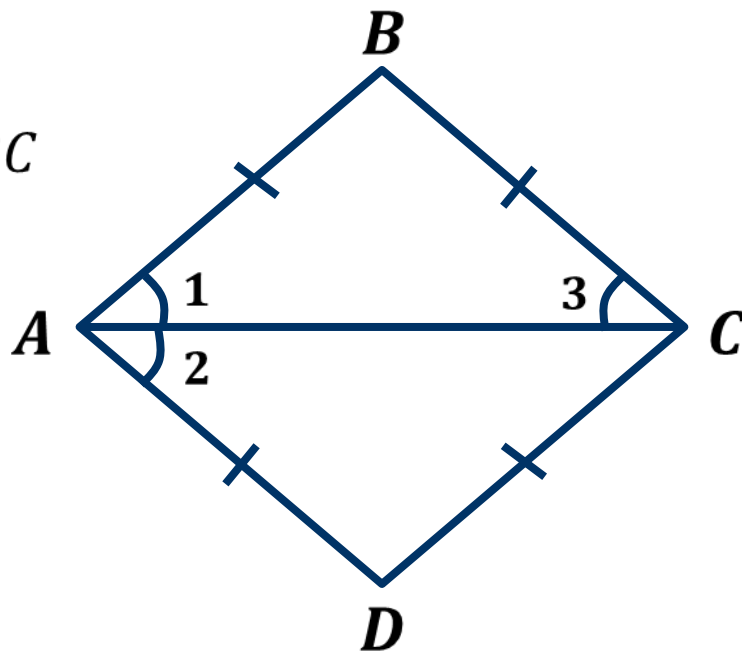
Следовательно,  $\angle 1 = \angle 3$ .

$\triangle ABC$  – равнобедренный, то есть  $AB = BC$ .

$$AB = CD, BC = AD.$$

Следовательно,  $AB = BC = CD = AD$ .

$ABCD$  – ромб.



*Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.*

**Задача.** Чему равны углы ромба, если его меньшая диагональ равна стороне?

**Решение.**

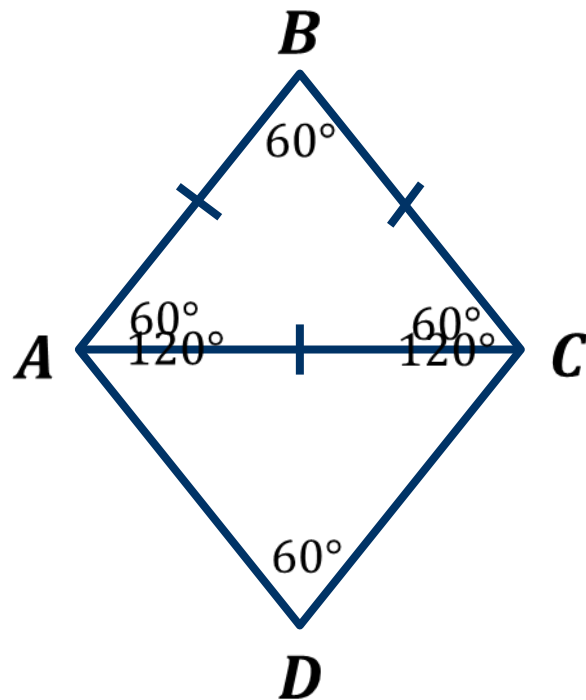
$\triangle ABC$  – равносторонний.

$$\angle A = 60^\circ \cdot 2 = 120^\circ.$$

$$\angle A = \angle C = 120^\circ,$$

$$\angle B = \angle D = 60^\circ.$$

**Ответ:**  $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$ .



**Задача.** В ромбе  $ABCD$  перпендикуляр  $AE$ , проведённый из вершины  $A$  делит сторону  $CD$  пополам. Найдите градусную меру  $\angle BCD$ .

**Решение.**

$\triangle AED$  – прямоугольный.

$AD = CD$ .

$CE = ED$ , то есть  $ED = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} AD$ .

$\angle DAE = 30^\circ$ .

$\angle BAE, \angle AEC$  – внутр. одностор. при  $AB \parallel CD$  и секущей  $AE$ .

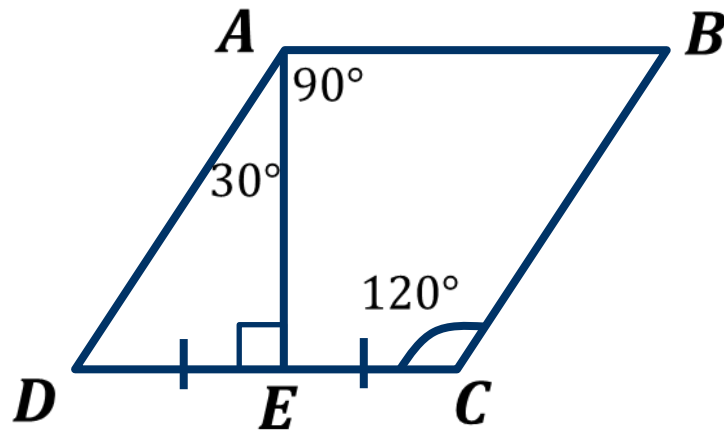
$\angle BAE + \angle AEC = 180^\circ$ .

