Векторы на плоскости

Подготовила Зотова Александра

$\vec{0}$ 0

Понятие вектора.Равенство векторов.

- Например,длина,площадь,объем-это скалярные величины или скаляры. А многие физичеснкие величины,например,сила, перемещения материальной точки,скорость и т.д-это векторные величины или векторы. Аналогично можно ввести понятие геометрического вектора. Так,например,всякий отрезок имеет два конца.Назовем один из этих концов начальной точкой или началом,а другой-концом. И будем считатьчто отрезок направлен от начала к концу.
- A ——— B
- $A \longrightarrow B$
-

$A \longleftarrow B$

Любой направленный отрезок называется вектором.

$\vec{0}$ **0**

- **Нулевым вектором** называется вектор, у которого начальная и конечная точка совпадают.
- Нулевой вектор обычно обозначается как 0.
- Длина нулевого вектора равна нулю.

Равенство векторов.

- Если векторы a и b лежат на перпендикулярных прямых,их называют перпендикулярными векторами.
- Два коллинеарных вектора a и b называются **сонаправленными векторами**, если их направления совпадают: a↑↑b
- Два коллинеарных вектора a и b называются **противоположно направленными векторами**, если их направления противоположны: a↑↓b
- Векторы называются равными,если они сонаправленны и их модули равны

Свойства равных векторов.

Теорема. Равные векторы можно совместить параллельным переносом, и, обратно,если векторы совмещаются параллельным переносом,эти векторы равны.

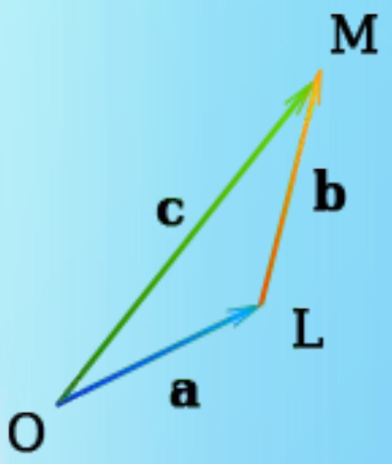
Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$,то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

От любой точки А можно отложить единственный вектор,равный данному вектору $\vec{a}$.

Каждый ненулевой вектор вполне определяет некоторый параллельный перенос и,обратно,любой параллельный перенос однозначно определяет некоторый вектор.

Сложение и вычитание векторов.

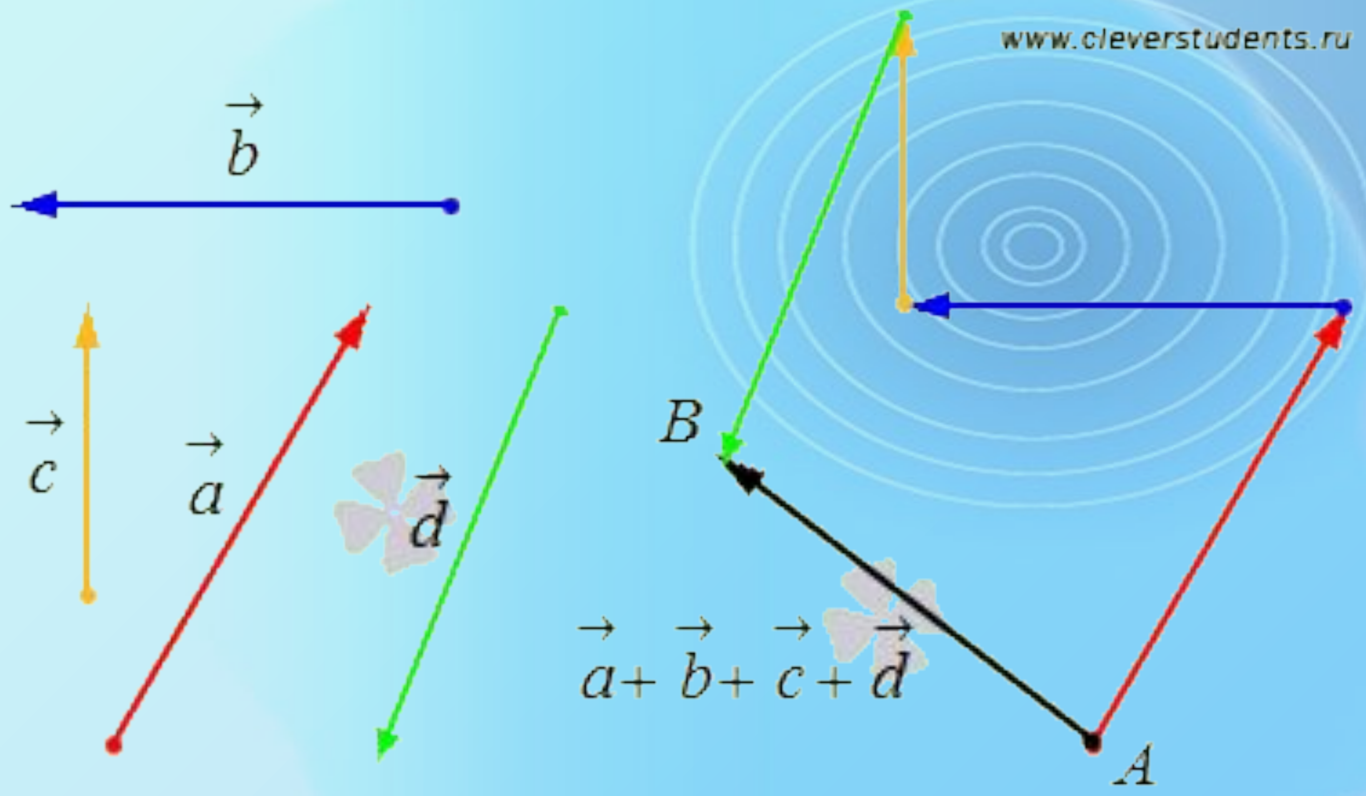
- **Сумма векторов a** и **b** это третий вектор **c**, получаемый следующим построением: из произвольного начала Остроим вектор OL, равный **a**; из точки L, как из начала строим вектор LM, равный **b**. Вектор **c** = OM есть сумма векторов
- **a** и **b** («**правило треугольника**»).



