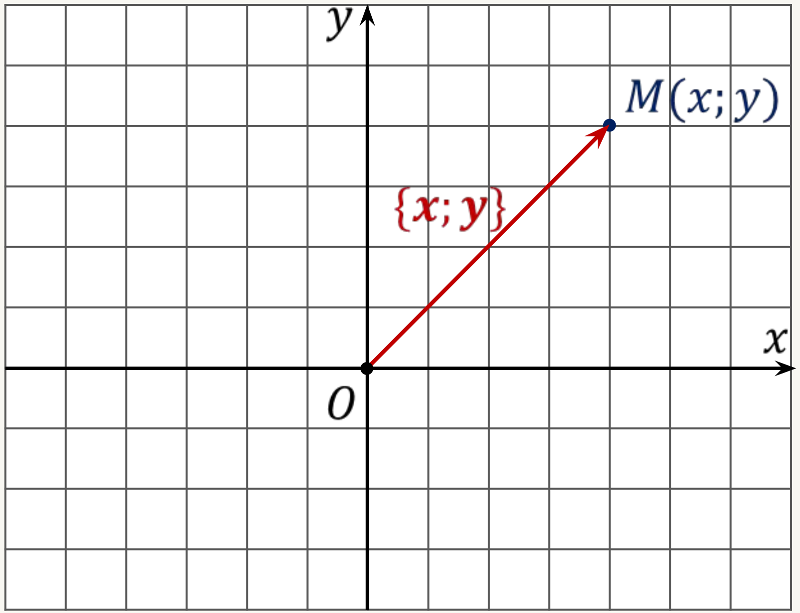
Связь между координатами векторов и координатами точек



$\overrightarrow{OM}$

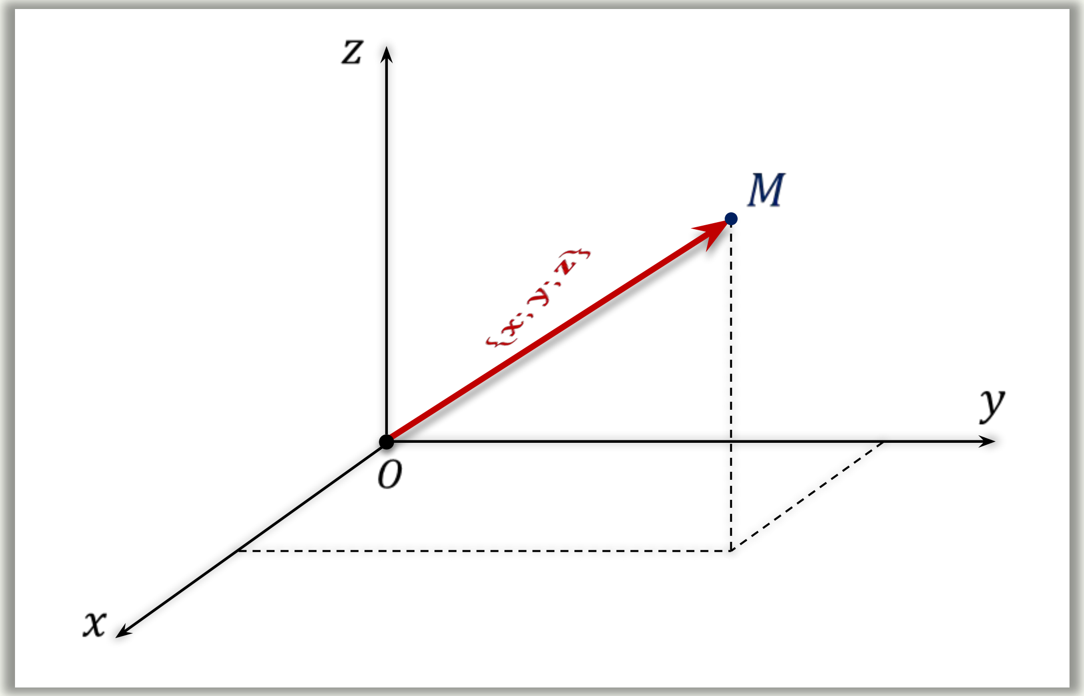
радиус-вектор точки M

$M(x; y)$

$\Leftarrow$

$\overrightarrow{OM}\ \{x; y\}$

Координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора.



$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$

радиус-вектор точки $\boldsymbol{M}$

$M(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})$

$\Leftarrow$

$\overrightarrow{OM}\ \{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z}\}$

Координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора.

Координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора.

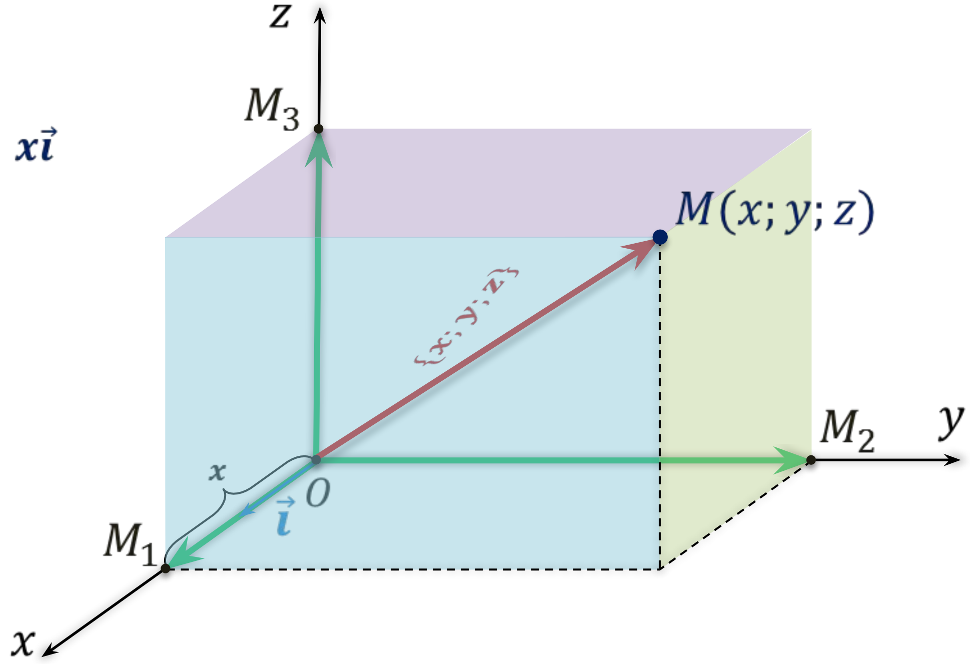
Доказательство:

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$

$x > 0$

$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = x$

$\overrightarrow{OM_1} \upuparrows \vec{i} \implies \boldsymbol{\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}}$



Координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора.

Доказательство:

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$

$x > 0$

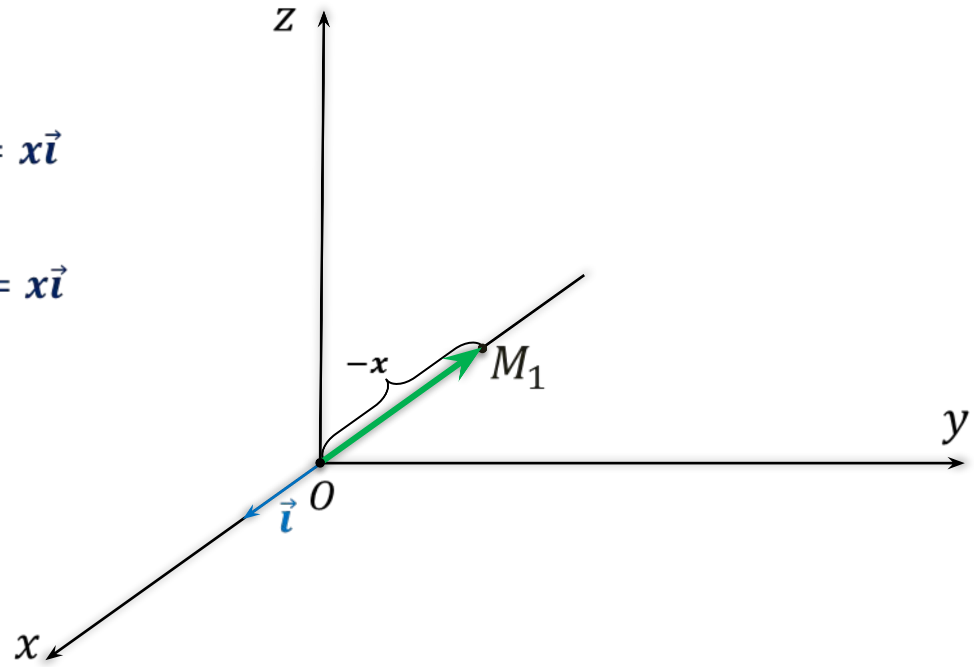
$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = x$

$\overrightarrow{OM_1} \upuparrows \vec{i} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}}$

$x < 0$

$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = -x$

$\overrightarrow{OM_1} \uparrow\downarrow \vec{i} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}}$



Координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора.

