

Ромб и квадрат

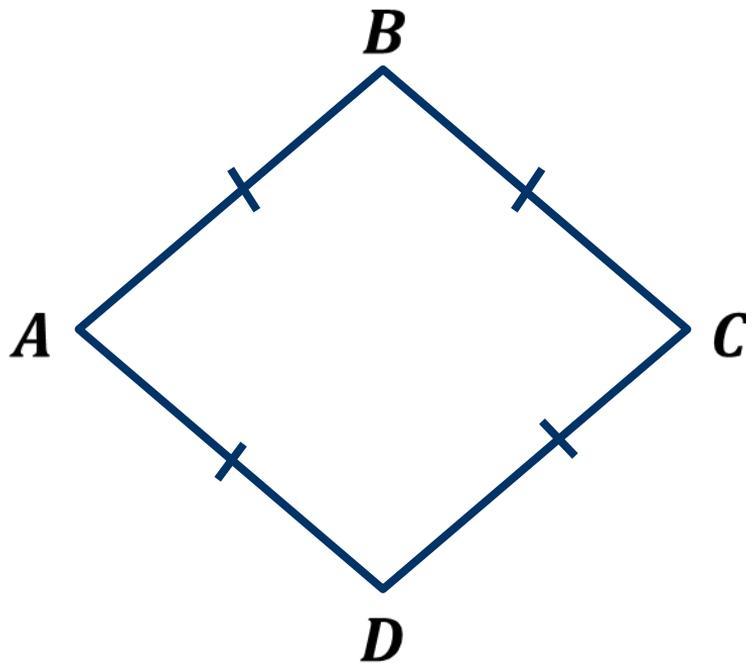
Параллелограмм – это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.



Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.



Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.



Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

Теорема. Признак ромба. Если у параллелограмма диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб.

Доказательство.

Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle BOC$.

Сторона OB – общая,

$OA = OC$, так как диагонали т. O делятся пополам.

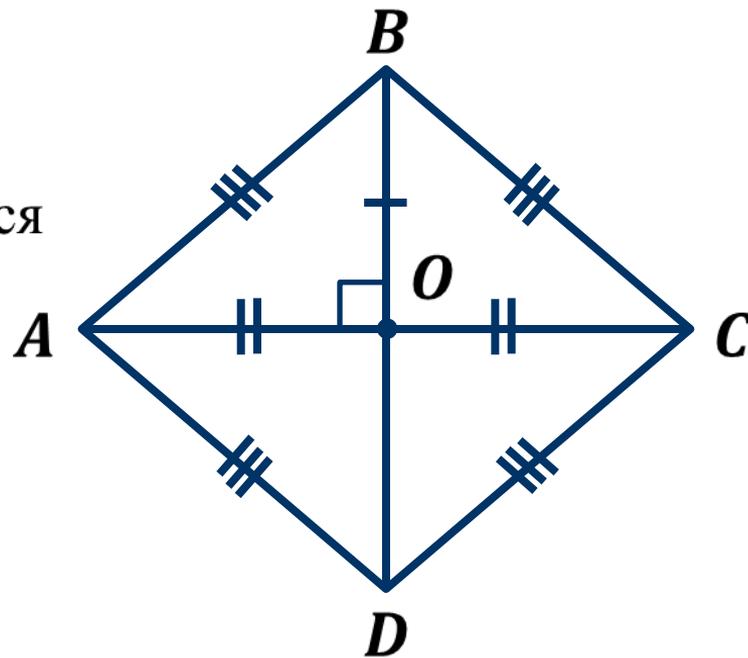
$\triangle AOB = \triangle BOC$ по двум катетам.

Следовательно, $AB = BC$.

$AB = CD$, $BC = AD$.

Следовательно, $AB = BC = CD = AD$.

$ABCD$ – ромб.



Теорема. Признак ромба. Если у параллелограмма одна из диагоналей лежит на биссектрисе угла, то этот параллелограмм – ромб.

Доказательство.

$$\angle 1 = \angle 2.$$

$\angle 2 = \angle 3$ как накр. лежащие при $AD \parallel BC$
и секущей AC .