Свойства сложения векторов.

- Сложение нескольких векторов выполняется следующим построением. От произвольной точки А плоскости или пространства откладывается вектор, равный первому слагаемому, от его конца откладывается вектор, равный второму слагаемому, от его конца откладывается третье слагаемое, и так далее. Пусть точка В - это конец последнего отложенного вектора. Суммой всех этих векторов будет вектор формула.

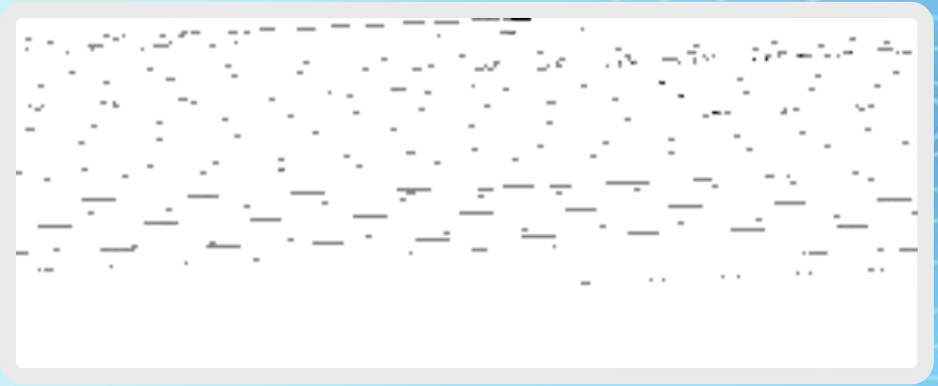
- Сложение нескольких векторов на плоскости таким способом называется правилом многоугольника. Приведем иллюстрацию правила многоугольника.



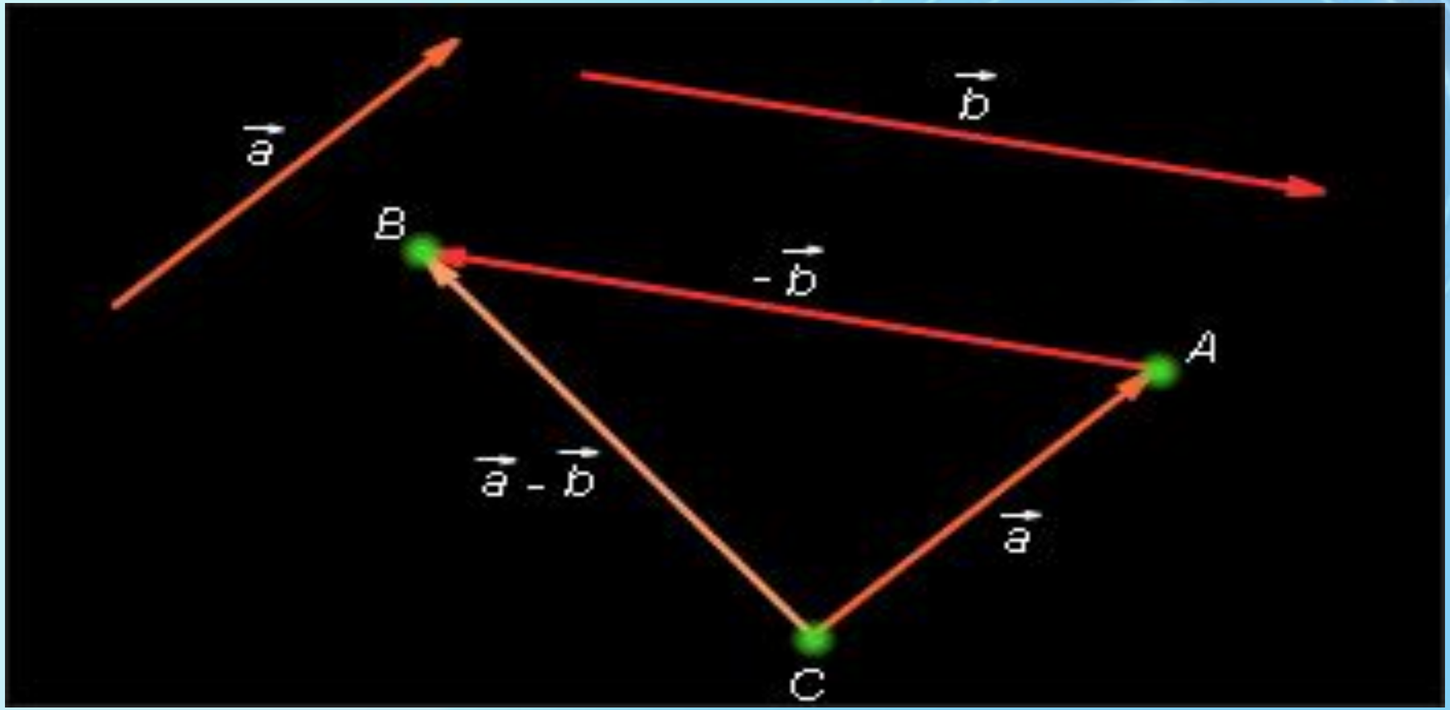
www.cleverstudents.ru
$\vec{b}$
$\vec{c}$
$\vec{a}$
$\vec{d}$
B
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$
A