Доказательство:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$$

$x > 0$

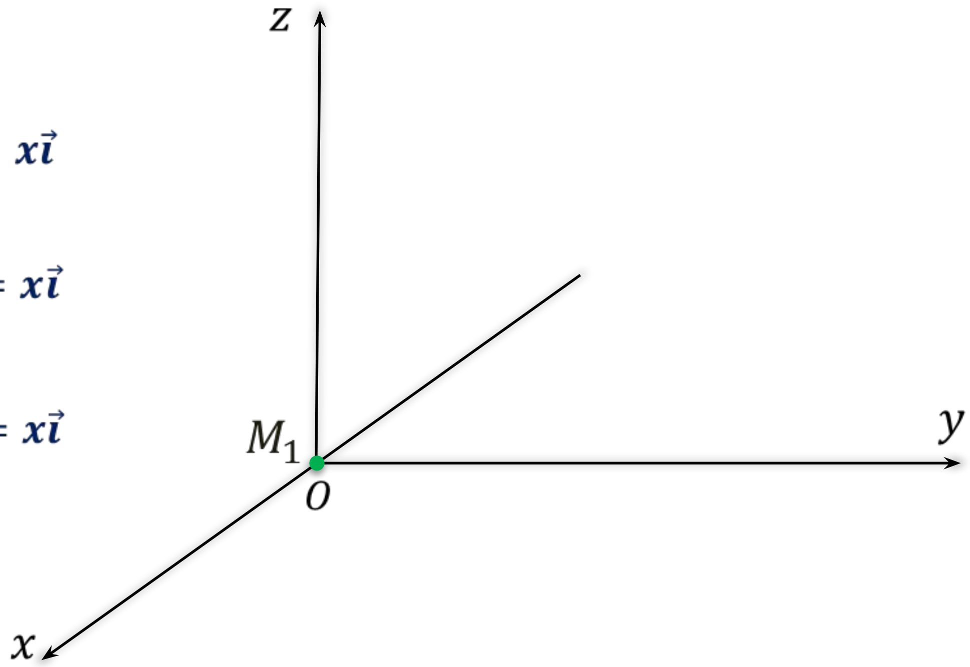
$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = x$ $\qquad \overrightarrow{OM_1} \upuparrows \vec{i} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}}$

$x < 0$

$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = -x$ $\qquad \overrightarrow{OM_1} \uparrow\downarrow \vec{i} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}}$

$x = 0$

$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = 0$ $\qquad \overrightarrow{OM_1} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}}$



Координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора.

Доказательство:

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$

$x > 0$

$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = x$ $\qquad \overrightarrow{OM_1} \upuparrows \vec{i} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}}$

$x < 0$

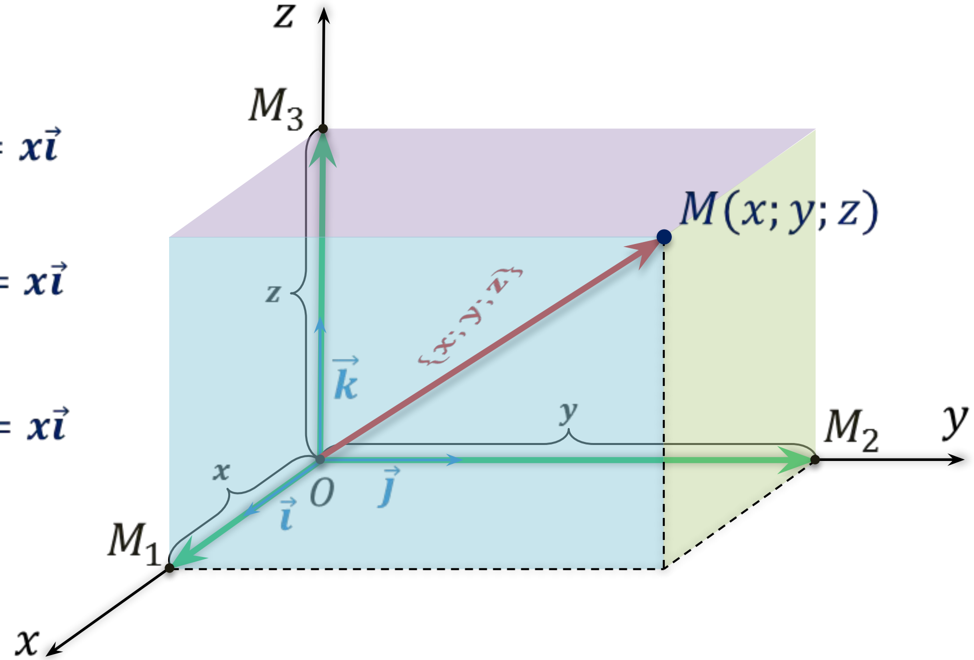
$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = -x$ $\qquad \overrightarrow{OM_1} \uparrow\downarrow \vec{i} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}}$

