УГАТУ
Уфимский государственный авиационный технический университет

Лекция 6

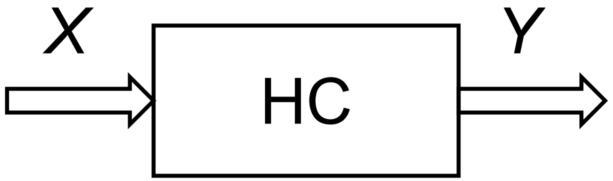
РБФ-сети.
НС Хопфилда.
НС Кохонена.

НС – УНИВЕРСАЛЬНЫЙ АППРОКСИМАТОР

Теорема (Колмогоров А.Н., 1957): любую непрерывную функцию *m* переменных можно получить с помощью операций сложения, умножения и суперпозиции из непрерывных функций одного переменного:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right) = \sum_{j=1}^{2m+1} g_j \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_{ij}\left(x_i\right) \right), \qquad (1)$$

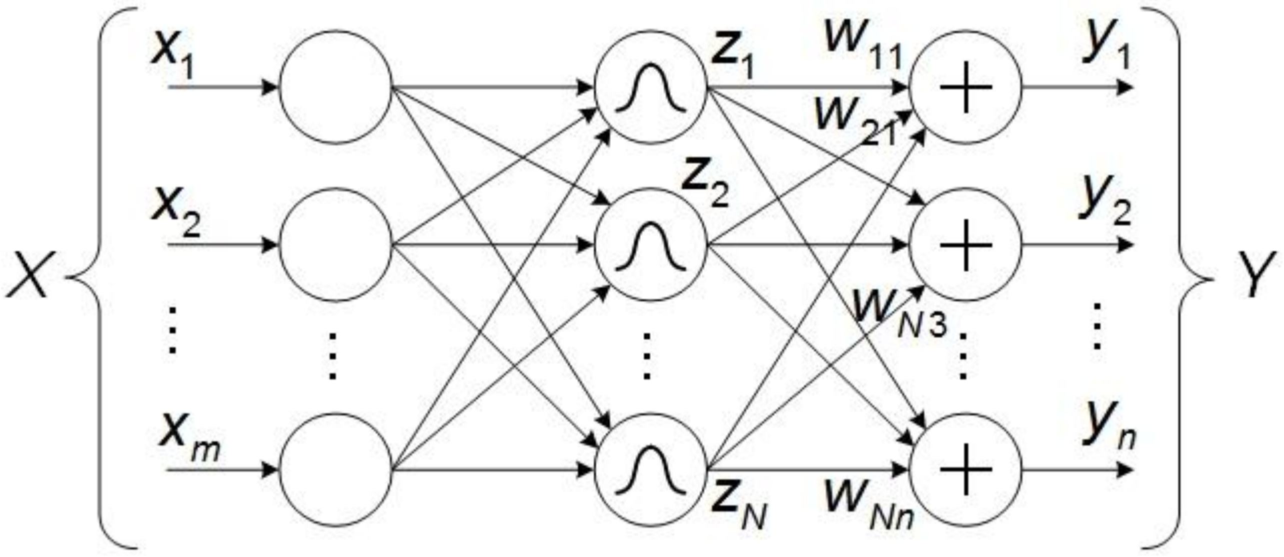
Теорема (Cybenko G., Funahashi K., Hornik K.M. и др. 1989): любую непрерывную функцию *m* переменных можно с любой степенью точности реализовать с помощью персептрона с одним скрытым слоем, имеющего достаточное количество нейронов в скрытом слое.



$$Y = F\left(X\right)$$

РБФ-СЕТЬ

= НС на радиальных базисных функциях (РБФ) $\Longrightarrow$ Broomhed D., Love D. (1988)