Разность векторов

- Разностью двух векторов a и b называется такой вектор c=a-b , сумма которого с вычитаемым b дает вектор a .



- Вектор называется противоположным вектором к вектору , если он коллинеарен вектору , равен ему по длине, но направлен в противоположную сторону вектору .


$\vec{a}$
$\vec{b}$
B
$-\vec{b}$
A
$\vec{a}-\vec{b}$
$\vec{a}$
C

Разложение вектора на сумму составляющих векторов,расположенных на пересекающихся прямых.

- Те векторы, сумма которых равна данному вектору, называются составляющими этого вектора. Он "составляется" из них, как сумма из слагаемых, и разлагается на них, как на слагаемые. Поэтому и говорят о разложении вектора на составляющие.

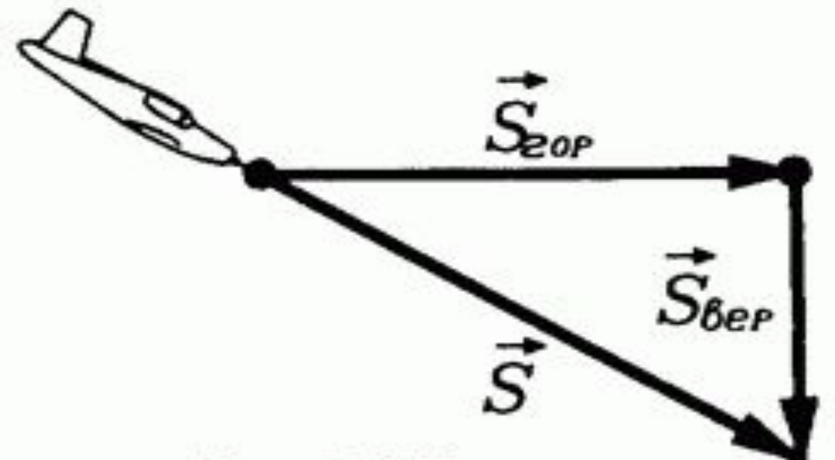


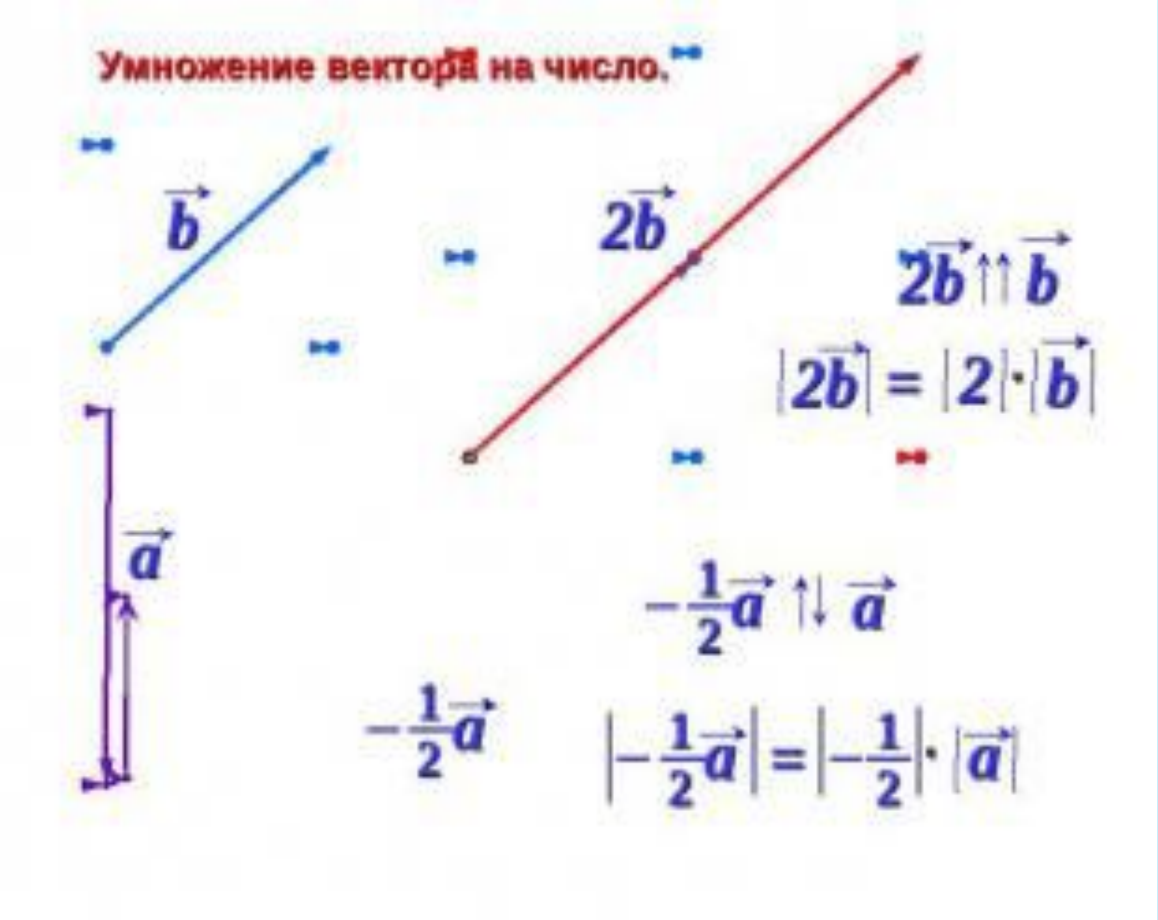
Рис.22.11

- Теорема. Пусть даны две пересекающиеся прямые.Тогда любой вектор можно разложить на сумму составляющих, расположенных на данных прямых.

Умножение вектора на число.

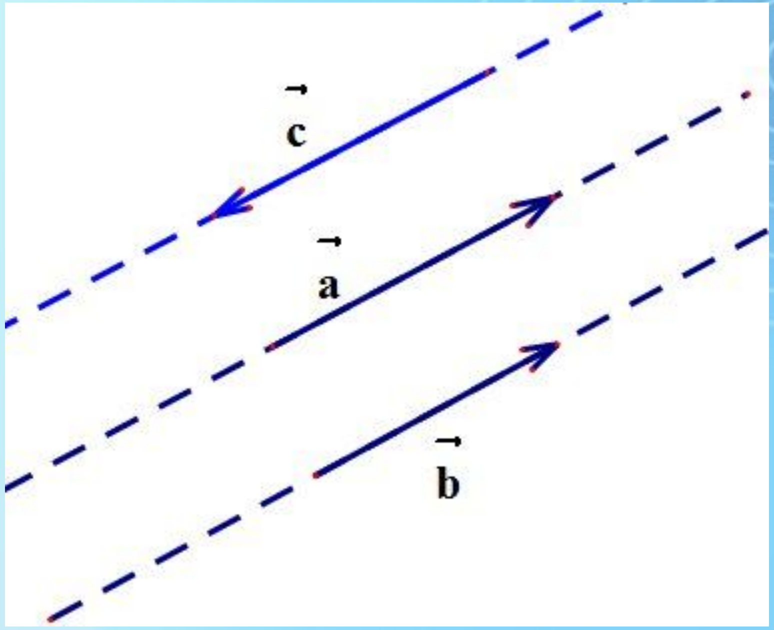