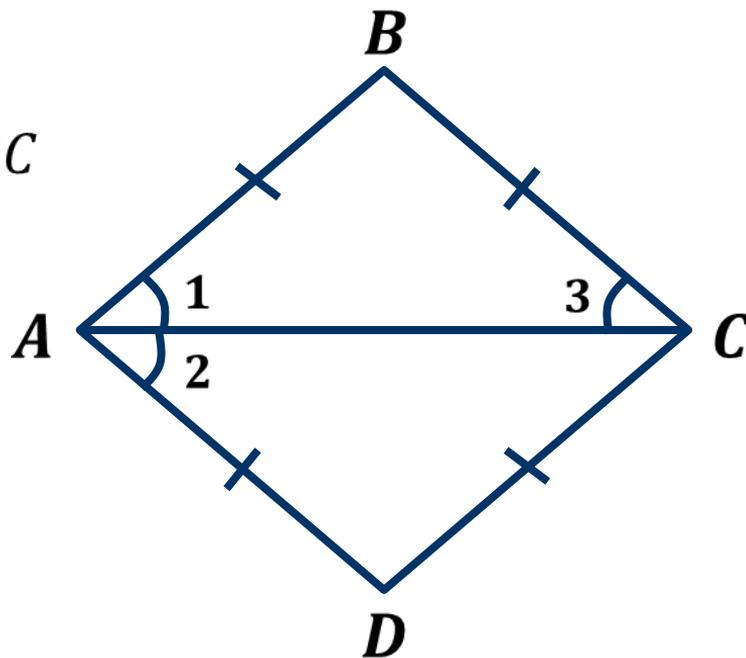
Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.

$\triangle ABC$ – равнобедренный,
то есть $AB = BC$.

$$AB = CD, BC = AD.$$

Следовательно, $AB = BC = CD = AD$.

$ABCD$ – ромб.



*Если в треугольнике два угла равны,
то он равнобедренный.*

Задача. Чему равны углы ромба, если его меньшая диагональ равна стороне?

Решение.

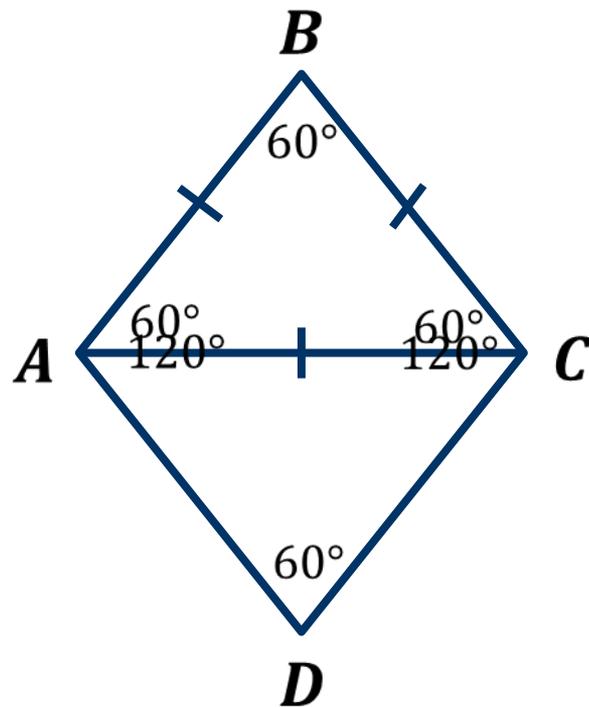
$\triangle ABC$ – равносторонний.

$$\angle A = 60^\circ \cdot 2 = 120^\circ.$$

$$\angle A = \angle C = 120^\circ,$$

$$\angle B = \angle D = 60^\circ.$$

Ответ: $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$.



Задача. В ромбе $ABCD$ перпендикуляр AE , проведённый из вершины A делит сторону CD пополам. Найдите градусную меру $\angle BCD$.

Решение.

$\triangle AED$ – прямоугольный.

$AD = CD$.

$CE = ED$, то есть $ED = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} AD$.

$\angle DAE = 30^\circ$.

$\angle BAE, \angle AEC$ – внутр. одностор. при $AB \parallel CD$ и секущей AE .

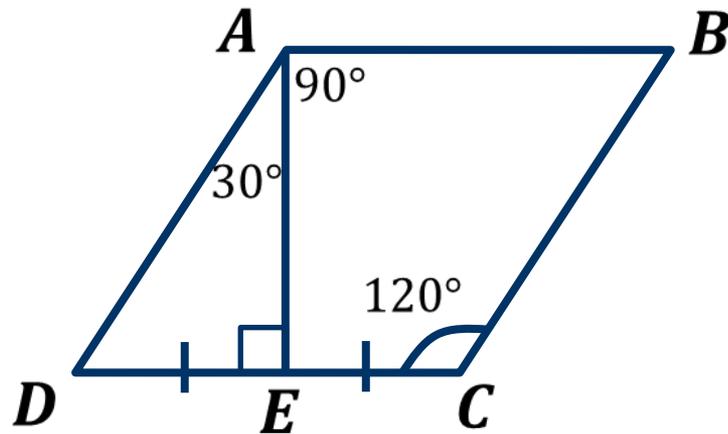
$\angle BAE + \angle AEC = 180^\circ$.