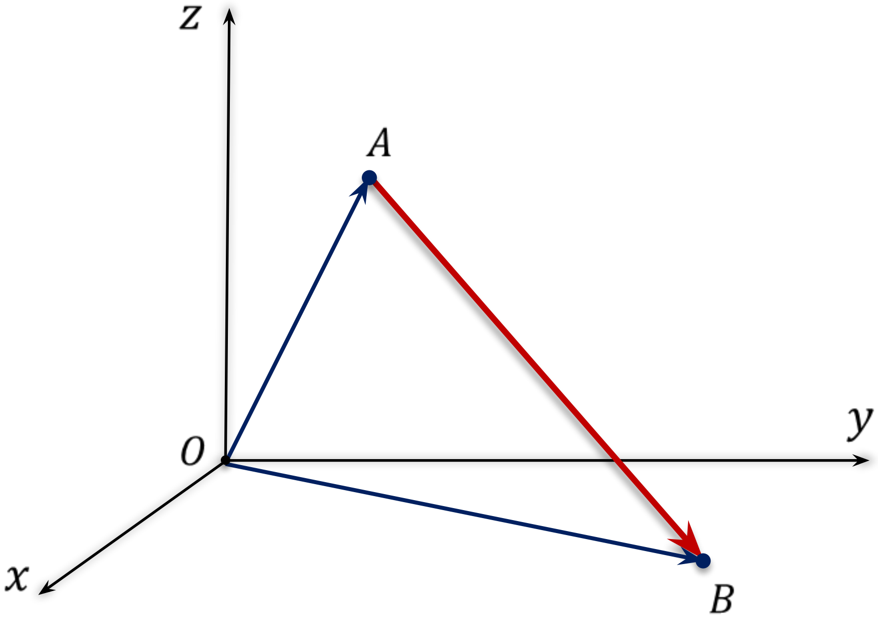
$x = 0$

$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = 0$ $\qquad \overrightarrow{OM_1} = \vec{0} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}}$ $\qquad \boldsymbol{\overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}}$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OM}\{x; y; z\}$





$\overrightarrow{OA}\,\{x_1; y_1; z_1\}$

$\overrightarrow{OB}\,\{x_2; y_2; z_2\}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\,\{\qquad ; \qquad ; \qquad\}$

Каждая координата вектора равна
разности соответствующих координат его конца и начала.

Задача. По координатам точек $A(2;-3;0)$, $B(7;-12;18)$ и $C(-8;0;5)$ определить координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$, если точка O — точка начала координат.

Решение.

$$A(2;-3;0) \qquad B(7;-12;18) \qquad C(-8;0;5)$$

$\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OA}\{\qquad\qquad\}$

$\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OB}\{\qquad\qquad\}$

$\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OC}\{\qquad\qquad\}$

Задача. По координатам точек $A(2; -3; 0)$, $B(7; -12; 18)$ и $C(-8; 0; 5)$ определить координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$, если точка O — точка начала координат.

Решение.

$$A(2; -3; 0) \qquad B(7; -12; 18) \qquad C(-8; 0; 5)$$

$\overrightarrow{OA}$ – радиус-вектор точки A

$\overrightarrow{OA}\,\{2; -3; 0\}$

$\overrightarrow{OB}$ – радиус-вектор точки B

$\overrightarrow{OB}\,\{7; -12; 18\}$

$\overrightarrow{OC}$ – радиус-вектор точки C

$\overrightarrow{OC}\,\{-8; 0; 5\}$

$\overrightarrow{AB}\,\{\quad ;\quad ;\quad \}$

$\overrightarrow{AB}\,\{5; -9; 18\}$

Задача. По координатам точек $A(2;-3;0)$, $B(7;-12;18)$ и $C(-8;0;5)$ определить координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$, если точка O — точка начала координат.