- Умножение вектора на число. Произведением ненулевого вектора на число называется такой вектор , длина которого равна , причем векторы и сонаправлены при и притиволположно направлены при

Для любого числа и любого вектора векторы и коллинеарны.Произведение нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.Произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор.



Признак коллинеарности векторов.

- Вектора, параллельные одной прямой или лежащие на одной прямой называют коллинеарными векторами

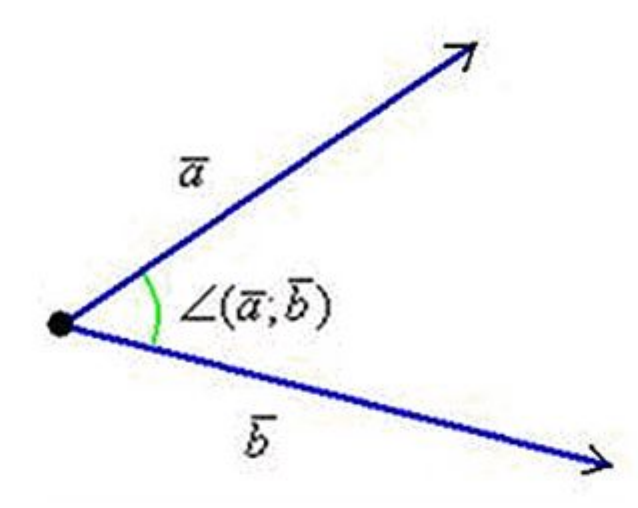


Условия коллинеарности векторов

- Два вектора будут коллинеарны при выполнении любого из этих условий:
- Условие коллинеарности векторов 1. Два вектора a и b коллинеарны, если существует число n такое, что
- a = n · b
- Условия коллинеарности векторов 2. Два вектора коллинеарны, если отношения их координат равны.
- N.B. Условие 2 неприменимо, если один из компонентов вектора равен нулю.
- Условия коллинеарности векторов 3. Два вектора коллинеарны, если их векторное произведение равно нулевому вектору.
- N.B. Условие 3 применимо только для трехмерных (пространственных) задач.

