تصميم منطق الحاسوب

جامعة القدس المفتوحة

رقم المقرر 1290

مدرس المقرر : أ. محمد حسن أبو حمادة

فرع شمال غزة التعليمي

الوحدة الثانية

الجبر البولي

Boolean Algebra

تمهيد

يتم في هذه الوحدة من مقرر تصميم منطق الحاسوب، التعرض لمفاهيم، ومسلمات، وقوانين، ونظريات الجبر البوولي اللازمة لاجراء التبسيط للدوال البوولية. وتتعرف في هذه الوحدة على البوابات المنطقية الأساسية منها وغير الأساسية، وهي ما سوف تستخدمها في بناء الدوائر المنطقية في الوحدات اللاحقة. كما تتعرض هذه الوحدة للدوال البوولية وربطها مع الدوال المنطقية، بالإضافة إلى الصيغ المعيارية المستخدمة في تمثيل الدوال البوولية. علاوة على ذلك توضح هذه الوحدة مفهوم تحليل الدوائر المنطقية الذي سنعود إليه ثانية في الوحدة الثالثة، وتعرفك هذه الوحدة أيضاً بالدوائر التكاملية وتصنيفاتها.

وترد في ثنايا هذه الوحدة تدريبات وحلول نموذجية لها تقع في نهاية الوحدة، إضافة إلى أسئلة تقويم ذاتي وأسئلة التعيينات التي تقدمها لمشرفك الأكاديمي.

أهداف الوحدة

بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة يتوقع منك أن تكون قادراً على أن:

- & تذكر المبادئ الأساسية للمنطق والجبر البوولي بما فيها قوانينه ونظرياته، وتعرف كيفية تطبيقها في تصميم المنطق.
- & تربط بين العمليات المنطقية الأساسية وبوابات المنطق.
- & تمثل الدوال البوولية بالصيغ المعيارية.
- & تستخدم الدوال البوولية في تحليل الدوائر المنطقية.

أقسام الوحدة

- تتألف الوحدة الثانية من مقرر تصميم منطق الحاسوب من ثلاثة أقسام رئيسة:
- القسم الأول: "الجبر البوولي" بتعريف الجبر البوولي، ويعرفك بالعمليات البوولية الأساسية، وبوابات المنطق التي تعمل على تنفيذ هذه العمليات، ويعطيك فكرة عن الدوال البوولية، ويبين لك خطوات بناء الدوائر المنطقية لهذه الدوال، وكذلك وضع جداول الجدارة للدوال البوولية، ثم بعد ذلك يزودك هذا القسم بالنظريات والقوانين الأساسية للجبر البوولي.وبعد تعريفك بالجبر البوولي، والعمليات والدوال البوولية الأساسية.
- القسم الثاني: "الصيغ المعيارية للدوال البوولية" إلى تعريف صيغة مجاميع الضرب "مجموع المضروبات"، وصيغة ضرب المجاميع "مضروب المجاميع"، وطرق تحويل الدالة البوولية من صيغة مجاميع الضرب إلى صيغة ضرب المجاميع وبالعكس.
- القسم الثالث: "الدوائر المنطقية" فنبين لك تحليل الدوائر المنطقية بواسطة الصيغ المعيارية التي تعرضنا لها في القسم الثاني، مع توضيح أهمية ذلك في بناء الدوائر المنطقية، ونعطيك، في هذا القسم، فكرة عن الدوائر المنطقية التكاملية "المندمجة"، كما نتعرض أيضاً لبعض التطورات الراهنة.

تمهيد

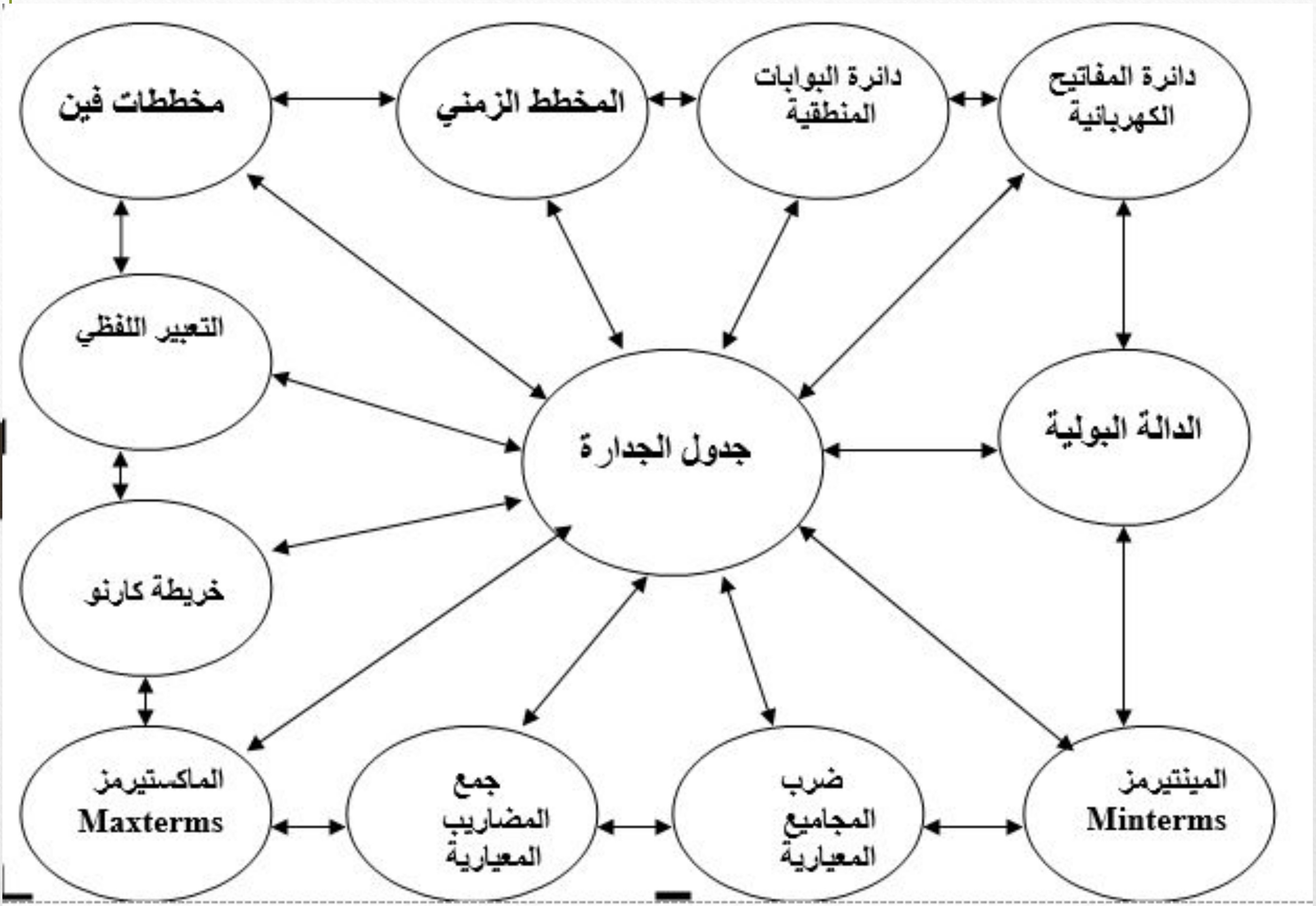
أهداف الوحدة

1. المتغير المنطقي (Logical Variable)
2. العمليات المنطقية (Logical Operations)
3. تغيير عدد أطراف الدخل (Fan-In) للبوابة المنطقية
4. التعبير المنطقي (Logical Expression)
5. الدائرة المنطقية (Logic Circuit)
6. المخطط المنطقي (Logic Diagram)
7. جدول الصواب (Truth Table)
8. نظريات الجبر البولياني (Boolean Algebra Theorems)
9. استخدام نظريات الجبر البولياني فى تبسيط التعبيرات المنطقية

هناك عدة طرق (أشكال، صيغ) لتمثيل الدالة البولية وهي كالاتي:

الطرق (الأشكال، الصيغ) المختلفة لتمثيل التعبير أو المنطق البولي	
ثانياً: الصيغ المعيارية للدالة البولية	أولاً : الصيغ الغير معيارية
8: صيغة جمع المضاريب المعيارية	1: دائرة المفاتيح الكهربائية
9: صيغة ضرب المجاميع المعيارية	2: دائرة البوابات المنطقية
10: صيغة المينتيرمز Minterms	3: جدول الجدارة
11: صيغة الماكستيرمز Maxterms	4: المخطط الزمني
	5: مخططات فين (Ven Diagram)
	6: التعبير اللفظي (الدالة) (الوظيفة) (تعريف المشكلة)
	7: خريطة كارنو (Karnough Map)

كما ويمكن تحويل أي شكل من الأشكال السابقة أو أي صيغة إلى الأشكال والصيغ الأخرى.يمكن أن يكون جدول الجدارة وسيط التحويل كما هو موضح بالشكل أدناه:



مخططات فين
المخطط الزمني
دائرة البوابات المنطقية
دائرة المفاتيح الكهربائية
التعبير اللفظي
جدول الجدارة
الدالة البولية
خريطة كارنو
الماكستيرمز Maxterms
جمع المضاريب المعيارية
ضرب المجاميع المعيارية
المينتيرمز Minterms

1- المتغير المنطقي (Logical Variable)

المتغير المنطقي هو أي متغير يمكن أن يأخذ قيمة واحدة فقط من قيمتين. مثلاً:

صواب	أو	خطأ
True	أو	**False**
ON	أو	**OFF**
+5 Volts	أو	**0 Volts**
High	أو	**Low**
أبيض	أو	أسود
Male	أو	**Female**

يرمز لإحدى القيمتين بالرمز **1** و للقيمة الأخرى بالرمز **0** ... فأي متغير منطقي لا يمكن أن يأخذ إلا إحدى هاتين القيمتين، و لا يوجد أي احتمال ثالث. فإذا كان x متغير منطقي فإنه إما أن يكون $x=1$ أو $x=0$.

2- العمليات المنطقية (Logical Operations)

العمليات المنطقية هي العمليات التي يمكن إجراؤها على المتغيرات المنطقية.

بعض هذه العمليات هي عمليات أساسية و هي عمليات:

OR - AND - NOT

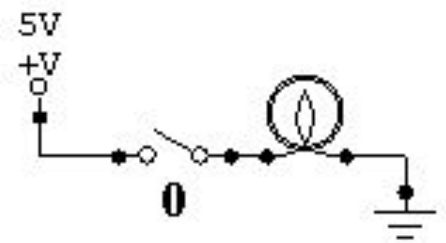
بعضها عمليات غير أساسية، مثل عمليات:

NOR - NAND – XOR - XNOR

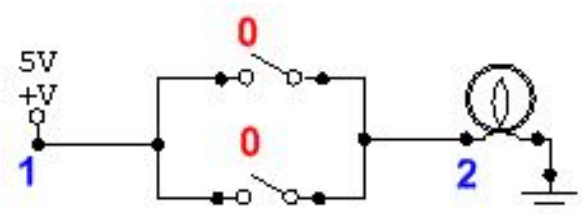
و هذه العمليات يمكن التعبير عنها باستخدام العمليات الأساسية.

المفاتيح الكهربائية

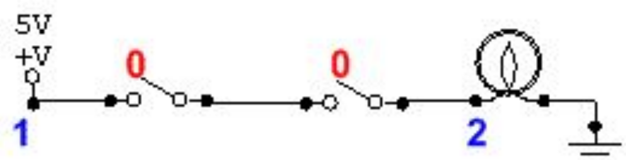
- يمكن تمثيل العمليات البوولية الأساسية بواسطة المفاتيح الكهربائية بافتراض أن **X=0** تناظر المفتاح مفتوح،
- وأن **X = 1** تناظر المفتاح مغلق، فإنه يمكن تمثيل ذلك كما في الشكل أدناه:



- فعملية "أو **OR** " يمكن تمثيلها على هذا الأساس
- وفيها نحصل على دائرة مغلقة بين النقطتين 1, 2 إذا كان أحد المفتاحين **X** أو **Y** مغلقاً أو كلاهما. فلو رمزنا للدائرة المغلقة بالمتغير البوولي **Z** فإن **X+Y=Z** .



- فعملية " و **AND** " يمكن تمثيلها على هذا الأساس
- وفيها نحصل على دائرة مغلقة بين النقطتين 1, 2 إذا كان كلا المفتاحين **X** و **Y** مغلقاً.
- فلو رمزنا للدائرة المغلقة بالمتغير البوولي **Z** فإن **X.Y=Z** . ، وفيها نحصل على دائرة مغلقة بين النقطتين 1, 2 إذا كان كلا المفتاحين **X** و**Y** مغلقاً.