Решение.

$A(2;-3;0)$ $\quad B(7;-12;18)$ $\quad C(-8;0;5)$

$\overrightarrow{OA}$ – радиус-вектор точки A

$\overrightarrow{OA}\,\{2;-3;0\}$

$\overrightarrow{OB}$ – радиус-вектор точки B

$\overrightarrow{OB}\,\{7;-12;18\}$

$\overrightarrow{OC}$ – радиус-вектор точки C

$\overrightarrow{OC}\,\{-8;0;5\}$

$\overrightarrow{AB}\,\{7-2;-12-(-3);18-0\}$

$\overrightarrow{AB}\,\{5;-9;18\}$

$\overrightarrow{BC}\,\{\quad;\quad;\quad\}$

$\overrightarrow{BC}\,\{-15;12;-13\}$

Задача. По координатам точек $A(2;-3;0)$, $B(7;-12;18)$ и $C(-8;0;5)$ определить координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$, если точка O — точка начала координат.

Решение.

$$A(2;-3;0) \qquad B(7;-12;18) \qquad C(-8;0;5)$$

$\overrightarrow{OA}$ – радиус-вектор точки A

$\overrightarrow{OA}\{2;-3;0\}$

$\overrightarrow{OB}$ – радиус-вектор точки B

$\overrightarrow{OB}\{7;-12;18\}$

$\overrightarrow{OC}$ – радиус-вектор точки C

$\overrightarrow{OC}\{-8;0;5\}$

$\overrightarrow{AB}\{7-2;-12-(-3);18-0\}$

$\overrightarrow{AB}\{5;-9;18\}$

$\overrightarrow{BC}\{-8-7;0-(-12);5-18\}$

$\overrightarrow{BC}\{-15;12;-13\}$

$\overrightarrow{AC}\{\quad;\quad;\quad\}$

$\overrightarrow{AC}\{-10;3;5\}$

Задача. По координатам векторов
$\overrightarrow{OA}\{4; -7; 1\}$, $\overrightarrow{OB}\{-2; 0; 3\}$, $\overrightarrow{OC}\{0,5; -4; 8\}$, $\overrightarrow{AD}\{13; -2; 5\}$, $\overrightarrow{BE}\{1; -3; 0\}$ и $\overrightarrow{CF}\{-9; 0; 0\}$
определить координаты точек A, B, C, D, E и F, если точка O — точка начала координат.

Решение.

$\overrightarrow{OA}\{4; -7; 1\}$ $\overrightarrow{OC}\{0,5; -4; 8\}$ $\overrightarrow{BE}\{1; -3; 0\}$

$\overrightarrow{OB}\{-2; 0; 3\}$ $\overrightarrow{AD}\{13; -2; 5\}$ $\overrightarrow{CF}\{-9; 0; 0\}$

$\overrightarrow{OA}$

$A(\qquad)$

$\overrightarrow{OB}$

$B(\qquad)$

$\overrightarrow{OC}$

$C(\qquad)$

Задача. По координатам векторов $\overrightarrow{OA}\,\{4; -7; 1\}$, $\overrightarrow{OB}\,\{-2; 0; 3\}$, $\overrightarrow{OC}\,\{0{,}5; -4; 8\}$, $\overrightarrow{AD}\,\{13; -2; 5\}$, $\overrightarrow{BE}\,\{1; -3; 0\}$ и $\overrightarrow{CF}\,\{-9; 0; 0\}$ определить координаты точек A, B, C, D, E и F, если точка O — точка начала координат.

Решение.

$\overrightarrow{OA}\,\{4; -7; 1\}$ $\overrightarrow{OC}\,\{0{,}5; -4; 8\}$ $\overrightarrow{BE}\,\{1; -3; 0\}$

$\overrightarrow{OB}\,\{-2; 0; 3\}$ $\overrightarrow{AD}\,\{13; -2; 5\}$ $\overrightarrow{CF}\,\{-9; 0; 0\}$