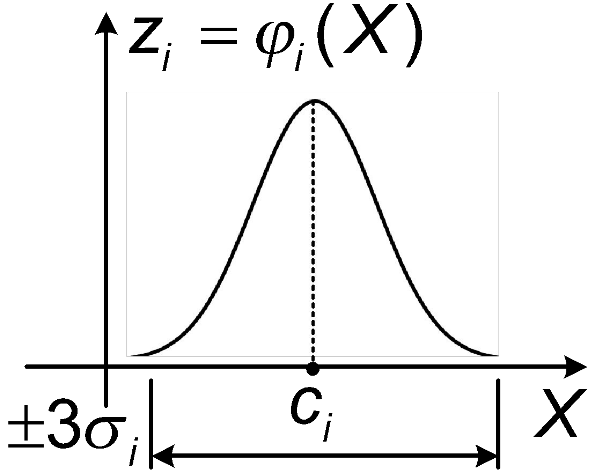
Уравнения НС:

$$\boxed{y_j = \sum_{i=1}^{N} w_{ij} z_j = \sum_{i=1}^{N} w_{ij} \varphi_i(X)}$$

где $\varphi_i(X) = e^{-\frac{\left|x-c_j\right|^2}{2\sigma_i^2}}$; (1)

$$\left|x - c_i\right| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - c_{ik})^2} \quad (2)$$

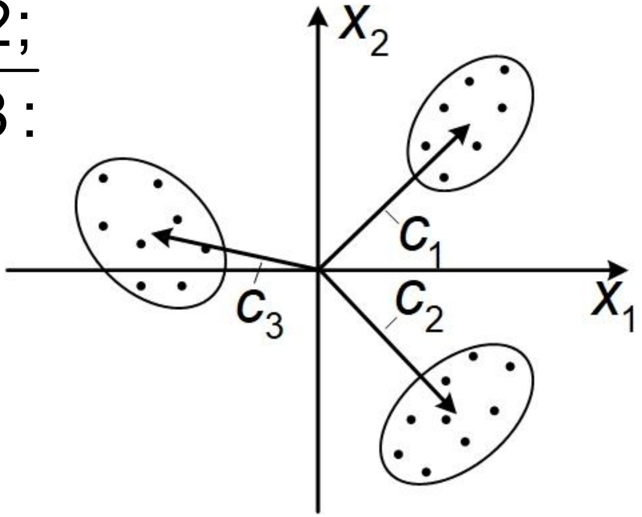
$c_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{im})^T$ – эталонный вектор (центр i-го класса), $(i = 1, 2, \ldots, N)$



РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ С ПОМОЩЬЮ РБФ-СЕТИ

$m = 2;$

$M = 3:$



Дано: $\left\{(X^{(r)}, D^{(r)})\right\}, (i = 1, 2, \ldots, R)$ – обучающая выборка;

$R \geq M$, где M – число классов входных образов (векторов);

$c_i, (i = 1, 2, \ldots, M)$ – эталонные входные векторы.

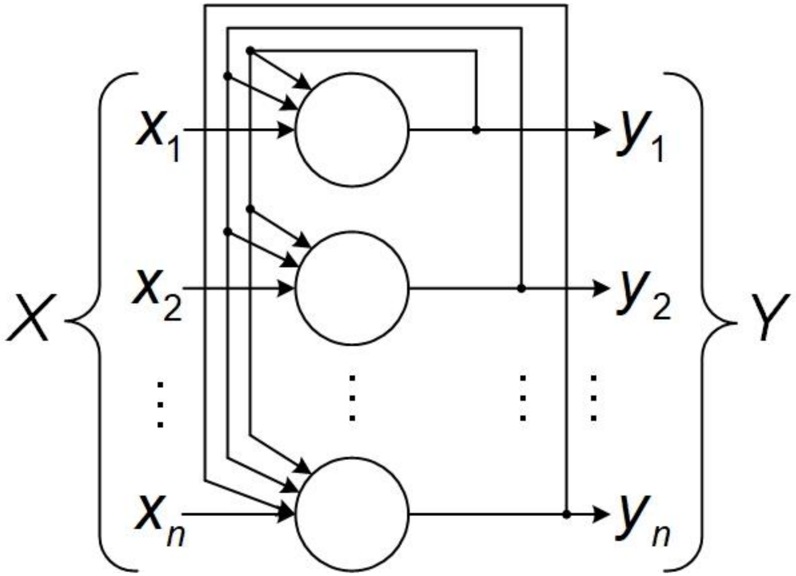
Решение: $n = \lceil \log_2 M \rceil; \; N = M;$

СКО обучения НС: $E = \sum_{r=1}^{R} \sum_{j=1}^{n} \left[d_j^{(r)} - y_j^{(r)} \right]^2 \to \min$