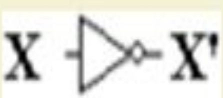


1.2.2 العمليات البوولية الأساسية

العمليات البوولية الأساسية هي عملية "و" (AND)، وعملية "أو" (OR)، وعملية"ليس" (NOT)، يطلق عليها عادة اسم عملية أخذ المتممة، لأن متممة 0 تساوي 1 ، ومتممة 1 تساوي 0 . ويمكن التعبير عن عملية أخذ المتممة كما يلي:

$$0 = 1' \ , 1 = 0'$$

حيث أن الفتحة (') تعني المتممة. فإننا لو فرضنا أنX متغير بوولي، فإن1 = 'X إذا كان X=0 وكذلك0='X إذا كان X=1 . والاسم الآخر لعملية أخذ المتممة هو عملية أخذ المعكوس، إذ يطلق على الدائرة الالكترونية التي تعمل على تنفيذ عملية المعكوس بالعاكس (inverter). والرمز الخاص بتمثيل دائرة العاكس هو



ومن رمز العاكس، يتبين أن مخرج دائرة العاكس هو معكوس المدخل. فإذا كان المنطق 0 يناظر الجهد المنخفض والمنطق 1 يناظر الجهد العالي، فإن الجهد المنخفض عند مدخل العاكس سوف يولد جهداً عالياً عند مخرجه، والعكس صحيح.

1-2 عملية NOT

يطلق عليها أيضاً عملية العكس المنطقي Logical Inversion

وفيها يكون المخرج عبارة عن معكوس المدخل، فإذا كان المدخل مساوياً 1 فإن المخرج يكون مساوياً 0، و إذا كان المدخل مساوياً 0 فإن المخرج يكون مساوياً 1.

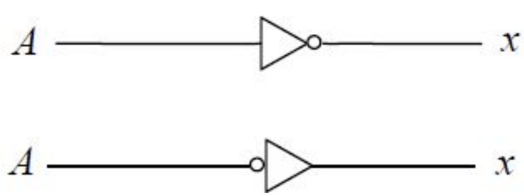
يرمزللعملية بوضح خط فوق المتغير، مما يعني أنه معكوس.

$$x = NOT\ A$$

$$x = \overline{A}$$

الجدول التالي يسمى جدول الصواب Truth Tableوهو جدول الصواب لعملية NOT
و جدول الصواب يوضح جميع احتمالات المدخل و المخرج المقابل لكل منها
يمكن استخدام أي من الشكلين التاليين في تمثيل بوابة

A	x
0	1
1	0



لاحظ أن الدخل هنا هو A و الخرج هو x. و الدخل في هذه الحالة عبارة عن متغير واحد يمكن أن يأخذ واحدة من قيمتين، إما 0 أو 1، أي أن هناك احتمالين فقط للدخل.

البوابة المنطقية (Logic Gate) التي تقوم بإجراء هذه العملية هي بوابة NOT (NOT Gate)، التي يطلق عليها أيضاً

العاكس المنطقي

2-2 عملية التكافؤ (Equivalence)

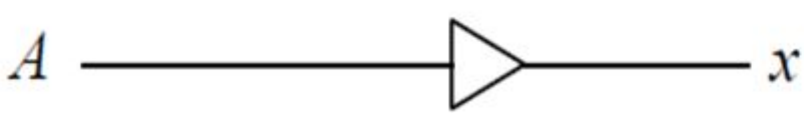
في هذه العملية يكون الخرج مساوياً للدخل، و يرمز لها بعلامة التساوي

$$x = A$$

وجدول الصواب للعملية هو

A	x
0	0
1	1

البوابة التي تقوم بإجراء هذه العملية تسمى العازل (Buffer)، و يتم تمثيلها بالشكل التالي:



2-3 عملية AND

في هذه العملية يكون الخرج مساوياً 1 فقط إذا كانت جميع متغيرات الدخل مساوية 1، و يكون الخرج يكون مساوياً 0 إذا كان أي متغير من متغيرات الدخل مساوياً 0

و يرمز لهذه العملية بأي من الطرق التالية $x = A\ AND\ B$

$$x = A \cdot B$$

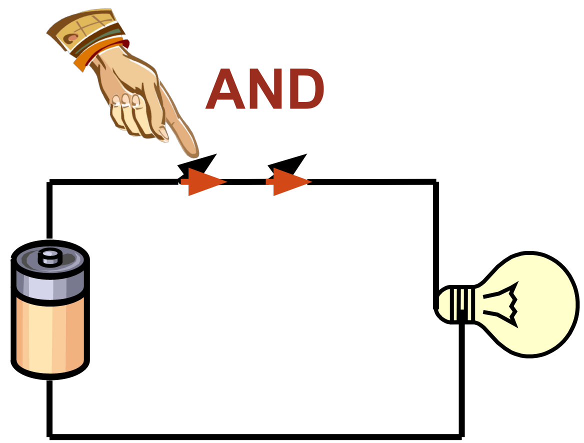
$$x = AB$$

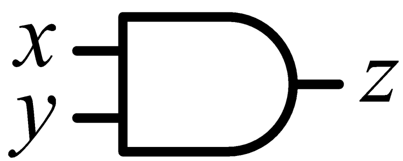
فيما يلي جدول الصواب لبوابة AND بمدخلين

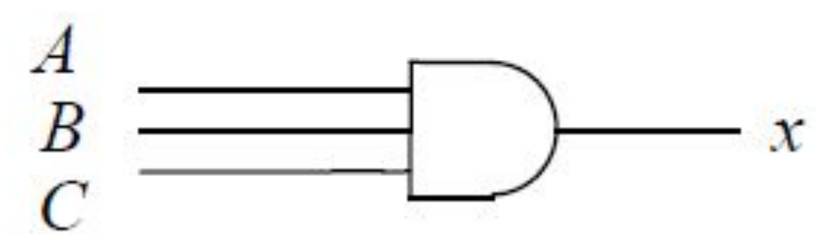
A	B	x
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

لاحظ أنه نظراً لوجود متغيرين للدخل هنا هما A و B فأنه توجد أربعة احتمالات للدخل. و القاعدة العامة في جداول الصواب هي أنه إذا كان عدد متغيرات الدخل هو N فإن عدد احتمالات الدخل، أي عدد أسطر جدول الصواب، هو 2^N.

بوابة AND







بوابة AND بثلاثة مداخل

(3-Input AND Gate)

AND - و

x	*y*	*z*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$z = x \bullet y = x\,y$$

بوابة AND

ويمكـن استنتاج عـدد التشـكيلات -أو الاحتمـالات للمـدخلات

الثنائيـة لأي بوابـة عـن طريـق العلاقة: $N = 2^n$

حيث: N عدد التشكيلات المحتملة

n عدد المدخلات للبوابة.

وللتوضيح نقول:

لعدد مدخلان للبوابة يكون عدد التشكيلات $N = 2^2 = 4$

لعدد ثلاثة مدخلات للبوابة يكون عدد التشكيلات $N = 2^3 = 8$

لعدد أربعة مدخلات للبوابة يكون عدد التشكيلات $N = 2^4 = 16$

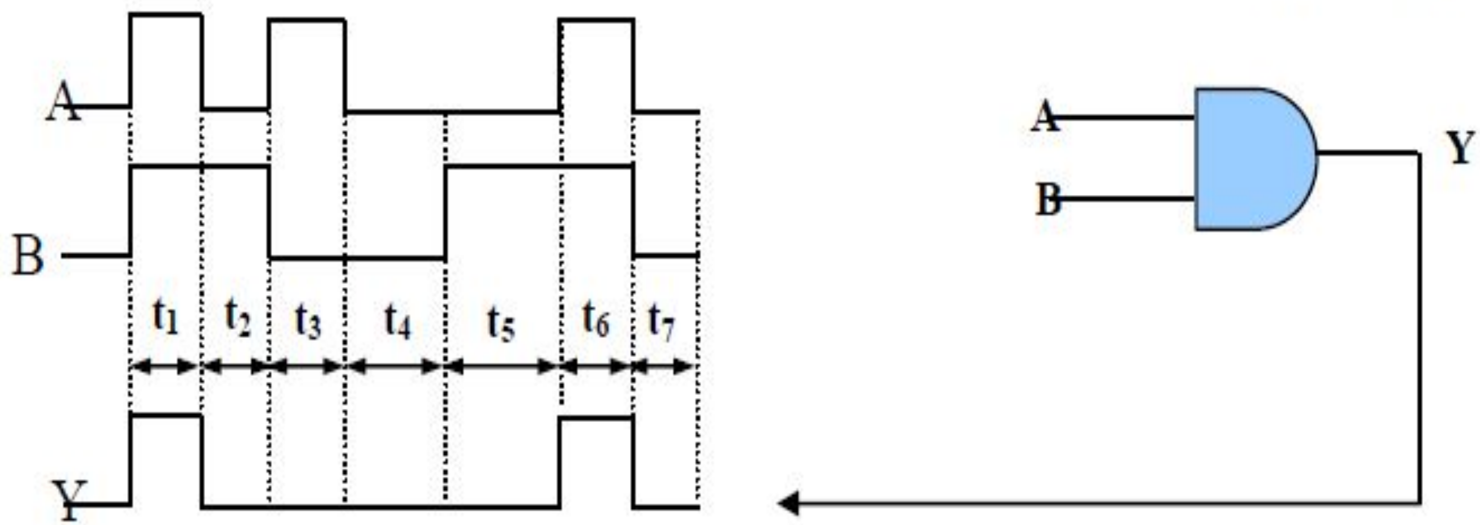
تدريب 1:

قم بإنشاء جدول الصواب (Truth Table) لبوابة AND بثلاثة مداخل.

A	B	C	$x = A \cdot B \cdot C$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

المخطط الزمني لبوابة AND

وكمثال على ذلك، في شكل (٢ -٣) كلا من الدخلين A, B مرتفع أي يساوي (1) خلال الفترة الزمنية t_1 والذي يجعل الخرج Y مرتفع في هذه الفترة أي يساوي (1)، خلال الفترة الزمنية t_2، الدخل A منخفض أي يساوي (0) والدخل B مرتفع وبالتالي يكون الخرج Y يساوي (0)، وهكذا خلال الفترات الزمنية الأخرى. يطلق على شكل نبضات الدخل والخرج كعلاقة مع الزمن اسم المخطط الزمني (Timing Diagram).



شكل (٢ -٣) المخطط الزمني لبوابة AND بمدخلين.

2-4 عملية OR

في هذه العملية يكون الخرج مساوياً 1 إذا كان أي من متغيرات الدخل مساوياً 1، و يكون الخرج يكون مساوياً 0 إذا كانت جميع متغيرات الدخل مساوية 0.

و يرمز لهذه العملية بأي من الطريقتين التاليتين فيما يلي جدول الصواب لبوابة OR بمدخلين