$\overrightarrow{OA}$ – радиус-вектор точки A

$A(4; -7; 1)$

$\overrightarrow{OB}$ – радиус-вектор точки B

$B(-2; 0; 3)$

$\overrightarrow{OC}$ – радиус-вектор точки C

$C(0{,}5; -4; 8)$

$x_2 = x + x_1$ $y_2 = y + y_1$ $z_2 = z + z_1$

$x_D =$ $y_D =$ $z_D =$

$D(17; -9; 6)$

$x_E =$ $y_E =$ $z_E =$

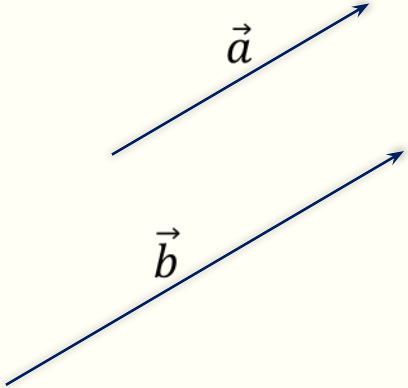
$E(-1; -3; 3)$

$x_F =$ $y_F =$ $z_F =$

$F(-8{,}5; -4; 8)$

Коллинеарные векторы

Ненулевые векторы называются коллинеарными,
если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.



Лемма. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$,
то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если $\boldsymbol{k} \geq 0$

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, если $\boldsymbol{k} < 0$

$\vec{a}\,\{x; y; z\}$

$\boldsymbol{\vec{b} = k\vec{a}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{b}\,\{kx; ky; kz\}$

$$\frac{kx}{x} = \frac{ky}{y} = \frac{kz}{z} = \boldsymbol{k}$$

Если координаты векторов
пропорциональны,
то данные векторы коллинеарны.

Задача. По координатам векторов определить, коллинеарны они или нет.

а) $\vec{a}\,\{3; 6; 8\}$, $\vec{b}\,\{6; 12; 16\}$

$\vec{a} \parallel \vec{b}$

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{16}{8} = 2$$

б) $\vec{c}\,\{1; -1; 3\}$, $\vec{d}\,\{2; 3; 15\}$

$\vec{c} \nparallel \vec{d}$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1} \neq \frac{15}{3}$$

в) $\vec{i}\,\{1; 0; 0\}$, $\vec{j}\,\{0; 1; 0\}$

$\vec{i} \nparallel \vec{j}$

$\vec{i}, \vec{j}$ – координатные векторы

г) $\vec{m}\,\{0; 0; 0\}$, $\vec{n}\,\{5; 7; -3\}$

$\vec{m} \parallel \vec{n}$

$\vec{m} = \vec{0};\ \vec{0} \parallel \vec{n}$

д) $\vec{p}\,\{\frac{1}{3}; -1; 5\}$, $\vec{q}\,\{-1; -3; -15\}$

$\vec{p} \nparallel \vec{q}$

$$\frac{-1}{\frac{1}{3}} \neq \frac{-3}{-1} \neq \frac{-15}{5} \quad \Leftrightarrow \quad -3 \neq 3 \neq -3$$

Задача. Найти значения переменных m и n, при которых данные векторы будут коллинеарны.

а) $\vec{a}\,\{15; m; 1\}$, $\vec{b}\,\{18; 12; n\}$

$\vec{a} \parallel \vec{b}$

$$\frac{18}{15} = \frac{12}{m} = \frac{n}{1}$$

$$k = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{12}{m} = \frac{6}{5} \quad \Longrightarrow \quad m = 10$$

$$\frac{n}{1} = \frac{6}{5} \quad \Longrightarrow \quad n = 1{,}2$$

б) $\vec{c}\,\{m; 0{,}4; -1\}$, $\vec{d}\,\{-\frac{1}{2}; n; 5\}$

$\vec{c} \parallel \vec{d}$

$$\frac{-0{,}5}{m} = \frac{n}{0{,}4} = \frac{5}{-1}$$

$$k = \frac{5}{-1} = -5$$

$$\frac{-0{,}5}{m} = -5 \quad \Longrightarrow \quad m = 0{,}1$$

$$\frac{n}{0{,}4} = -5 \quad \Longrightarrow \quad n = -2$$

Компланарные векторы

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Векторы называются **компланарными**, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

Теорема. (признак компланарности трёх векторов)
Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\boldsymbol{\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}}$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Теорема. (свойство трёх компланарных векторов)
Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны ($\vec{a} \nparallel \vec{b}$), то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\boldsymbol{\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}}$.

Компланарны ли тройки векторов?