Так как $\angle AEC = 90^\circ$, то $\angle BAE = 90^\circ$.

$\angle BAD = \angle BAE + \angle DAE = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$.

$\angle BCD = \angle BAD = 120^\circ$.

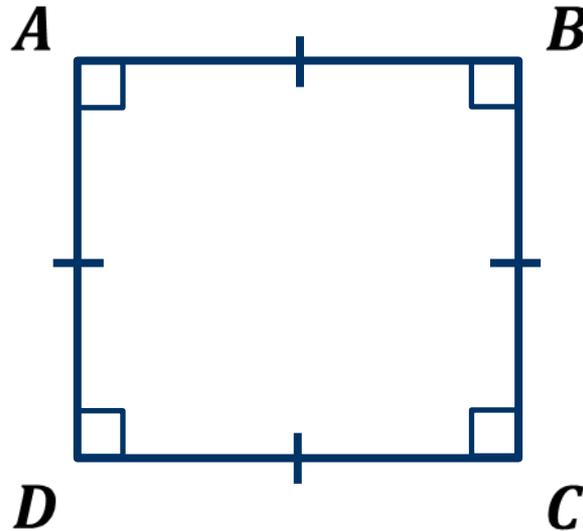
Ответ: 120° .



Если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла 30° .

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Квадрат – это ромб, у которого все углы прямые.

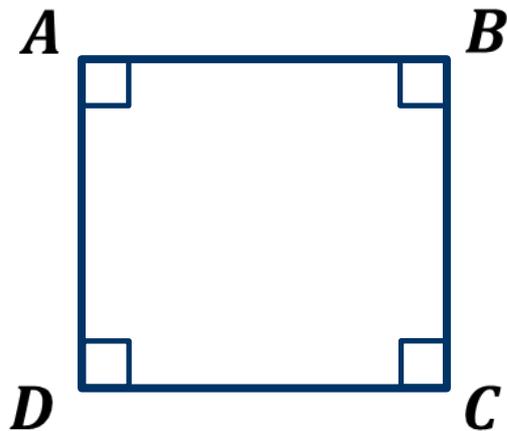


Квадрат – это параллелограмм, который одновременно является и прямоугольником, и ромбом.

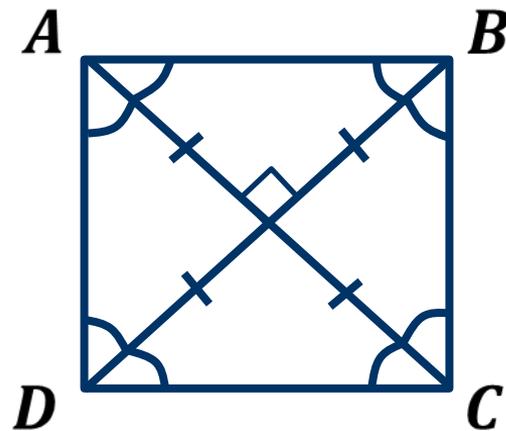
Квадрат обладает всеми свойствами и прямоугольника, и ромба.

Основные свойства квадрата:

1. Все углы квадрата прямые.



2. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и лежат на биссектрисах его углов.



$$AC = BD$$

Задача. На рисунке $ABCD$ – квадрат, $AC = CE$. Найдите $\angle AED$.

Решение.

$$\angle ACB = \angle ACD = 90^\circ : 2 = 45^\circ.$$

$\angle BCD$, $\angle BCE$ – смежные,

$$\text{то есть } \angle BCD + \angle BCE = 180^\circ.$$

Так как $\angle BCD = 90^\circ$, то $\angle BCE = 90^\circ$.

$$\begin{aligned} \angle ACE &= \angle ACB + \angle BCE = \\ &= 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ. \end{aligned}$$

$\triangle ACE$ – равнобедренный,

тогда $\angle CAE = \angle AEC$.

$$\angle CAE + \angle AEC + \angle ACE = 180^\circ,$$

$$\angle CAE + \angle AEC + 135^\circ = 180^\circ,$$

$$\angle CAE + \angle AEC = 180^\circ - 135^\circ,$$

$$\angle CAE + \angle AEC = 45^\circ.$$

$\angle CAE = \angle AEC = 22,5^\circ$, то есть $\angle AED = 22,5^\circ$.

Ответ: $22,5^\circ$.