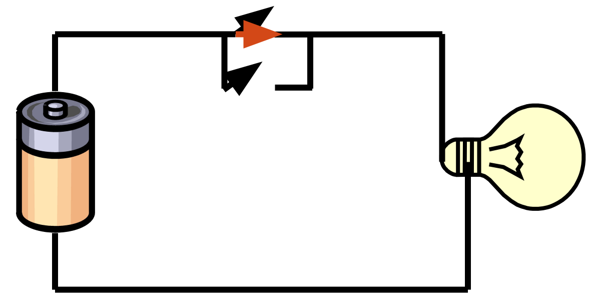
$$x = A \; OR \; B$$

$$x = A + B$$

A	B	x
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

بوابة OR

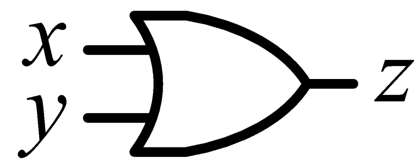
OR

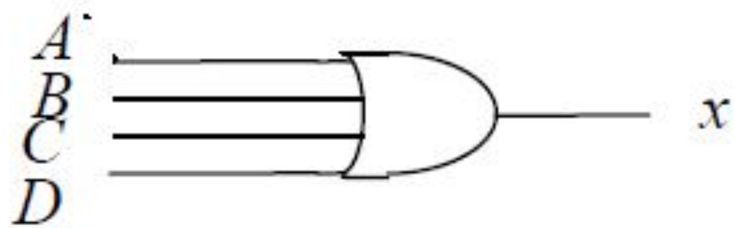


OR - أو

x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$z = x + y$$

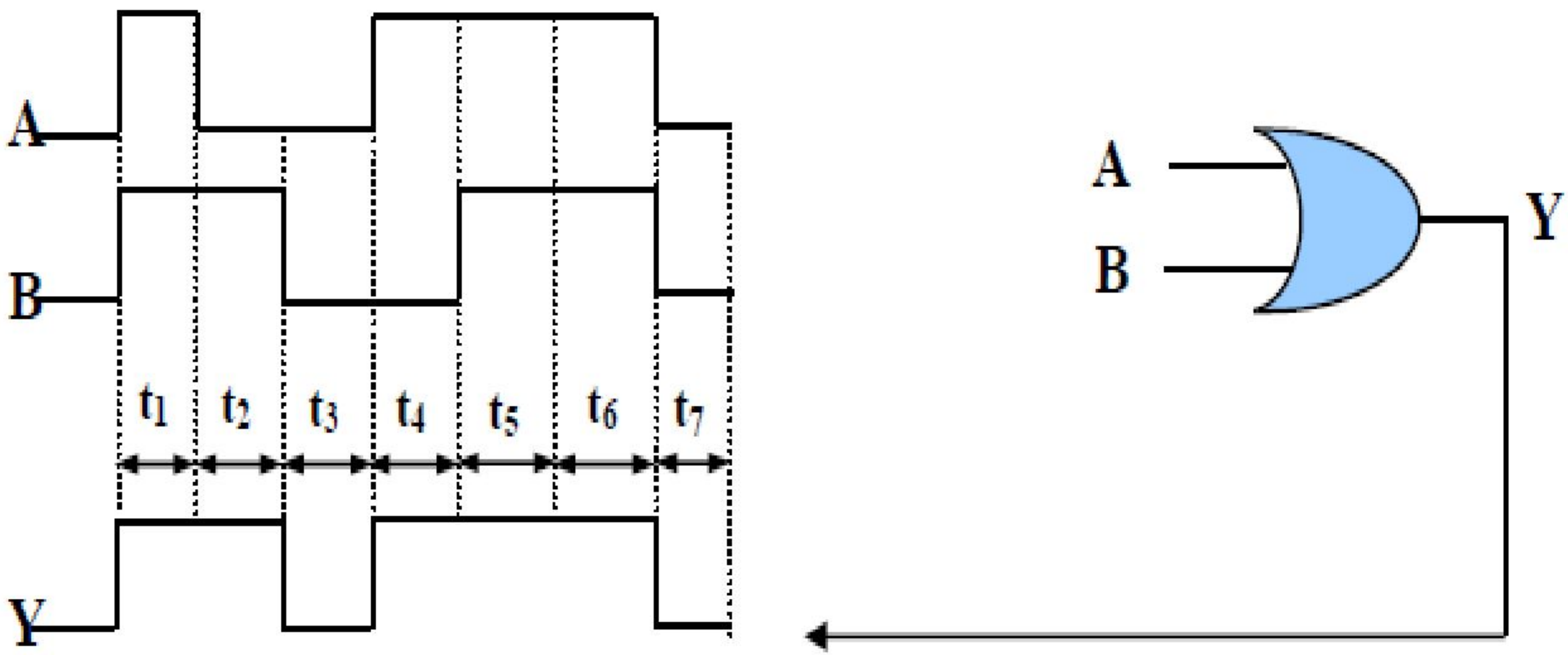




بوابة OR بأربعة مداخل

(4-Input OR Gate)

المخطط الزمني لبوابة OR



شكل (٢ -٦) المخطط الزمني لبوابة OR بمدخلين.

تدريب 2:

قم بإنشاء جدول الصواب (Truth Table) لبوابة OR بأربعة مداخل.

A	B	C	D	$x = A + B + C + D$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

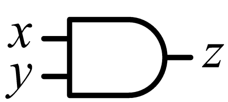
ملخص الدوائر المنطقية الاساسية

- جدول الجدارة – التعبير البولي – والدوائر المنطقية

AND - و

x	y	z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

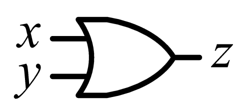
$$z = x \bullet y = x\,y$$



OR - أو

x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

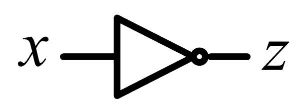
$$z = x + y$$



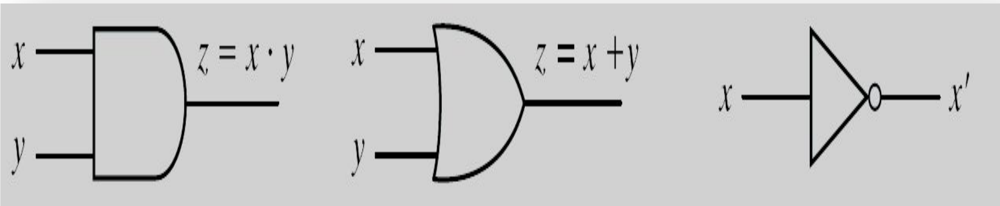
NOT - ليس

x	z
0	1
1	0

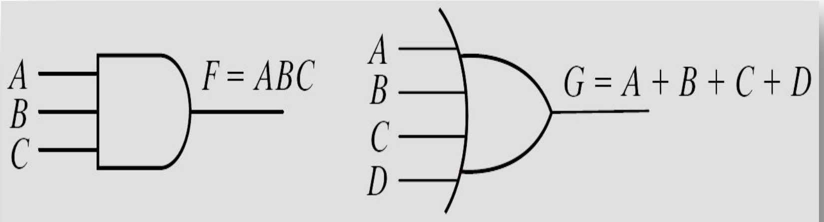
$$'z = \bar{x} = x$$



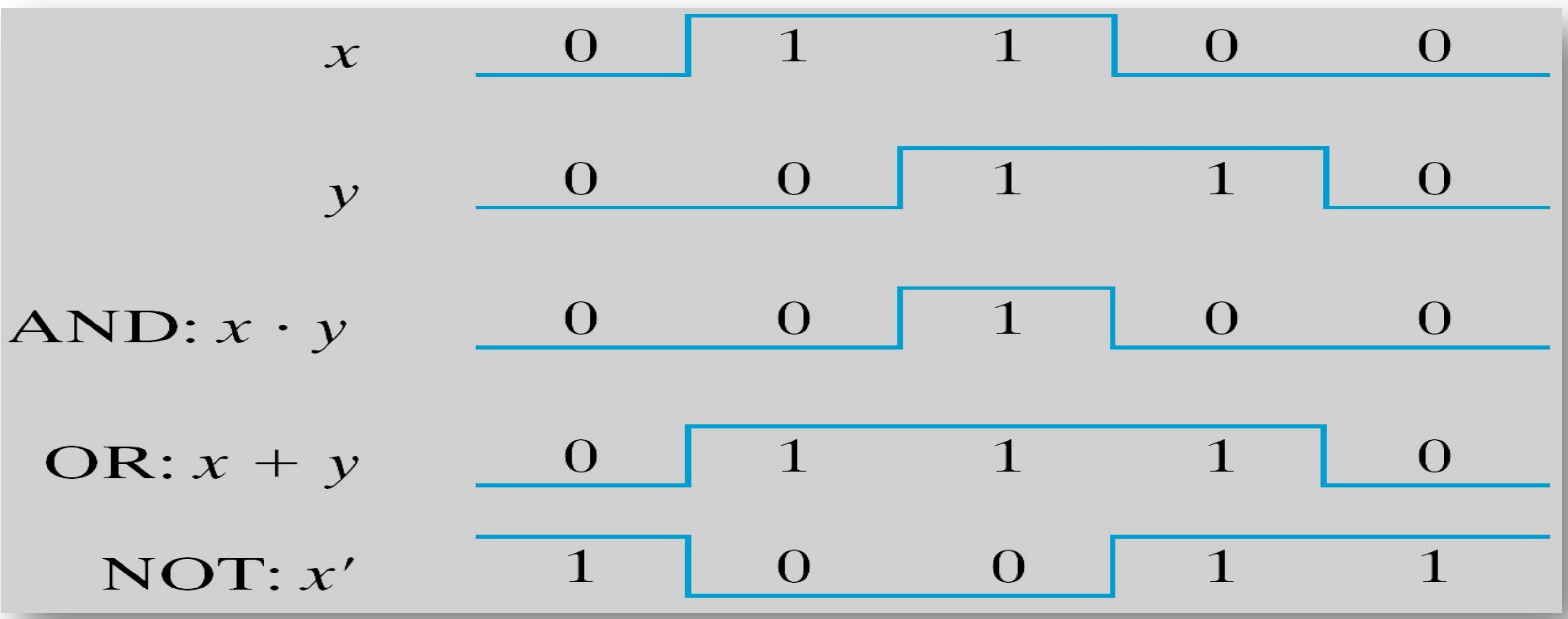
ملخص المخطط الزمني لكافة البوابات



(a) Two-input AND gate (b) Two-input OR gate (c) NOT gate or inverter



(a) Three-input AND gate (b) Four-input OR gate



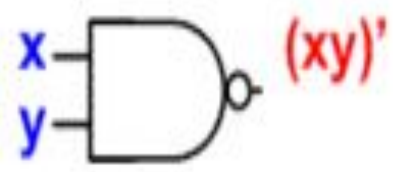
3.2.2 العمليات البوولية الأخرى (Other Boolean Operation)

وجد في الجبر البوولي، بالإضافة إلى العمليات الرئيسة الثلاث، عمليات أخرى مهمة في تصميم الدوائر المنطقية وتحليلها. ومن أهم هذه العمليات الأخرى ما يلي:

* عملية "ليس و" (NOT AND) والمعروفة بعملية "ناند" (NAND)، إن جدول الجدارة لعملية "ليس و" ورمزها المنطقي مبينات أدناه:

رمزها المنطقي

X	Y	(X.Y)'
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



5-2 عملية NAND

عملية NAND هى عبارة عن عملية AND متبوعة بعملية NOT، أي أنها عملية NOT AND، و يرمز لها بأي من الطرق التالية

$x = A\ NAND\ B$

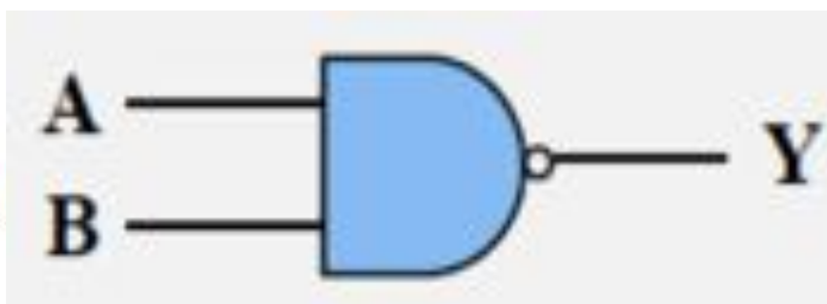
$x = \overline{A\ AND\ B}$

$x = \overline{A \cdot B}$

$x = \overline{AB}$

$x = A \uparrow B$

الجدول التالي هو جدول الصواب لعملية NAND، وهو عكس عملية AND كما هو متوقع

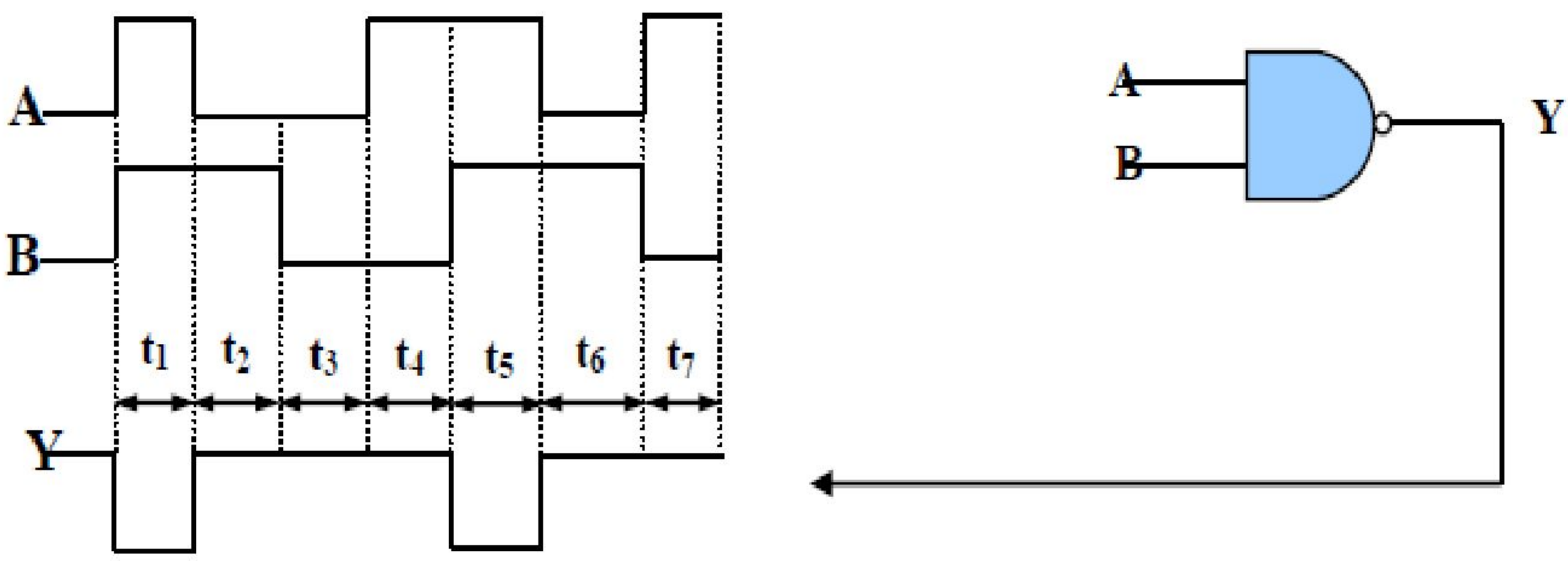


بوابة NAND بمدخلين

(2-Input NAND Gate)

A	B	x
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

المخطط الزمني لبوابة NAND

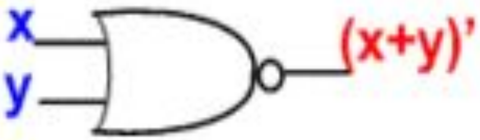


شكل (٢ -٩) المخطط الزمني لبوابة NAND بمدخلين.