$\vec{a}\,\{-3; -3; 0\}, \vec{\imath}\,\{1; 0; 0\}, \vec{\jmath}\,\{0; 1; 0\}$

$\vec{\imath} \nparallel \vec{\jmath} \implies \vec{a} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

$$\begin{cases} -3 = x \cdot 1 + y \cdot 0 \\ -3 = x \cdot 0 + y \cdot 1 \\ 0 = x \cdot 0 + y \cdot 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 = x \\ -3 = y \\ 0 = 0 \end{cases} \implies \vec{a} = -3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$$

$\vec{a}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$ – компланарны

$\vec{d}\,\{1; -1; 2\}, \vec{e}\,\{-2; 0; 1\}, \vec{f}\,\{5; -1; 0\}$

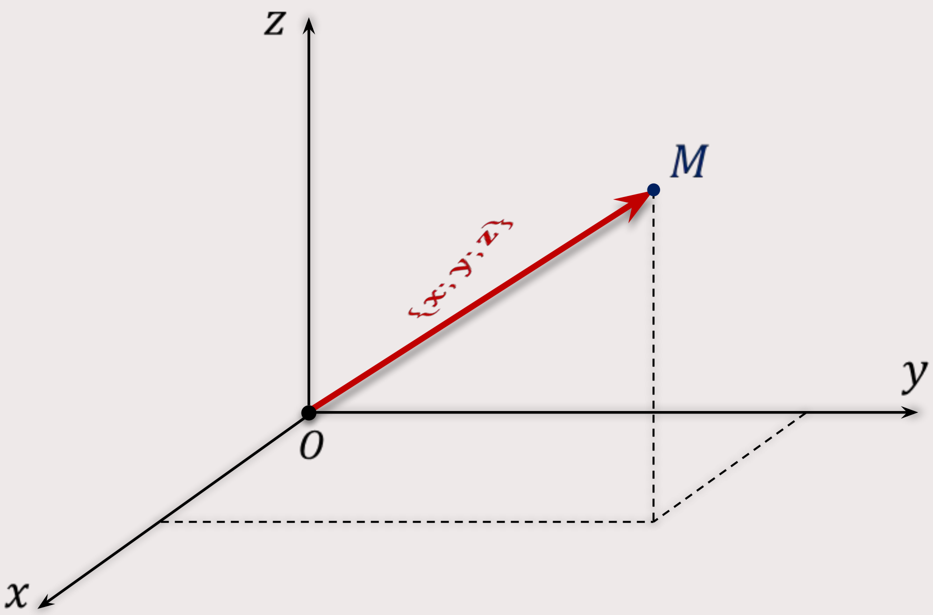
$\vec{d} \nparallel \vec{e} \implies \vec{f} = x\vec{d} + y\vec{e}$

$$\begin{cases} 5 = x \cdot 1 + y \cdot (-2) \\ -1 = x \cdot (-1) + y \cdot 0 \\ 0 = x \cdot 2 + y \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \implies \vec{f} = \vec{d} - 2\vec{e}$$