Так как  $\angle AEC = 90^\circ$ , то  $\angle BAE = 90^\circ$ .

$\angle BAD = \angle BAE + \angle DAE = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ .

$\angle BCD = \angle BAD = 120^\circ$ .

**Ответ:**  $120^\circ$ .

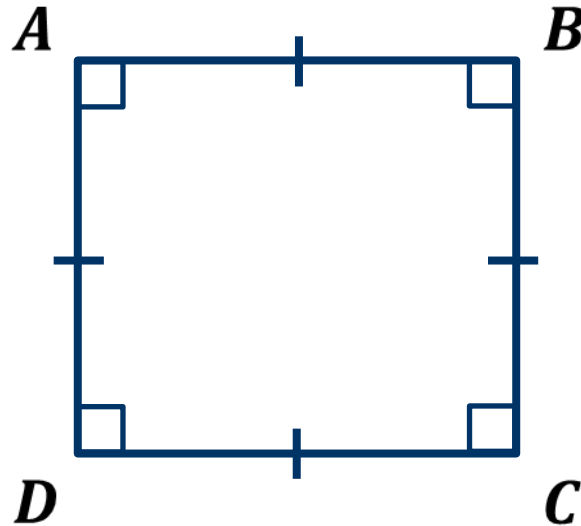


*Если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла  $30^\circ$ .*



**Квадрат** – это прямоугольник, у которого все стороны равны.

**Квадрат** – это ромб, у которого все углы прямые.

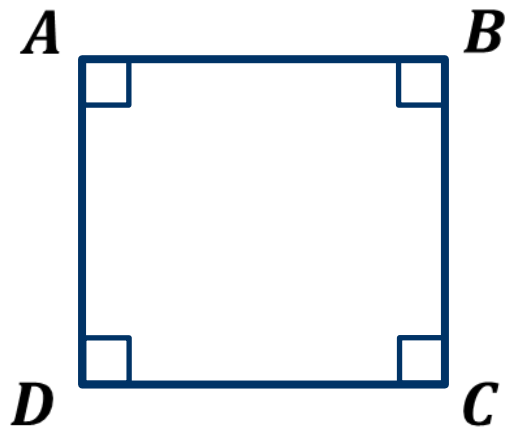


**Квадрат** – это параллелограмм, который одновременно является и прямоугольником, и ромбом.

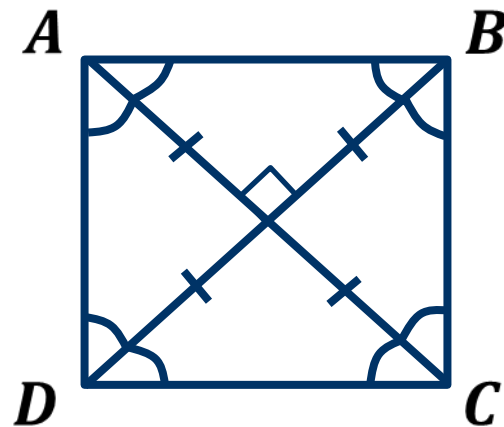
Квадрат обладает всеми свойствами и прямоугольника, и ромба.

## Основные свойства квадрата:

1. Все углы квадрата прямые.



2. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и лежат на биссектрисах его углов.



$$AC = BD$$

**Задача.** На рисунке  $ABCD$  – квадрат,  $AC = CE$ . Найдите  $\angle AED$ .

**Решение.**

$$\angle ACB = \angle ACD = 90^\circ : 2 = 45^\circ.$$

$\angle BCD$ ,  $\angle BCE$  – смежные,

$$\text{то есть } \angle BCD + \angle BCE = 180^\circ.$$

Так как  $\angle BCD = 90^\circ$ , то  $\angle BCE = 90^\circ$ .

$$\begin{aligned} \angle ACE &= \angle ACB + \angle BCE = \\ &= 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ. \end{aligned}$$

$\triangle ACE$  – равнобедренный,

тогда  $\angle CAE = \angle AEC$ .

$$\angle CAE + \angle AEC + \angle ACE = 180^\circ,$$

$$\angle CAE + \angle AEC + 135^\circ = 180^\circ,$$

$$\angle CAE + \angle AEC = 180^\circ - 135^\circ,$$

$$\angle CAE + \angle AEC = 45^\circ.$$

$\angle CAE = \angle AEC = 22,5^\circ$ , то есть  $\angle AED = 22,5^\circ$ .

**Ответ:**  $22,5^\circ$ .