Условия минимума СКО: $\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial w_{11}} = 0; \\ \ldots \\ \dfrac{\partial E}{\partial w_{Nn}} = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ $N \cdot n$ линейных уравнений относительно $N \cdot n$ неизвестных (весов связей НС)

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{РБФ-сеть = «универсальный аппроксиматор»}}$

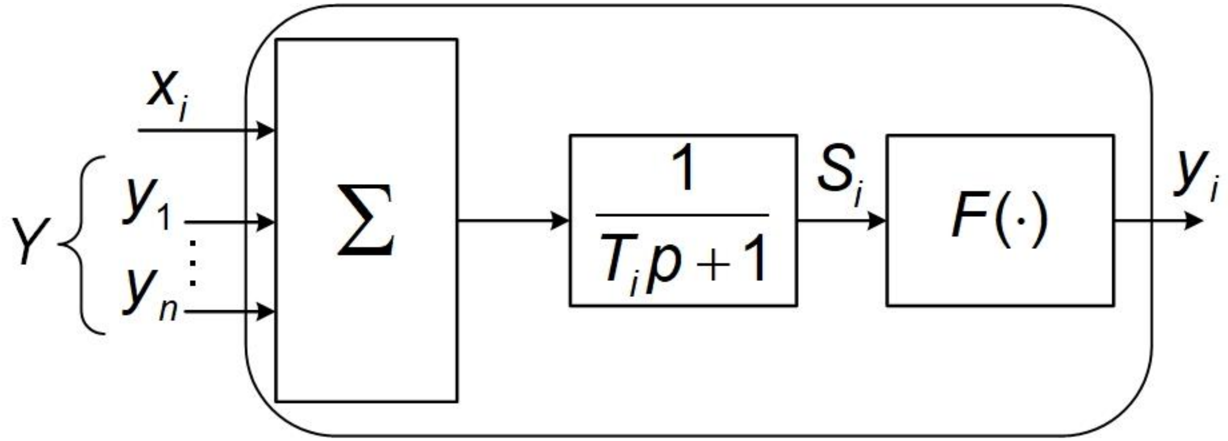
НС ХОПФИЛДА (J. Hopfield, 1982) = однослойная полносвязная динамическая НС



Матрица весов:

$$W = \begin{Vmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{Vmatrix}$$

Модель динамического нейрона:

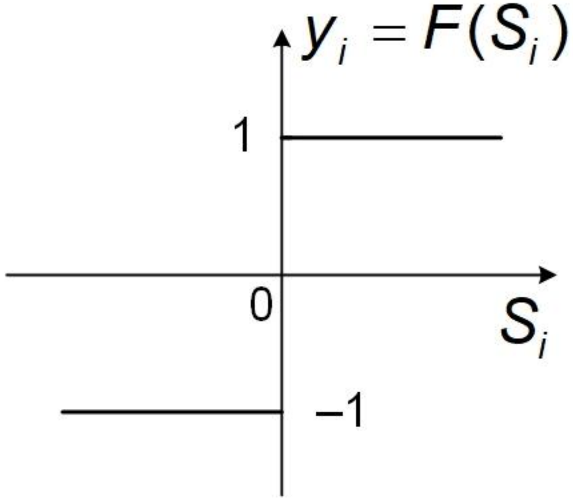


Уравнения НС:

$$\begin{cases} T_i \dfrac{dS_i}{dt} + S_i = \sum\limits_{j=1}^{n} w_{ji} y_j + x_i; \\ y_i = F(S_i), (i = 1,2,\dots,n) \end{cases}$$

T_i – инерционность нейрона; $F(\cdot)$ – функция активации

Логическая функция активации:



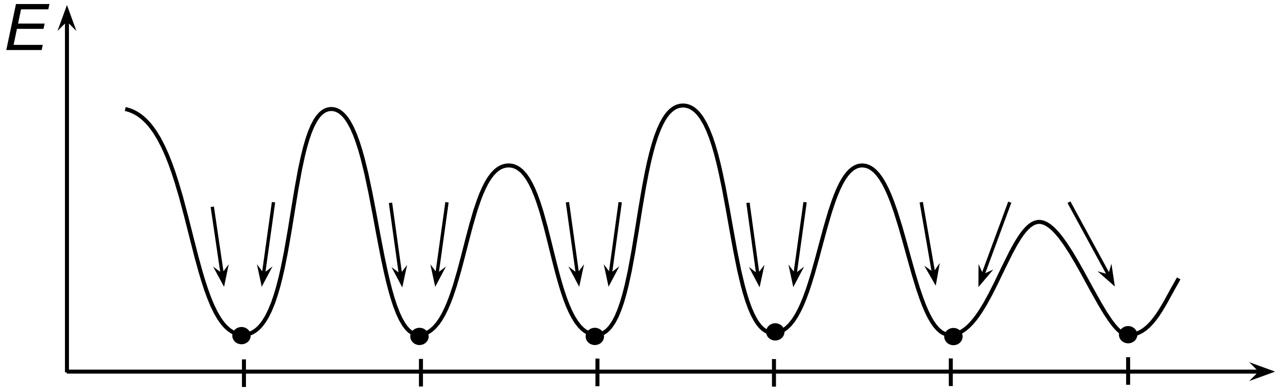
$\Longrightarrow$

Число установившихся состояний НС:

$$N = 2^n$$

Энергетическая функция НС:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} y_i y_j - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \to \min$$



$\Longrightarrow$

Достаточные условия устойчивости:

1) $w_{ij} = w_{ji} \quad (W = W^T)$;

2) $w_{ii} = 0, \; (i = 1, 2, \ldots, n)$

Обучающая выборка НС: $\left\{X^{(r)}\right\}, (r = 1,2,...,R),$ где $x_i^{(r)} \in \left\{-1,1\right\}.$

Правило выбора весов: $W = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{R} X^{(r)}\left[X^{(r)}\right]^T,$ т.е. обучение за 1 шаг.

<u>Решаемые задачи</u>:

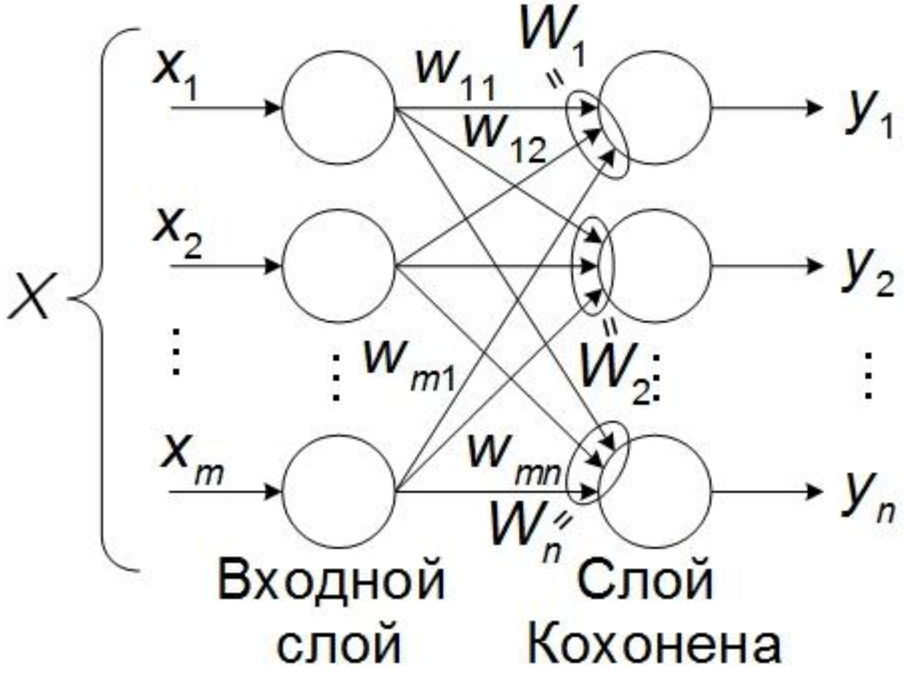
1) ассоциативная память (восстановление неполных или искаженных данных);

2) комбинаторная оптимизация:

$$F = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j + \sum_{i=1}^{n} b_i y_i \to \min, \qquad \text{где } y_i \in \left\{-1,1\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{w_{ij} = -2a_{ij}; \quad x_i = -b_i}$$

НС КОХОНЕНА (T. Kohonen, 1982) = самоорганизующаяся НС (обучение без учителя)



Задача <u>кластеризации</u> – разбить множество векторов $X^{(r)}, (r = 1,2,\ldots,R)$ на некоторое количество классов (кластеров), число которых M заранее неизвестно.