* عملية "ليس أو" (NOT OR)، والمعروفة بعملية "نور" (NOR)، ونتيجة هذه العملية معاكسة تماماً لعملية "أو"، إن جدول الجدارة لعملية "ليس و" ورمزها المنطقي مبينات أدناه:

X	Y	(X+Y)'
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

رمزها المنطقي



* عملية "أو الاستثنائية" (EXCLUSIVE-OR) والمعروفة بصورتها المختصرة (XOR). وجدول الجدارة لعملية (XOR) هو:

X	Y	(X⊕Y)'
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

رمزها المنطقي

6-2 عملية NOR

عملية NOR هي عبارة عن عملية OR متبوعة بعملية NOT، أي أنها عملية NOT OR، و يرمز لها بأي من الطرق التالية

$x = A\ NOR\ B$

$x = \overline{A\ OR\ B}$

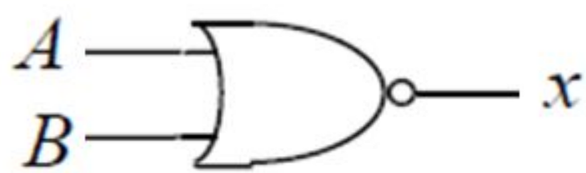
$x = \overline{A + B}$

$x = A \downarrow B$

الجدول التالي هو جدول الصواب لعملية NOR، و هو عكس عملية OR كما هو متوقع

البوابة المنطقية التي تقوم بإجراء هذه العملية هى بوابة NOR، و يرمز لها بالشكل التالي

A	B	x
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

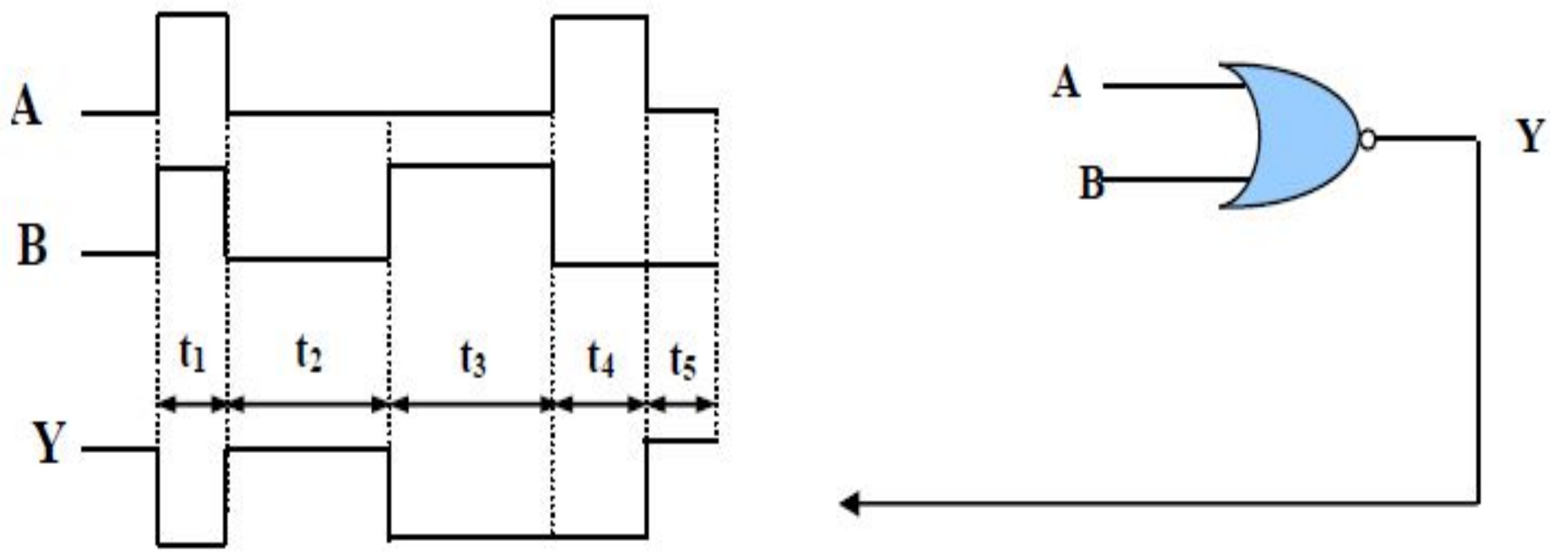


بوابة NOR بمدخلين

(2-Input NOR Gate)

المخطط الزمني لبوابة NOR

شكل (٢ -١١) يوضح بوابة NOR لها الدخلان A, B ذوا نبضات متغيرة المستوى، ويمكن من خلال جدول الحقيقة للبوابة NOR الحصول على الخرج (Y) الموضح بالشكل.



شكل (٢ -١١) المخطط الزمني لبوابة NOR بمدخلين.

2-7 عملية XOR

XOR هو اختصار لعبارة Exclusive OR، و تسمى عملية الاختلاف،

حيث أن الخرج يساوي 1 إذا كان الدخلان مختلفين، $x = A \ XOR \ B$

و يساوي 0 إذا كانا متشابهين. $x = A \oplus B$

و يرمز لها بإحدى الطريقتين التاليتين

الجدول التالي هو جدول الصواب لعملية XOR

A	B	x
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

البوابة المنطقية التي تقوم بإجراء هذه العملية هى بوابة XOR، و يمكن التعبير عن عملية XOR باستخدام العمليات الأساسية الثلاث كالتالي

$$A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$

بوابة XOR بمدخلين.

(2-Input XOR Gate)

و جدول الصواب التالى يثبت أن $A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	$\overline{A}B + A\overline{B}$	$A \oplus B$
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0

نلاحظ من جدول الجدارة لعملية (XOR) ما يلي:

- يرمز إلى عملية (XOR) بالرمز "$\oplus$ " بدلاً من الرمز "+" الخاص بعملية (OR).
- إن نتيجة عملية (XOR) تكون 1 في حالة اختلاف قيم المتغيرين.
- بمقارنة جدول الجدارة لعملية "أو" أعلاه مع جدول الجدارة لعملية (XOR)، نجد أن الاختلاف الوحيد هو أنه عندما يكون المتغيران مساويين للقيمة 1 فإن نتيجة عملية (XOR) هي 0، بينما نتيجة عملية "أو" تساوي 1، ولذا سميت هذه العملية بعملية "أو الاستثنائية".
- يمكن التعبير عن عملية (XOR) باستعمال العمليات البوولية الأساسية كالآتي:

$$X \oplus Y = X'Y + XY'$$

وبشكل عام، فإن عملية (XOR) تعطي 1 عندما يكون نصف المتغيرات المشاركة في هذه العملية في حالة 0 والنصف الآخر في حالة 1 إذا كان نصف المتغيرات يمثل عدداً زوجياً.

الرسم المنطقي لبوابة XOR

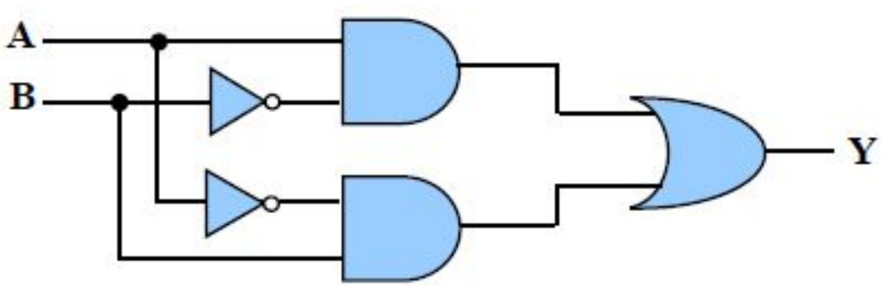
ومن جدول الحقيقة يمكن استنتاج التعبير البوليني لهذه البوابة وهو:

$$Y = \overline{A}B + A\overline{B}$$

والذي يرمز إليه اختصارا بالتعبير المنطقي:

$$Y = A \oplus B$$

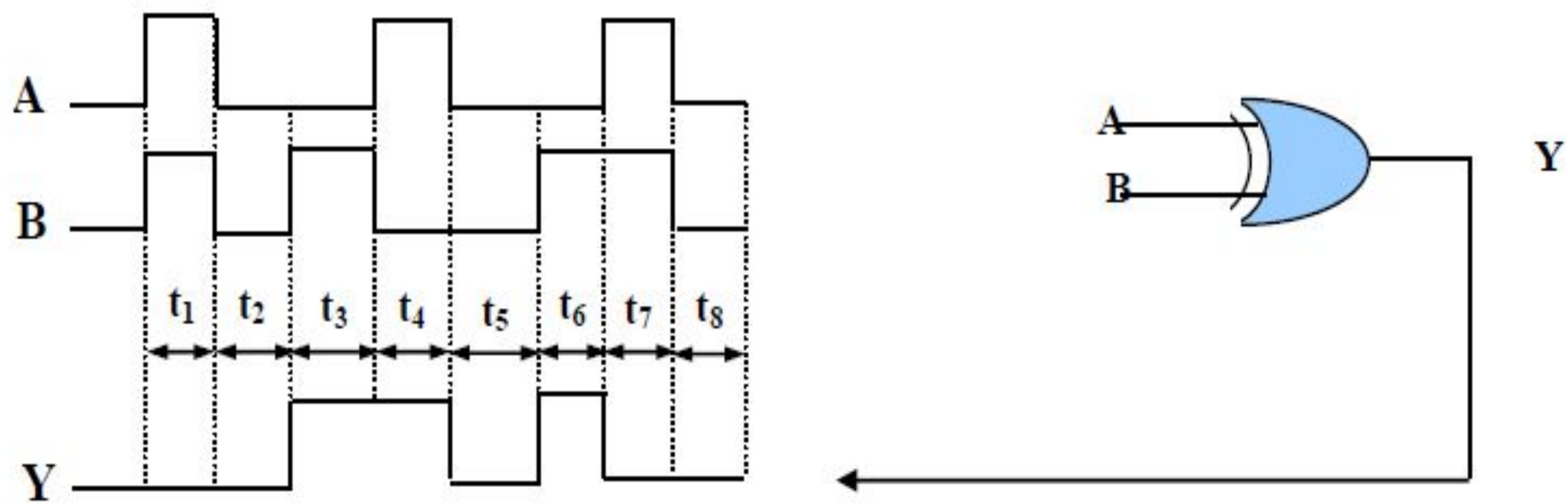
والعلامة $\oplus$ تعني أن A منفردة أو B منفردة. ومن التعبير البوليني السابق للبوابة XOR يمكننا بناء البوابة باستخدام بوابات AND, OR, NOT ، وهذا ما يبينه الشكل (٢ -١٣) حيث تقوم هذه الدائرة المنطقية بوظيفة البوابة XOR المنطقية.



شكل (٢ -١٣) البوابة XOR ممثلة بالبوابات AND, OR, NOT.

المخطط الزمني لبوابة XOR

شكل (٢ -١٤) يوضح كيفية عمل البوابة XOR عندما تكون المدخلات لها عبارة عن نبضات متغيرة المستوى، وكما قلنا سابقا يجب النظر إلى المدخلات بالنسبة لبعضهما البعض حتى نتمكن من تحديد مستوى الخرج عند أي فترة زمنية.

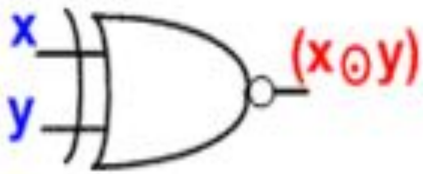


شكل (٢ -١٤) المخطط الزمنى لبوابة XOR.

* عملية التكافؤ (EQUIVALENCE OPERATION)، وهي تعطي نتيجة معاكسة لعملية (XOR)، لذا تعرف بعملية (XNOR).

X	Y	(X≡Y)'
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

رمزها المنطقي



ونلاحظ من جدول الجدارة لعملية التكافؤ ما يلي:

- أنه يرمز إلى عملية التكافؤ بالرمز ≡، وأحياناً بالرمز.
- أن نتيجة عملية التكافؤ تكون 1 إذا تشابهت قيمتا المتغيرين.
- يمكن التعبير عن عملية التكافؤ باستعمال العمليات البوولية الأساسية على النحو التالي:

$$X \equiv Y = X'Y' + XY$$

- نلاحظ أن نتيجة عملية التكافؤ هي تماماً عكس نتيجة عملية (XOR)، لذا فأي من العمليتين تمثل المتممة للعملية الأخرى.