Понятие угла между векторами

- Углом между двумя векторами, отложенными от одной точки, называется кратчайший угол, на который нужно повернуть один из векторов вокруг своего начала до положения сонаправленности с другим вектором.

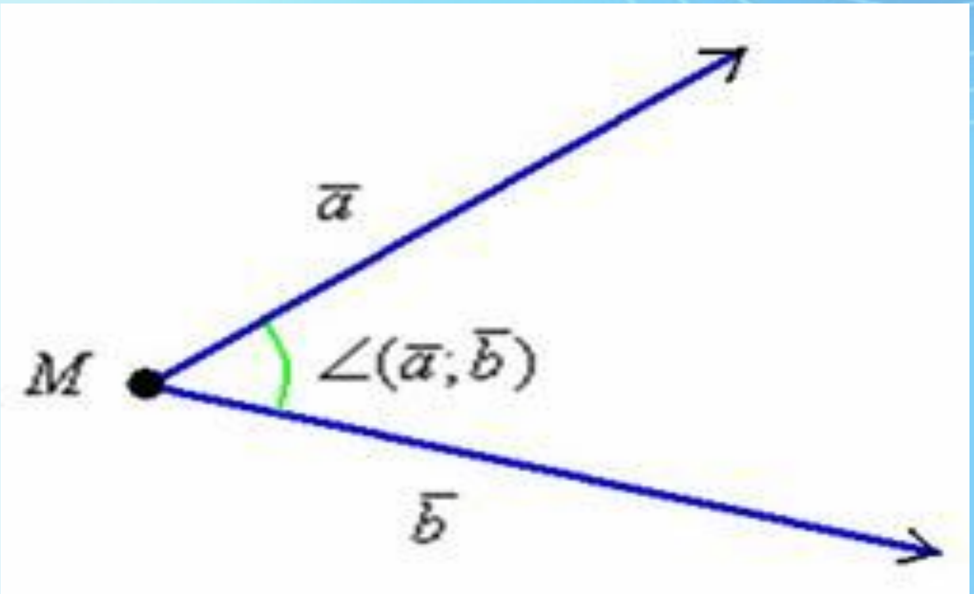


Формула вычисления угла между векторами

cos α = a·b
|a|·|b|

Скалярное произведение векторов.

- Скалярным произведением двух векторов a и b будет скалярная величина, равная произведению модулей этих векторов умноженного на косинус угла между ними:
- a · b = |a| · |b| cos α



Некоторые применения векторов.

- Примеры применения скалярного произведения векторов из-
- вестны из курса физики. Например, в механике, если для переме
- щения тела по пути S была приложена к нему сила F , то выпол-
- ненная работа A вычисляется формулой
- A= | F |-| S |-cos
- Раздел математики, изучающий векторы и действия над ними,
- называется векторной алгеброй.

- Процесс решения каждой задачи, решаемой
- с помощью векторов, разделяют на три этапа:
- 1-й этап. Вводя в удобной для нас форме, векторы, нужно пере
- писать условие задачи с помощью векторов.
- 2-й этап. Преобразовывая задачу, записанную в векторной форме,
- получаем ее решение в векторной форме.
- 3-й этап. Решение задачи, полученное в векторных соотношени
- ях, нужно перевести на исходный «язык» задачи и записать ответ.

Координаты вектора. Разложение любого вектора по двум неколлирнеарным векторам.

- Теорема 1. Если ненулевые векторы a и b не коллинеарны, то
- для любого вектора c найдутся числа x и y такие, что выполняется
- равенство c =xa +yb , причем коэффициенты разложения хиу определяются единственным образом.