Уравнения НС:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} w_{ji} x_j = (W_i, X),$$ где $$W_i = \begin{bmatrix} w_{1i} \\ w_{2i} \\ \vdots \\ w_{mi} \end{bmatrix}$$ –

весовой вектор для i-го выходного нейрона.

<u>Алгоритм обучения</u> НС Кохонена:

1. Инициализация (задание случайных значений весов):

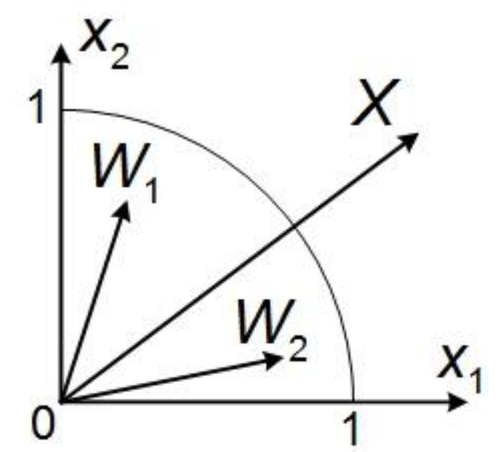
$$w_{ij} \in \left[-0{,}1; 0{,}1\right], \ (j = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

2. Нормализация векторов X и W_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

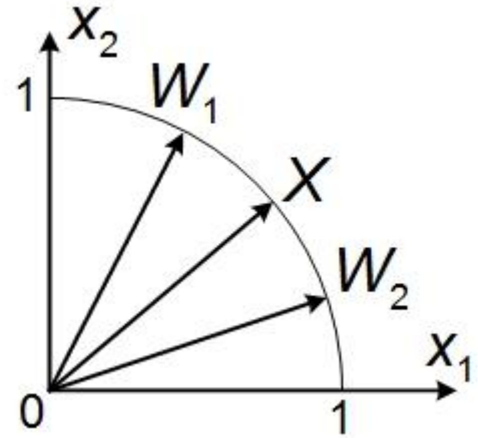
$$\overline{X} = \frac{1}{|X|} \cdot X, \text{где } \overline{W_i} = \frac{1}{|W_i|} \cdot W_i\,; \qquad |X| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} x_j^2} \qquad |W_i| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} w_{ji}^2}$$

До нормализации: После нормализации:

$m = 2$:



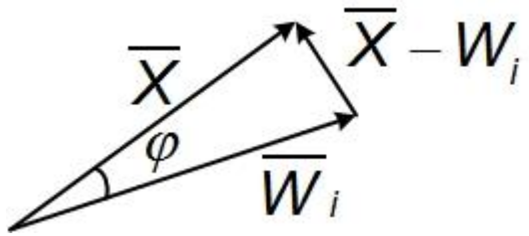
$\Rightarrow$



$$\boxed{\begin{aligned} \left|\overline{X}\right| &= 1; \\ |W_i| &= 1 \end{aligned}}$$

3. Вычисляются выходы НС:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} \overline{w}_{ji} x_j = (\overline{W}_i, \overline{X}) = \left|\overline{W}_i\right| \cdot \left|\overline{X}\right| \cdot \cos\varphi, \ (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (1)$$



4. Определяется нейрон-победитель, имеющий максимальное значение y_i, т.е. наименьшее удаление вектора весов W_i от входного вектора X:

$$y_e = \max_{1 \le i \le n} \{y_i\} \quad \Rightarrow \quad \left|\overline{X} - \overline{W}_e\right| = \min_{1 \le i \le n} \left|\overline{X} - \overline{W}_i\right|. \quad (2)$$

5. Настраиваются веса нейрона-победителя по принципу «Победитель забирает все!» (The Winner Takes All, WTA):

$$W_e(k+1) = W_e(k) + \eta \cdot \left[X(k) + W_e(k)\right]. \quad (3)$$

6. Повторяются шаги 2-5 для различных входных векторов $X^{(r)}, (r = 1, 2, \ldots, R)$.

<u>Результат</u> <u>кластеризации</u>

$(m = 2; M = 3)$:

$(n - M)$ – количество «мертвых» нейронов