وبشكل عام، فإن عملية التكافؤ تعطي 0 فقط في حالة واحدة، عندما تكون نصف المتغيرات المشاركة في هذه العملية في حالة 0 ، والنصف الآخر في حالة 1 إذا كان هذا النصف يمثل عدداً فردياً.

2-8 عملية XNOR

هي معكوس عملية XOR، و تسمى عملية التساوي، حيث أن الخرج يساوي 1 إذا كان الدخلان متساويين، و يساوي 0 إذا كانا مختلفين. و يرمز لها بإحدى الطريقتين التاليتين

$$x = A\ XNOR\ B$$

$$x = \overline{A \oplus B}$$

الجدول التالى هو جدول الصواب لعملية XNOR

A	B	x
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

البوابة المنطقية التي تقوم بإجراء هذه العملية هى بوابة XNOR، و يرمز لها بالشكل التالي

بوابة XNOR بمدخلين

(2-Input XNOR Gate)

الرسم المنطقي لبوابة XNOR

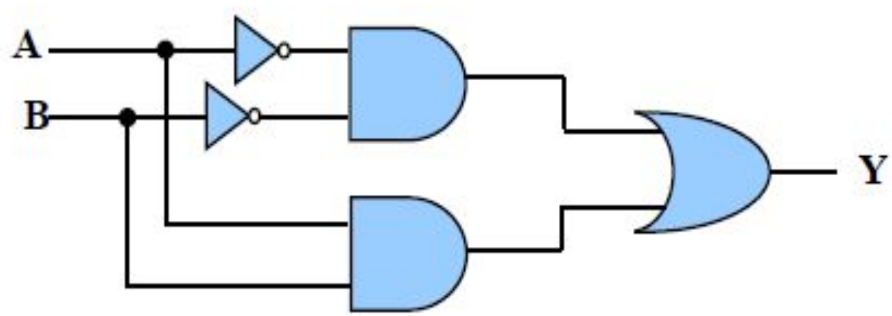
ومن جدول الحقيقة يمكن استنتاج التعبير البوليني لهذه البوابة وهو:

$$Y = AB + \overline{A}\overline{B}$$

والذي يرمز إليه إختصارا بالتعبير المنطقي:

$$Y = A \odot B$$

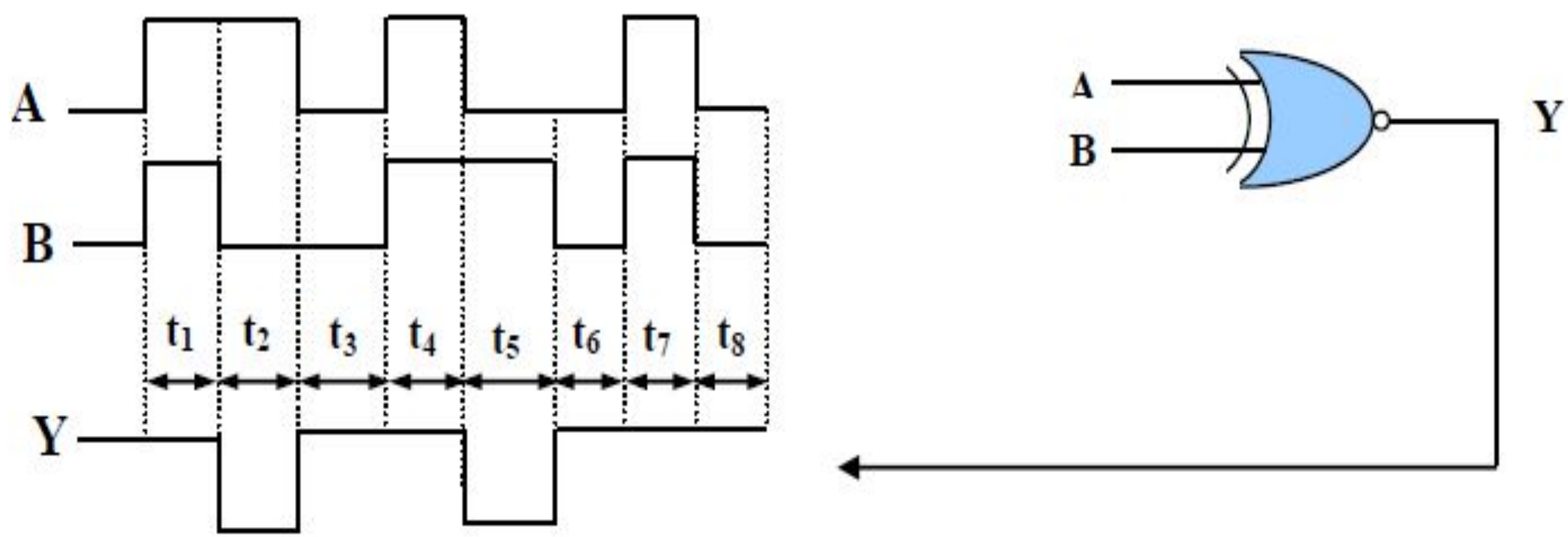
والعلامة $\odot$ تعني علامة التكافؤ. ومن التعبير البوليني السابق للبوابة XNOR يمكننا بناء البوابة باستخدام بوابات AND, OR, NOT، وهذا ما يبينه الشكل (٢ -١٦) حيث تقوم هذه الدائرة المنطقية بوظيفة البوابة XNOR المنطقية.



شكل (٢ -١٦) البوابة XNOR ممثلة بالبوابات AND, OR, NOT.

المخطط الزمني لبوابة XNOR

شكل (٢ -١٧) يوضح بوابة XNOR ذات دخلين A, B لهما نبضات متغيرة المستوى، وعن طريق جدول الحقيقة للبوابة XNOR يمكننا الحصول على الخرج (Y) كما هو موضح بالشكل.



شكل (٢ -١٧) المخطط الزمني لبوابة XNOR.

و يمكن التعبير عن عملية XNOR باستخدام العمليات الأساسية الثلاث كالتالي

$$\overline{A \oplus B} = AB + \overline{A}\,\overline{B}$$

و بخلاف بوابات AND و OR و NAND و NOR،
لا تتوفر بوابات XOR أو بوابات XNOR بأكثر من مدخلين.

تدريب 3:

قم بإنشاء جدول الصواب الذي يثبت أن $\overline{A \oplus B} = AB + \overline{A}\,\overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	AB	$\overline{A}\,\overline{B}$	$AB + \overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A \oplus B}$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1

الدوال البوولية وجدول الجدارة(جدول الخطأ والصواب) والدوائر المنطقية

التعبير المنطقي
Logical Expression

4- التعبير المنطقي (Logical Expression)

التعبير المنطقي هو عبارة عن مجموعة من المتغيرات المنطقية المرتبطة مع بعضها البعض بعمليات منطقية. مثل $x = A + \overline{B} \cdot \overline{C}$

يتكون التعبير المنطقي هنا من أربعة متغيرات هي A و B و C و x، تربط بينها عمليات NOT و AND و OR و عملية التكافؤ (=).

أسبقية إجراء العمليات (Operation Precedence):

يتم إجراء العمليات المنطقية الأساسية الثلاث بالترتيب التالي:

$$x = A + \overline{B} \cdot \overline{C}$$

1- عملية العكس المنطقي NOT

2- عملية AND

3- عملية OR

ففي التعبير أعلاه، مثلاً، يتم أولاً إجراء عملية العكس المنطقي للمتغيرين B و C اولاً، ثم عملية AND بين $\overline{B}$ و $\overline{C}$، و أخيراً عملية OR.

في حالة ظهور عدة عمليات متساوية من حيث الأسبقية في التعبير المنطقي يتم إجراؤها بالترتيب من اليسار لليمين.

يمكن استخدام الأقواس للتحكم في ترتيب إجراء العمليات، حيث أن الأقواس لها الأسبقية العليا، أي أن ما بين الأقواس يتم حسابه دائماً أولاً. مثلاً إذا قمنا في التعبير السابق بإضافة قوسين كالتالي $x = (A + \overline{B}) \cdot \overline{C}$

فإنه يتم إجراء عملية OR الموجودة بين القوسين قبل عملية AND، و ذلك على الرغم من أن عملية AND لها أسبقية أعلى من عملية OR. و السبب في ذلك هو وجود عملية OR ما بين القوسين. حيث يتم أولاً حساب ما بين القوسين، فيتم إجراء عملية العكس المنطقي للمتغير B، ثم عملية OR بين A و $\overline{B}$، و بعد الانتهاء من الأقواس يتم إجراء العمليات خارجها، فيتم إجراء عملية العكس المنطقي للمتغير C، ثم عملية AND لما بين القوسين و $\overline{C}$.

مثال (1)

ما هي قيمة التعبير التالي: $AB'C + (A'B)(B + C')$ ؟

إذا علمت أن $A = 0,\ B = 1,\ C = 1$.

الحل:

نكتب التعبير كالآتي بإظهار رمز عملية «و» صراحة

$(A.B'.C) + (A'.B).(B + C')$

الآن نعوض القيم المعطاة $(0.1'.1) + (0'.1).(1 + 1')$

ثم ننفذ عملية «ليس» $(0.0.1) + (1.1).(1 + 0)$

ثم نحسب كلاً من التعابير المحصورة

داخل أقواس $(0) + (1).(1)$

ثم ننفذ عملية «و» $0 + 1$

وأخيراً ننفذ عملية «أو» التي تبين أن 1

قيمة التعبير تساوي 1

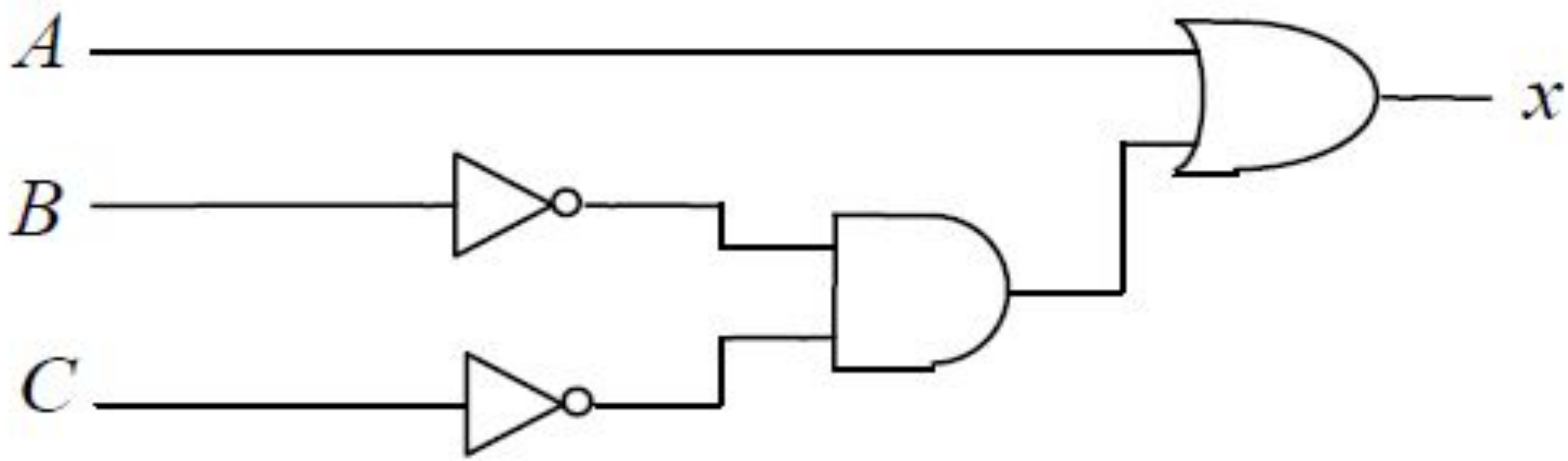
الدائرة المنطقية
Logic Circuit

5- الدائرة المنطقية (Logic Circuit)

يمكن تمثيل أي تعبير منطقي بدائرة منطقية، حيث ننظر للعمليات المنطقية الموجودة بالتعبير و نقوم بربط البوابات المنطقية التي تقوم بإجراء تلك العمليات بالأسلوب المناسب