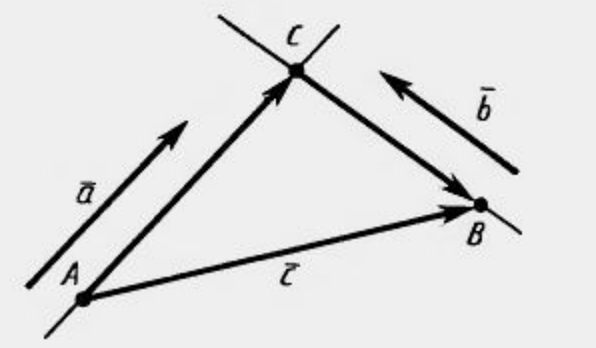
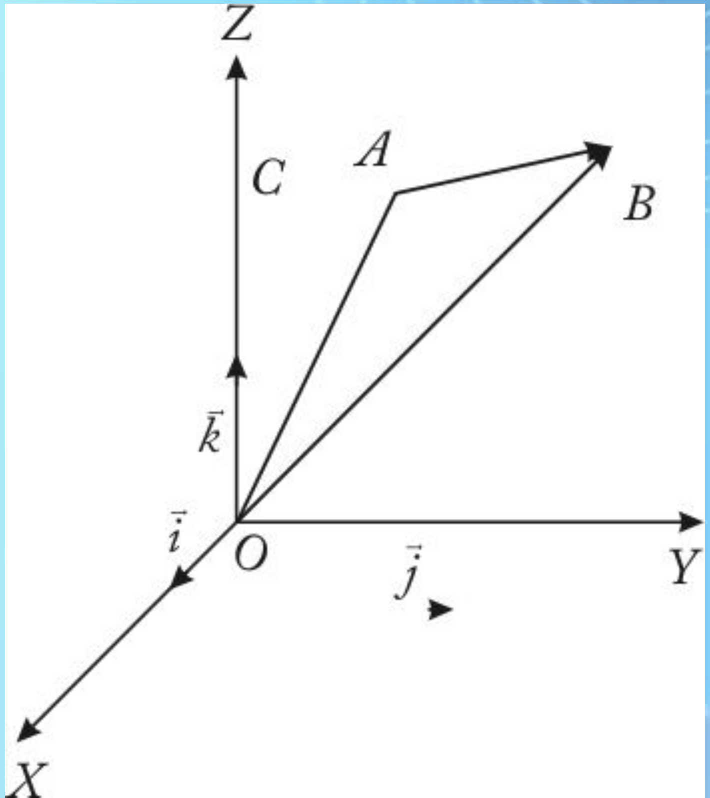


Рис. 224

- Из этой теоремы вытекает, что любой вектор можно разложить
- по двум произвольным неколлинеарным векторам. Если на плос
- кости выбраны такие два неколлинеарные векторы, то они назы
- ваются базисными векторами плоскости. Итак, любые два некол-
- линеарных вектора можно принять в качестве базисных векторов
- и любой вектор этой плоскости однозначно разлагается по этим базисным векторам. В доказанной теореме a и b - базисные векторы.
- А действительные числа x и y называются координатами век
- тора c в базисе a , b .
-

Координаты вектора в прямоугольной системе координат.

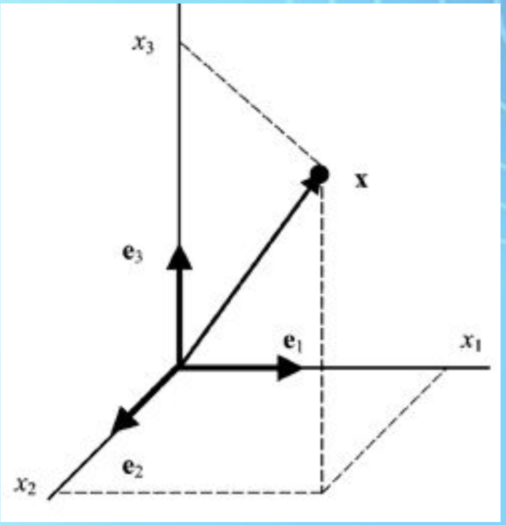
- Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy. Пусть i —
- единичный вектор, сонаправленный с осью Ox, а y -единичный
- вектор, сонаправленный с осью Oy. Эти векторы называются коор
- динатными векторами.



- Следствие. Координаты разности векторов равны разности
- соответствующих координат этих векторов: если a =(x-и, y-v),
- b =(и; v), то a-b =(x-и; y-v).

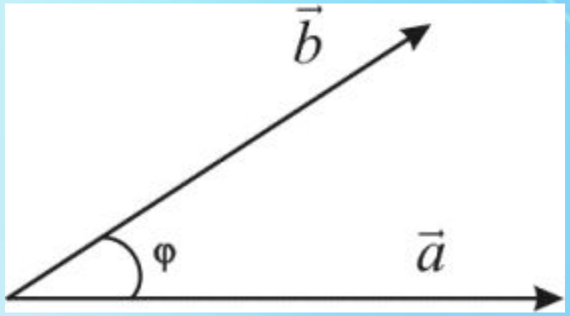
Координаты вектора,заданного координатами концов.Радиус-вектор.

- Если на плоскости Оху задана точка А(х; у), то вектор ОА на
- зывается радиус-вектором точки А.
-



Выражение скалярного произведения через координаты векторов Координатный вид скалярного произведения.

- Скалярным произведением двух векторов называется действительное число, равное произведению длин умножаемых векторов на косинус угла между ними.



Координатный вид коллинеарности и перпендикулярности векторов. Определение угла между векторами.

- Два ненулевых вектора называются перпендикулярными, если угол между ними равен девяноста градусам .
- В этом случае используется необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов. Сформулируем его в виде теоремы.

- Теорема.