$\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ – компланарны

Связь между координатами векторов и координатами точек



$\overrightarrow{OM}$

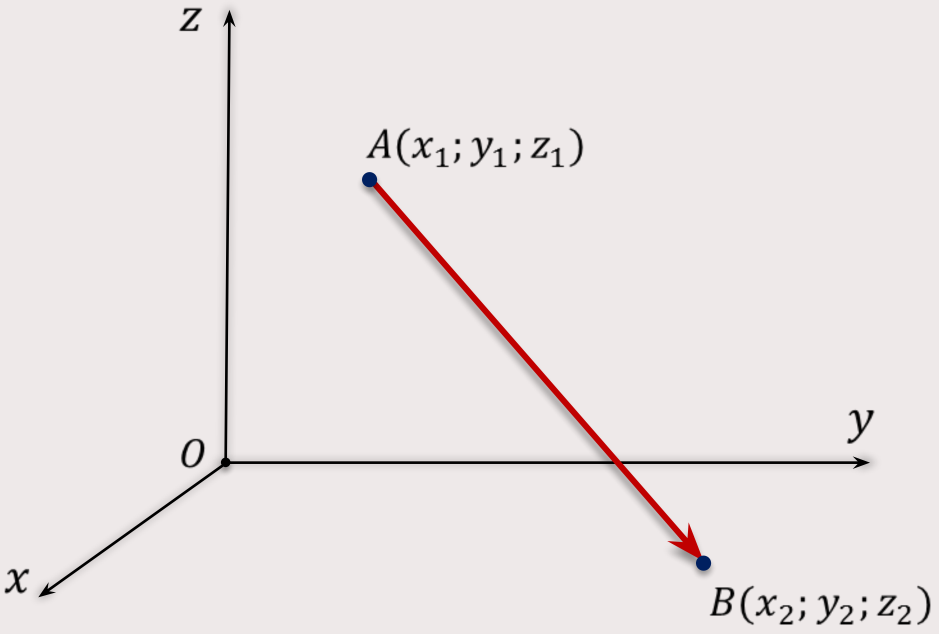
радиус-вектор точки M

$M(x; y; z)$

$\Leftarrow$

$\overrightarrow{OM}\{x; y; z\}$

Связь между координатами векторов и координатами точек



$\overrightarrow{OA}\{x_1;y_1;z_1\}$

$\overrightarrow{OB}\{x_2;y_2;z_2\}$

$\overrightarrow{AB}\{\quad;\quad;\quad\}$

Связь между координатами векторов и координатами точек

Если **координаты** векторов **пропорциональны**,
то данные векторы <u>коллинеарны</u>.

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\boldsymbol{\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}}$,
то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ <u>компланарны</u>.

Задача. По координатам векторов определить коллинеарны они или нет.

а) $\vec{a}\,\{3; 6; 8\}$, $\vec{b}\,\{6; 12; 16\}$ $\qquad \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{16}{8} = 2$

$\vec{a} \parallel \vec{b}$

б) $\vec{c}\,\{1; -1; 3\}$, $\vec{d}\,\{2; 3; 15\}$ $\qquad \frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1} \neq \frac{15}{3}$

$\vec{c} \nparallel \vec{d}$

в) $\vec{i}\,\{1; 0; 0\}$, $\vec{j}\,\{0; 1; 0\}$ $\qquad \vec{i}, \vec{j}$ – координатные векторы

$\vec{i} \nparallel \vec{j}$

г) $\vec{m}\,\{0; 0; 0\}$, $\vec{n}\,\{5; 7; -3\}$ $\qquad \vec{m} = \vec{0};\ \vec{0} \parallel \vec{n}$

$\vec{m} \parallel \vec{n}$

д) $\vec{p}\,\{\frac{1}{3}; -1; 5\}$, $\vec{q}\,\{-1; -3; -15\}$ $\qquad \frac{-1}{\frac{1}{3}} \neq$ …

$\vec{p} \nparallel \vec{q}$

Задача. Найти значения переменных m и n,
при которых данные векторы будут коллинеарны.

а) $\vec{a}\,\{15; m; 1\}$, $\vec{b}\,\{18; 12; n\}$

$\vec{a} \parallel \vec{b}$

$$\frac{18}{15} = \frac{12}{m} = \frac{n}{1}$$

$$k = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{12}{m} = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad m = 10$$

$$\frac{n}{1} = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad n = 1{,}2$$

б) $\vec{c}\,\{m; 0{,}4; -1\}$, $\vec{d}\,\{-\frac{1}{2}; n; 5\}$

$\vec{c} \parallel \vec{d}$

$$\frac{-0{,}5}{m} = \frac{n}{0{,}4} = \frac{5}{-1}$$

$$k = \frac{5}{-1} = -5$$

$$\frac{-0{,}5}{m} = -5 \quad \Rightarrow \quad m = 0{,}1$$

$$\frac{n}{0{,}4} = -5 \quad \Rightarrow \quad n = 2$$

Компланарны ли тройки векторов?

$\vec{a}\,\{-3; -3; 0\}$, $\vec{i}\,\{1; 0; 0\}$, $\vec{j}\,\{0; 1; 0\}$

$\vec{i} \nparallel \vec{j} \ \Rightarrow\ \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\begin{cases} -3 = x \cdot 1 + y \cdot 0 \\ -3 = x \cdot 0 + y \cdot 1 \\ 0 = x \cdot 0 + y \cdot 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 = x \\ -3 = y \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$$

$\vec{a}, \vec{i}, \vec{j}$ – компланарны

$\vec{d}\,\{1; -1; 2\}$, $\vec{e}\,\{-2; 0; 1\}$, $\vec{f}\,\{5; -1; 0\}$

$\vec{d} \nparallel \vec{e} \ \Rightarrow\ \vec{f} = x\vec{d} + y\vec{e}$

$$\begin{cases} 5 = x \cdot 1 + y \cdot (-2) \\ -1 = x \cdot (-1) + y \cdot 0 \\ 0 = x \cdot 2 + y \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{f} = \vec{i} - 2\vec{j}$$

$\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ – компланарны