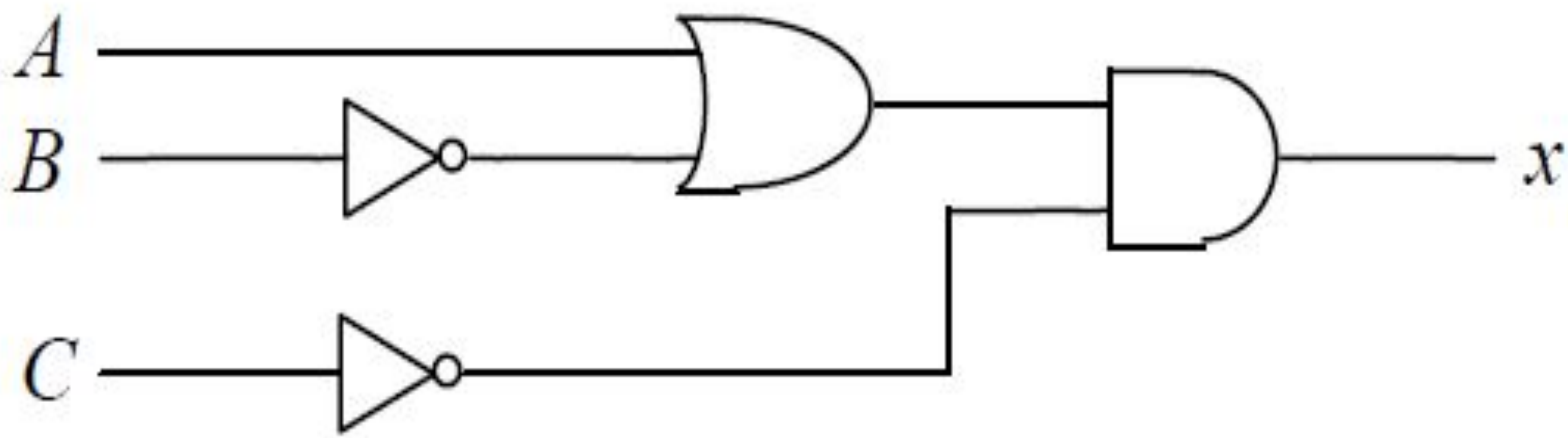
مثلاً، التعبير المنطقي $x = A + \overline{B} \cdot \overline{C}$

يمكن تمثيله بالدائرة المنطقية



و التعبير المنطقي $x = (A + \overline{B}) \cdot \overline{C}$

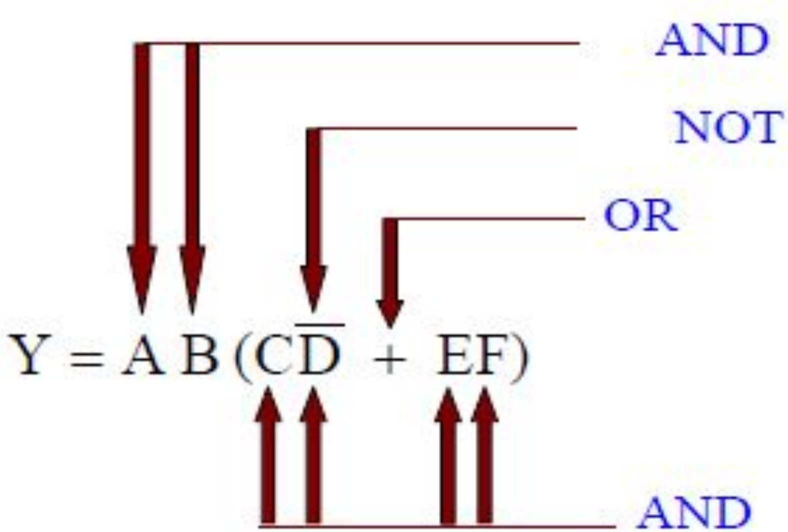
يمكن تمثيله بالدائرة المنطقية



لنفترض الآن أننا نريد تمثيل التعبير البوليني الآتي:

$$Y = AB(C\overline{D} + EF)$$

عند تقسيم هذا التعبير البوليني نجد أن المتغيرات B
A, ثم $(C\overline{D} + EF)$ تمثل ثلاث مدخلات لبوابة AND،
والمتغير $(C\overline{D} + EF)$ يمكن تشكيله بأخذ $C, \overline{D}$
على دخلي بوابة AND، وأخذ E,F على دخلي بوابة
AND أخرى، ثم نأخذ كل من خرج البوابتين AND
على دخلي بوابة OR. ويمكن توضيح
عملية التقسيم السابقة كالآتي:.



قبل أن نبدأ في تمثيل هذا التعبير البوليني يجب أولا الحصول على الحد $(C\overline{D}+EF)$ ؛ ولكن قبل الحصول على هذا الحد علينا الحصول على الحدين $C\overline{D}, EF$ ؛ ولكن قبل ذلك يجب الحصول على المتغير $\overline{D}$ ، وبذلك كما نرى هناك سلسلة من العمليات المنطقية يجب أن تتم على الترتيب. وعلى ذلك فإن البوابات المنطقية المطلوبة لتمثيل التعبير البوليني $AB(C\overline{D}+EF)$ هي:

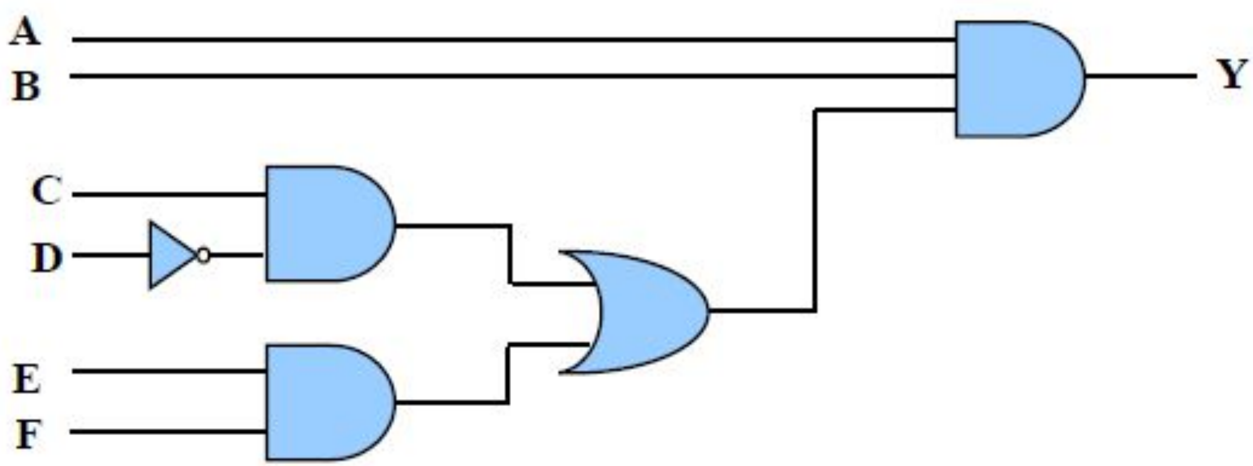
١. بوابة NOT لتمثيل المتغير $\overline{D}$.

٢. بوابتي AND لكل منهما مدخلان لتمثيل الحدين $C\overline{D}, EF$.

٣. بوابة OR ذات مدخلين لتمثيل الحد $(C\overline{D}+EF)$.

٤. بوابة AND لها ثلاثة مدخلات لتمثيل الخرج النهائي Y.

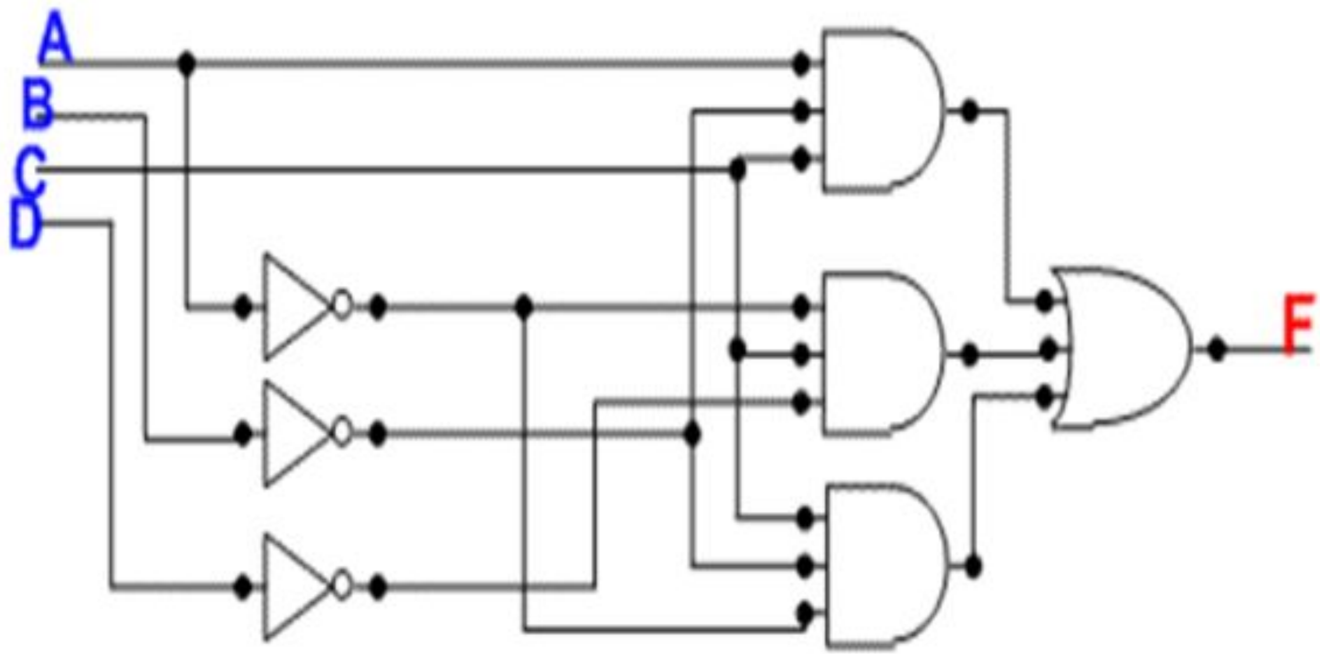
والدائرة المنطقية التي تمثل التعبير البوليني السابق موضحة في شكل (٢ -٢٠).



شكل (٢ -٢٠) الدائرة المنطقية للتعبير البوليني $AB(C\overline{D}+EF)$.

أرسم الدائرة المنطقية للتعبير البوولي التالي

$$F = A\,B'\,D + A'\,C\,D' + A'\,B'\,C$$



The Boolean Expression for a Logic Circuit التعبير البوليني لدائرة منطقية

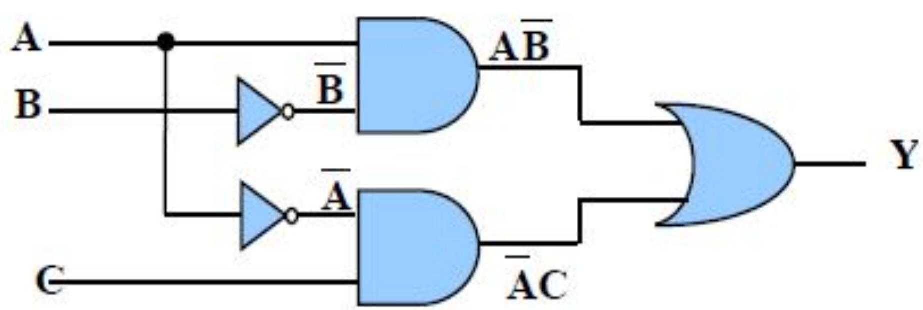
لاستنتاج التعبير البوليني لأي دائرة منطقية، نبدأ من المدخلات في أقصى اليسار متجهين إلى الخرج النهائي للدائرة وذلك بكتابة الخرج لكل بوابة. وكمثال على ذلك، نفترض الدائرة المنطقية الموضحة في شكل (٢ -١٨). ويمكن استنتاج التعبير البوليني لهذه الدائرة كما يلي:

١. التعبير البوليني لبوابة AND والتي لها الدخلان $A, \overline{B}$ هو $A\overline{B}$.

٢. التعبير البوليني لبوابة AND والتي لها الدخلان $\overline{A}, C$ هو $\overline{A}C$.

٣. ويكون التعبير البوليني لبوابة OR والتي لها الدخلان $A\overline{B}, \overline{A}C$ هو $A\overline{B} + \overline{A}C$.

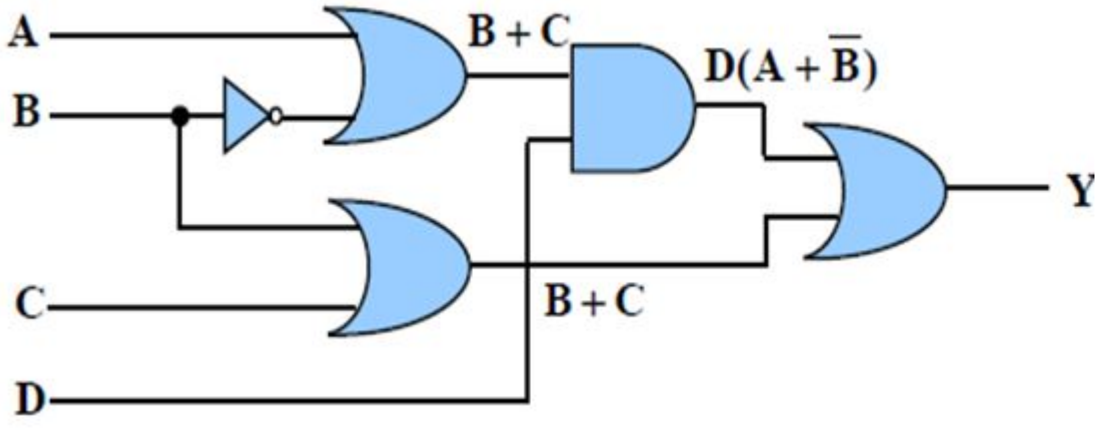
وعلى ذلك يكون الخرج النهائي للدائرة هو: $Y = A\overline{B} + \overline{A}C$



شكل (٢ -١٨) دائرة منطقية تبين كيفية استنتاج التعبير البوليني للخرج.