Для перпендикулярности двух ненулевых векторов формула и формула необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю, то есть, чтобы выполнялось равенство

Перпендикулярные вектора:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Коллинеарные вектора:

$$\vec{a} \,||\, \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = \lambda$$

$$\vec{a} \,||\, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda b$$

Различные способы задания прямой в прямоугольной системе координат Уравнение прямой.Направляющий вектор и вектор нормали на прямой

- Направляющий вектор прямой - это любой ненулевой вектор, лежащий на данной прямой или на параллельной ей прямой.
- Пусть задана точка M0(x0; y0) и вектор p = (a; P). Тогда через
- точку M0 параллельно вектору p проходит одна и только одна
- прямая l Точка M0 называется начальной точкой прямой l, а вектор
- p — направляющим вектором этой прямой.

Некоторые применения метода координат

•19.3. Некоторые применения метода координат. Сначала еще раз рассмотрим задачу о взаимном расположении сферы и плоскости (см. п.4.2). Можно так выбрать систему координат, что данная плоскость станет координатной плоскостью xy, а центр рассматриваемой сфе-

ры будет расположен на оси z в точке $(0;0;d)$, $d \geq 0$ (рис.19.6). Тогда плоскость задается уравнением $z = 0$,

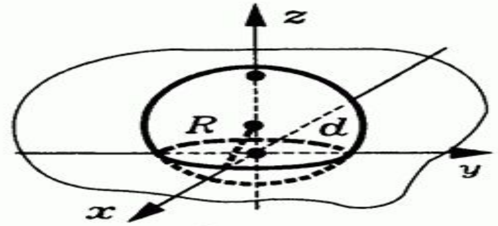


Рис.19.6

сфера — уравнением

$$x^2 + y^2 + (z-d)^2 = R^2,$$

а их пересечение — системой этих уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-d)^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

(поскольку координаты общих точек сферы и плоскости должны удовлетворять их обоим уравнениям). Подставляя $z = 0$ в первое уравнение системы, упрощаем ее и получаем систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 - d^2 \\ z = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Ясно, что при $0 \leq d < R$, когда $R^2 - d^2 > 0$, эта система задает в плоскости xy окружность радиуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (рис.19.6). Если $d = R$, то $x^2 + y^2 = 0$, $z = 0$, и плоскость xy и сфера имеют единственную общую точку $(0;0;0)$, т.е. касаются в этой точке. Если же $d > R$,

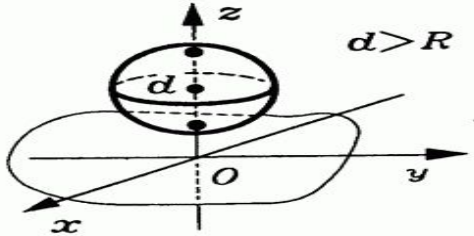


Рис.19.7

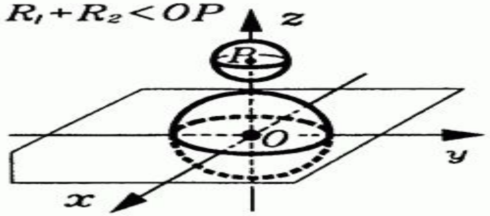


Рис.19.8

то $R^2 - d^2 < 0$ и у сферы и плоскости общих точек нет (рис.19.7).

А теперь рассмотрим более сложную задачу о взаимном расположении двух сфер S_1 и S_2, имеющих радиусы R_1 и R_2 и центры в точках O и P соответственно. Через d обозначим длину отрезка OP, т.е. расстояние между центрами сфер S_1 и S_2. Введем систему координат так, чтобы точка O была ее началом, а ось z шла через точку P в направлении вектора $\overrightarrow{OP}$ (рис.19.8). Тогда сфера S_1 задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2,$$

а сфера S_2 — уравнением

$$x^2 + y^2 + (z-d)^2 = R_2^2.$$

Будем считать, что $R_1 \geq R_2$, а также, что $d > 0$. Если $d = 0$, то сферы S_1 и S_2 либо совпадают, либо являются концентрическими.

Фигура, получающаяся в пересечении сфер S_1 и S_2, задается системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2 \\ x^2 + y^2 + (z-d)^2 = R_2^2. \end{cases}$$

Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2 \\ 2zd = d^2 + R_1^2 - R_2^2. \end{cases} \qquad (8)$$