مثال (٢ -٢): اكتب التعبير البوليني للدائرة المنطقية الموضحة في شكل (٢ -١٩).

الحل:



شكل (٢ -١٩) الدائرة المنطقية لمثال (٢ -٢) وتبين كيفية الحصول على التعبير البوليني للخرج.

ويكون التعبير البوليني لخرج الدائرة النهائي هو:

$$Y = D(A + \overline{B}) + (B + C)$$

جدول الجدارة

(جدول الصواب – جدول الحقيقة)

Truth Table

2.3.2- جداول الجدارة

جداول الجدارة (Truth Tables)

نحتاج، لتمثيل الدالة البوولية المكونة من n من المتغيرات، باستعمال جدول الجدارة، إلى قائمة تحوي (2^n) من مجموعات القيمتين (0 و 1)، المناظرة لهذه المتغيرات. وسوف يحتوي هذا الجدول على (2^n) صفاً و ($n+1$) عموداً.

مثال(3)

كوّن جدول الجدارة للدالة $F2 = A + B' + C$

الحل:

يوجد في الدالة ثلاثة متغيرات مختلفة هي A, C, B. لذا سيتضمن جدولها (2^3) 8 من مجموعات قيم(0 و 1). وتبين الصفوف الثمانية المكونة من الأعمدة الثلاثة الأولى من الجدول هذه المجموعات. وتناظر مجموعات القيم هذه جميع الأعداد الثنائية من 000 ولغاية 111 .

ومن أجل معرفة قيمة $F2$ لكل مجموعة من مجموعات القيم، نحتاج إلى معرفة قيم كل من A, C، B عند كل صف في الجدول، ثم تنفيذ عملية "أو" على هذه القيم. ونحتاج إلى عمود رابع على الأقل لنبين من خلاله قيمة الدالة $F2$ لكل مجموعة من مجموعات القيم المبينة في صفوف الجدول الثمانية. ولكن قد نضيف عموداً آخر نبين فيه قيمة B'، لزيادة الوضوح. وسيحتوي الجدول على ثمانية صفوف وخمسة أعمدة.

$F2 = A + B' + C$ جدول الجدارة للدالة

A	B	C	B'	F2
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

جدول الصواب (Truth Table)

عبارة عن جدول يوضح جميع احتمالات الدخل للدائرة المنطقية و قيم الخرج المقابل لكل منها. مثلا، لإنشاء جدول صواب للتعبير المنطقي $x = A + \overline{B} \cdot \overline{C}$

نبدأ بتحديد عدد الصفوف و عدد الأعمدة في الجدول.

متغيرات الدخل هي A و B و C، و عددها 3، أي عن عدد احتمالات الدخل هو $8 = 2^3$، و هو عدد أسطر (صفوف) جدول الصواب.

$$x = A + \overline{B} \cdot \overline{C}$$

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{B} \cdot \overline{C}$	$x = A + \overline{B} \cdot \overline{C}$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

و بالمثل جدول الصواب للتعبير المنطقي هو

$$x = (A + \overline{B}) \cdot \overline{C}$$

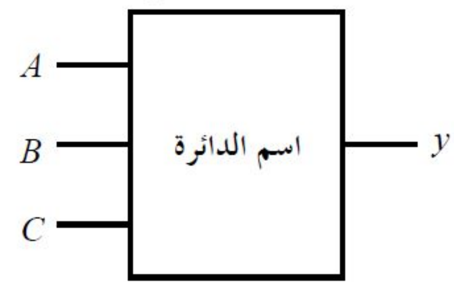
A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A + \overline{B}$	$x = (A + \overline{B}) \cdot \overline{C}$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0

مثال:

ارسم المخطط المنطقي، و أكمل جدول الصواب، ثم ارسم الدائرة المنطقية للتعبير المنطقي

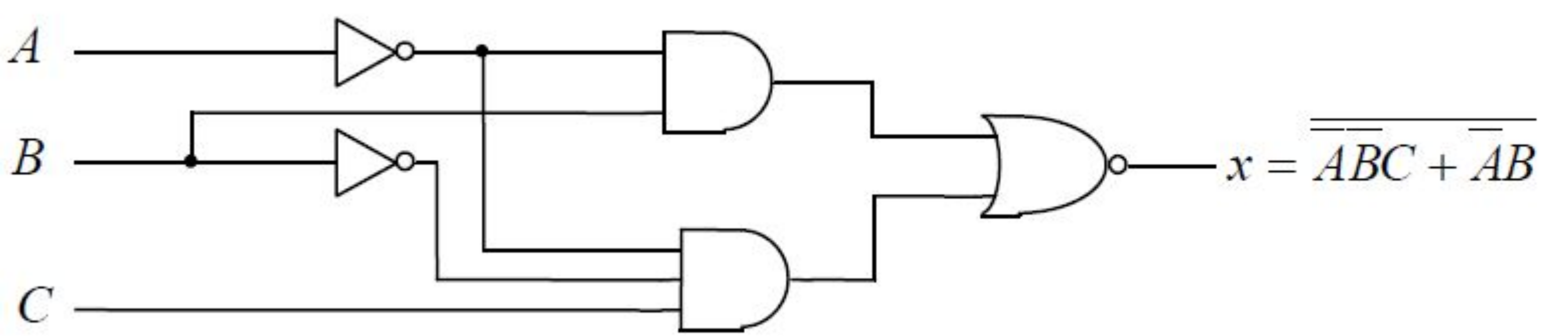
$$y = \overline{\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B}$$

المخطط المنطقي



جدول الصواب

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}B$	$\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B$	$x = \overline{\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B}$
0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1



مثال (٢ -٤): استنتج جدول الحقيقة للتعبير البوليني:

$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

الحل: هناك ثلاثة متغيرات (A, B, C) في التعبير البوليني المعطى، وبالتالي فهناك ثمانية احتمالات أو تشكيلات مختلفة لهذه المتغيرات كما هو موضح بالأعمدة الثلاثة على اليسار في الجدول (٢ -١٤).

القيم الثنائية لكل حد من الحدود الأربعة في التعبير البوليني هي:

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} = 000,\ \overline{A}B\overline{C} = 010,\ AB\overline{C} = 110,\ ABC = 111$$

أمام كل من هذه القيم الثنائية يوضع (1) في عمود الخرج (Y) كما هو موضح بالجدول، ولكل التشكيلات الثنائية المتبقية يوضع (0) في عمود الخرج (Y).

المدخلات			الخرج
A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

جدول (٢ -١٤) جدول الحقيقة للتعبير البوليني

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

تمثيل دائرة منطقية من خلال جدول الحقيقة

Implementation of a Logic Circuit via a Truth Table

سوف نتعرف في هذا الجزء على كيفية تمثيل دائرة منطقية من خلال جدول الحقيقة الخاص بها بدلا من التعبير البوليني، حيث يمكن لنا كتابة التعبير البوليني من جدول الحقيقة ومن ثم تمثيل الدائرة المنطقية. جدول (٢ -١٢) يبين جدول الحقيقة لدائرة منطقية ما، والمراد تمثيل هذه الدائرة والتي تحقق هذا الجدول. يمكن الحصول على التعبير البوليني من جدول الحقيقة كما يلي:

١. نحدد من جدول الحقيقة تشكيلة المدخلات التي تعطي الخرج $Y = 1$، ففي الصف الثالث من الجدول نجد أن الخرج $Y = 1$ حيث قيمة المدخلات هي $A = 0, B = 1, C = 0$، وتكتب بالتعبير البوليني على الشكل $\overline{A}B\overline{C}$ حيث يكتب المتغير برمزه إذا كان يساوي (1)، ويكتب بعكس رمزه إذا كان يساوي (0)، وبالمثل فإن الخرج يساوي (1) في الصف السابع من الجدول والذي يكتب بالتعبير البولينى على الشكل $AB\overline{C}$.

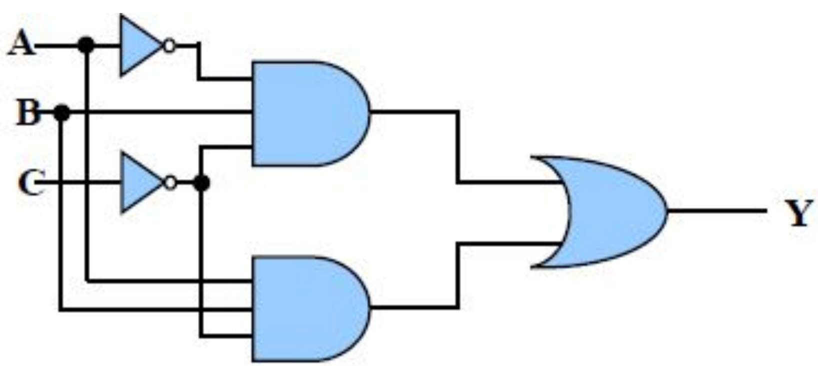
المدخلات			الخرج
A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

بتجميع التعبيرات البولينية التي تعطي الخرج Y = 1 عن طريق بوابة OR نحصل على:

$$Y = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$$

الحد الأول في التعبير البوليني السابق $\overline{A}B\overline{C}$ يمكن تمثيله عن طريق تجميع المتغيرات الثلاثة $\overline{A}, B, \overline{C}$ على بوابة AND، والحد الثاني من التعبير البوليني $AB\overline{C}$ يمكن تمثيله عن طريق تجميع المتغيرات الثلاثة $A, B, \overline{C}$ على بوابة AND، وبتجميع الحدين الأول والثاني على بوابة OR يمكننا الحصول على التعبير البوليني للخرج Y.

والبوابات المنطقية المطلوبة لتمثيل التعبير البوليني السابق هي: بوابتان NOT لتمثيل كل من المتغيرين $\overline{A}, \overline{C}$؛ بوابتان AND ذات ثلاثة مدخلات لتمثيل الحدين $\overline{A}B\overline{C}$، $AB\overline{C}$، وبوابة OR بدخلين لنحصل منها على دالة الخرج النهائي $\overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$، والدائرة المنطقية التي تمثل هذا التعبير البوليني موضحة في شكل (٢ -٢١).



شكل (٢ -٢١) الدائرة المنطقية للتعبير البوليني $\overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$.

مثال (٢ -٣): استنتج الدائرة المنطقية المطلوبة لتمثيل جدول الحقيقة الموضح في جدول (٢ -١٣).

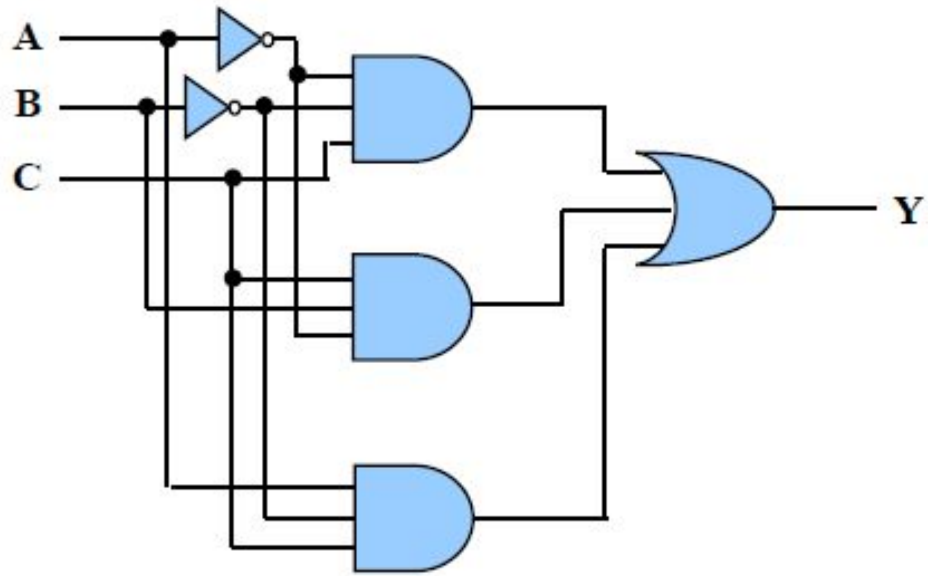
المدخلات			الخرج
A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

جدول (٢ -١٣) جدول الحقيقة للدائرة المنطقية المراد تمثيلها.

الحل: التعبير البوليني لجدول الحقيقة المبين يمكن كتابته عن طريق تجميع الحدود التي تعطي الخرج Y = 1 (الحدود المظللة بالجدول) على بوابة OR كما يلي:

$$Y = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C$$

ويكون التمثيل النهائي للدائرة كما هو موضح بشكل (٢ -٢٢).