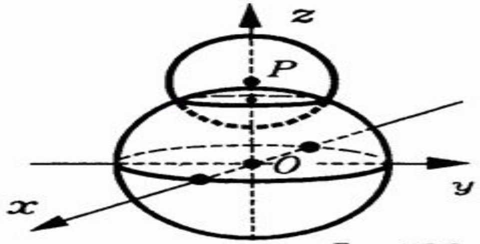


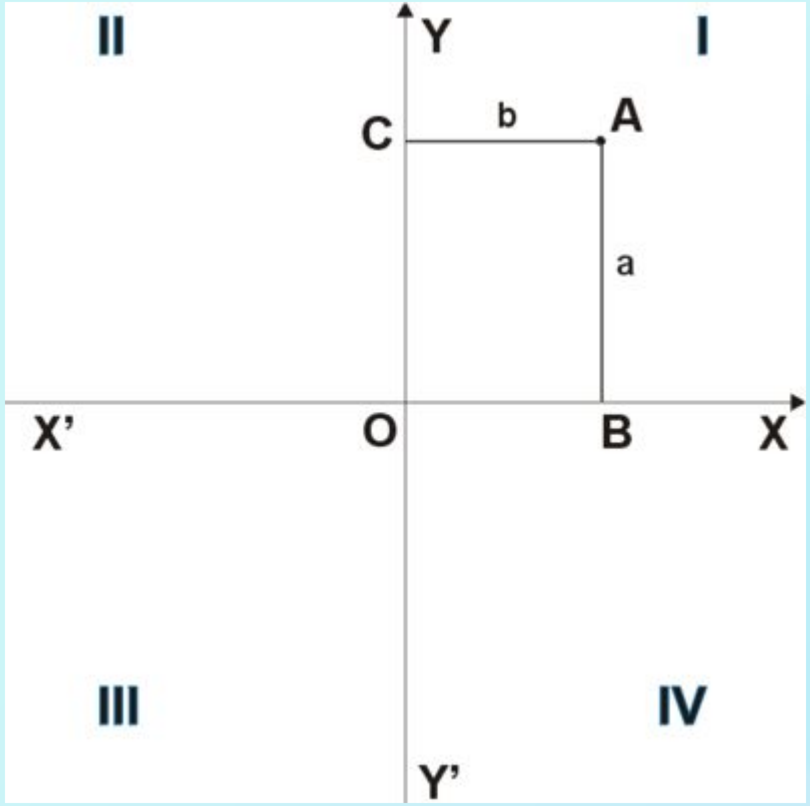
Рис.19.9

Второе уравнение системы (8) имеет вид $z = a$ и задает плоскость, перпендикулярную оси z и пересекающую ее в точке $(0;0;a)$, где

$$a = \frac{d}{2} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{2d} \geq 0. \qquad (9)$$

- Метод координат

- Метод координат — способ определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов (например, положение шахматных фигур на доске определяется с помощью чисел и букв). Числа (символы), определяющие положение точки (тела) на прямой, плоскости, в пространстве, на поверхности и так далее, называются её координатами. В зависимости от целей и характера исследования выбирают различные системы координат.



Прямоугольная система координат на плоскости образуется двумя взаимно перпендикулярными осями координат X’X и Y’Y. Оси координат пересекаются в точке O, которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками, и единица измерения отрезков на осях. Единицы измерения одинаковы для обеих осей.

Вопросы и ответы

- Что такое вектор и как его обозначают?
- Ве́ктор (от лат. vector, «несущий») — в простейшем случае математический объект, характеризующийся величиной и направлением. Например, в геометрии и в естественных науках вектор есть направленный отрезок прямой в евклидовом пространстве (или на плоскости) Обозначается так: а
- Какими свойствами обладает сумма векторов?
- 1. Сложение векторов подчиняется закону ассоциативности, т.е. верно равенство:
- 2.Существует нулевой элемент относительно сложения векторов, т.е. нулевой вектор: верны равенства .
- 3. Для любого вектора существует противоположный ему вектор , такой, что .
- 4. Сложение векторов подчиняется закону коммутативности, т.е. верно равенство: .
- Последнее свойство сразу же следует из правила параллелограмма сложения векторов.

- Как умножить ненулевое число на ненулевой вектор?
- Если вектор b равен произведению ненулевого числа k и ненулевого вектора a, то есть $b = k \cdot a$, тогда:

- $b \parallel a$ - вектора b и a параллельны
- $a \uparrow\uparrow b$, если $k > 0$ - вектора b и a сонаправленные, если число $k > 0$
- $a \uparrow\downarrow b$, если $k < 0$ - вектора b и a противоположно направленные, если число $k < 0$
- $|b| = |k| \cdot |a|$ - модуль вектора b равен модулю вектора a умноженному на модуль числа k

- Как определяется угол между векторами а и b в общем случае?
- Углом между векторами изображение и изображение называется угол между лучами OA и OB.
- Сформулируйте и докажите теорему о разложении вектора по
- двум неколлинеарным векторам
- Любой вектор р (сверху р модуль-стрелочка) иожно разложить, и притом единственным образом, по двум данным неколлинеарным векторам а (модуль) и b(модуль) р (модуль) =xa (модуль) =yb(модуль)

- Напишите условие перпендикулярности векторов и докажите
- его.
- Чтобы вектора были перпендикулярны, их скалярное произведение должно быть рано нулю, т.е. $x_1y_1+x_2y_2=0$
- Как определяется расстояние от точки до прямой?
- Расстоянием от точки М1 до прямой a называют расстояние между точками М1 и Н1.
- Однако чаще встречается определение расстояния от точки до прямой, в котором фигурирует длина перпендикуляра.

- Определение.

- Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой.

-
- СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !!!