شكل (٢ -٢٢) الدائرة المنطقية للتعبير البوليني $\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C$.

تدريب 4:

ارسم المخطط المنطقي، و أكمل جدول الصواب، ثم ارسم الدائرة المنطقية لكل تعبير من التعبيرات المنطقية التالية:

1- $x = \overline{A(\overline{B}+C)}$

2- $y = \overline{A}B(A+\overline{C})$

3- $z = \overline{A\overline{B}+C\overline{D}}$

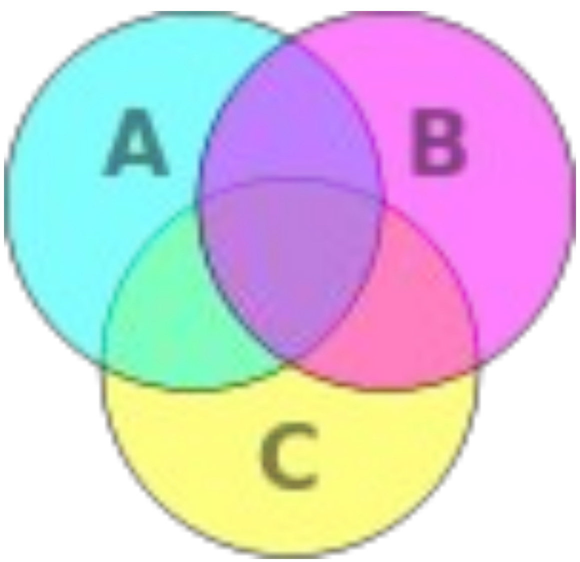
جدول الصواب

A	B	C	D	$\overline{B}$	$\overline{D}$	$A\overline{B}$	$C\overline{D}$	$A\overline{B}+C\overline{D}$	$y=\overline{A\overline{B}+C\overline{D}}$
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	1

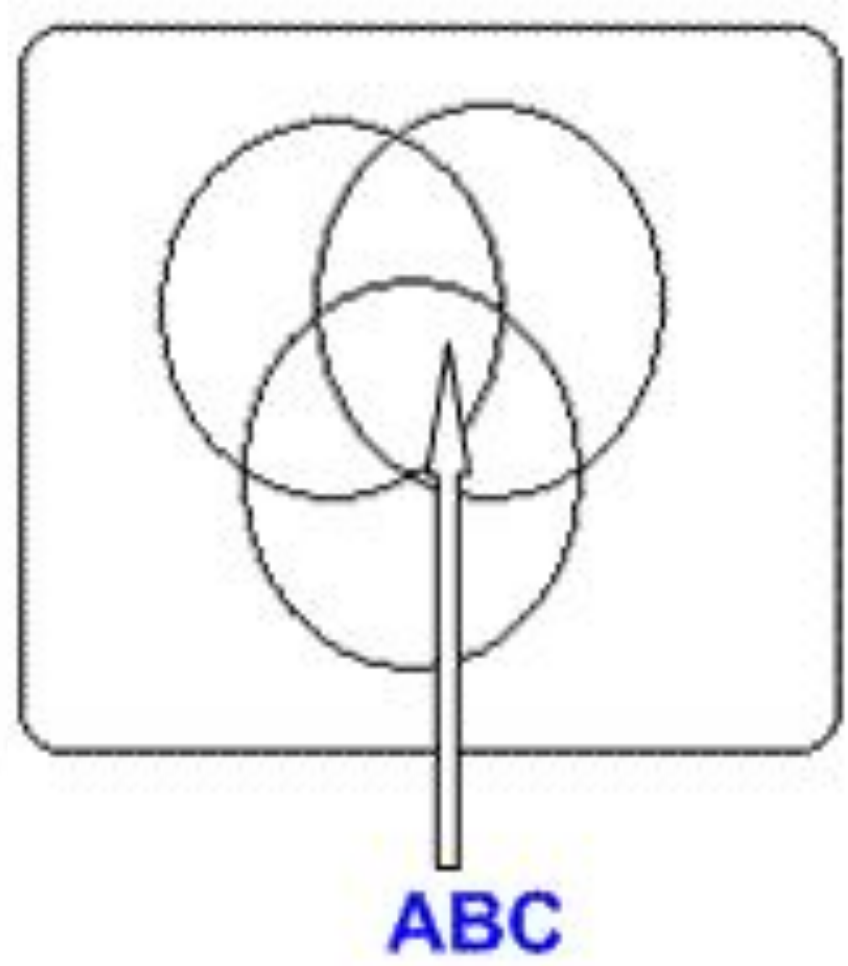
مخطط فين
Venn Diagrams

مخطط فين

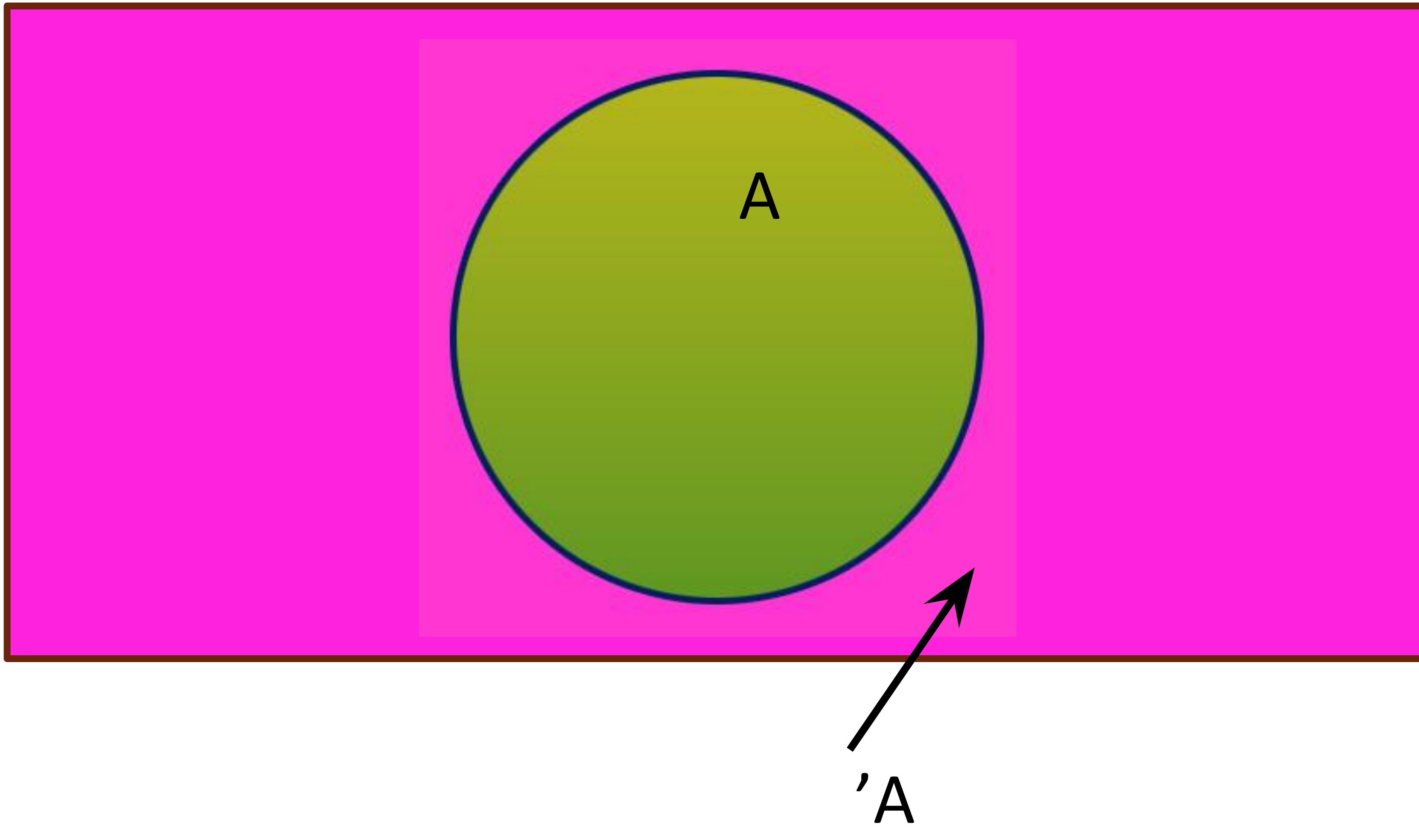
- تسمح **مخططات فن** بتمثيل نظريات الجبر البولياني بشكل هندسي وهذه المخططات عبارة عن أشكال هندسية يمكن اعتبارها نظيرا للمتحولات المنطقية.
- مخططات فن مفيدة في الحصول على رؤية هندسية للتوابع البوليانية ويمكن استخدامها أيضا للحصول وللتأكد من صحة النظريات البوليانية كقوانين دي مورغان.
- ومن الجدير بالذكر أن مخططات فن لا تستخدم بكثرة في الحالات التي تحتوي على أكثر من ثلاث متحولات وذلك لصعوبة رسمها واستخلاص النتائج منها.
-

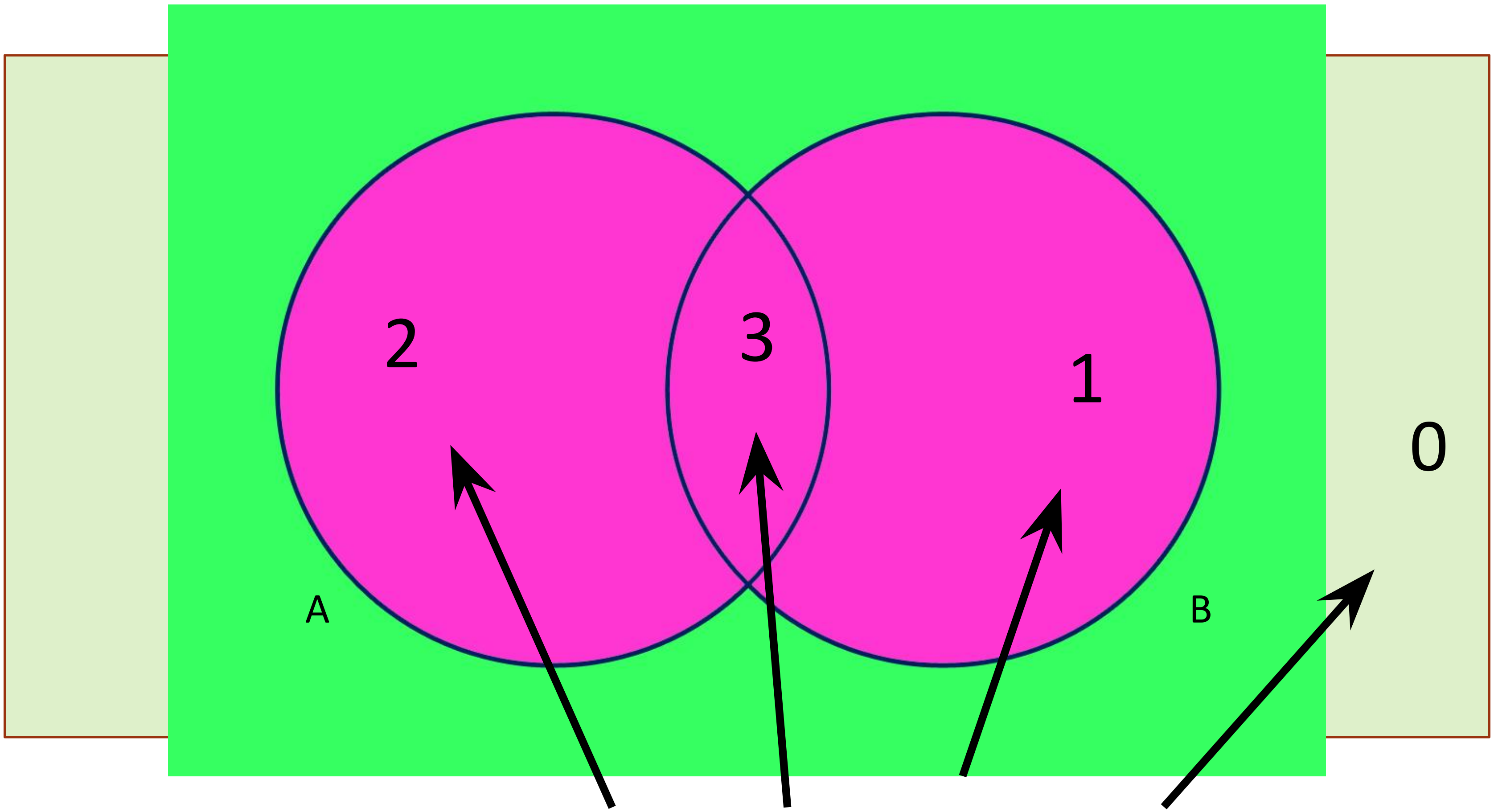


3.2.3- مخططات فين



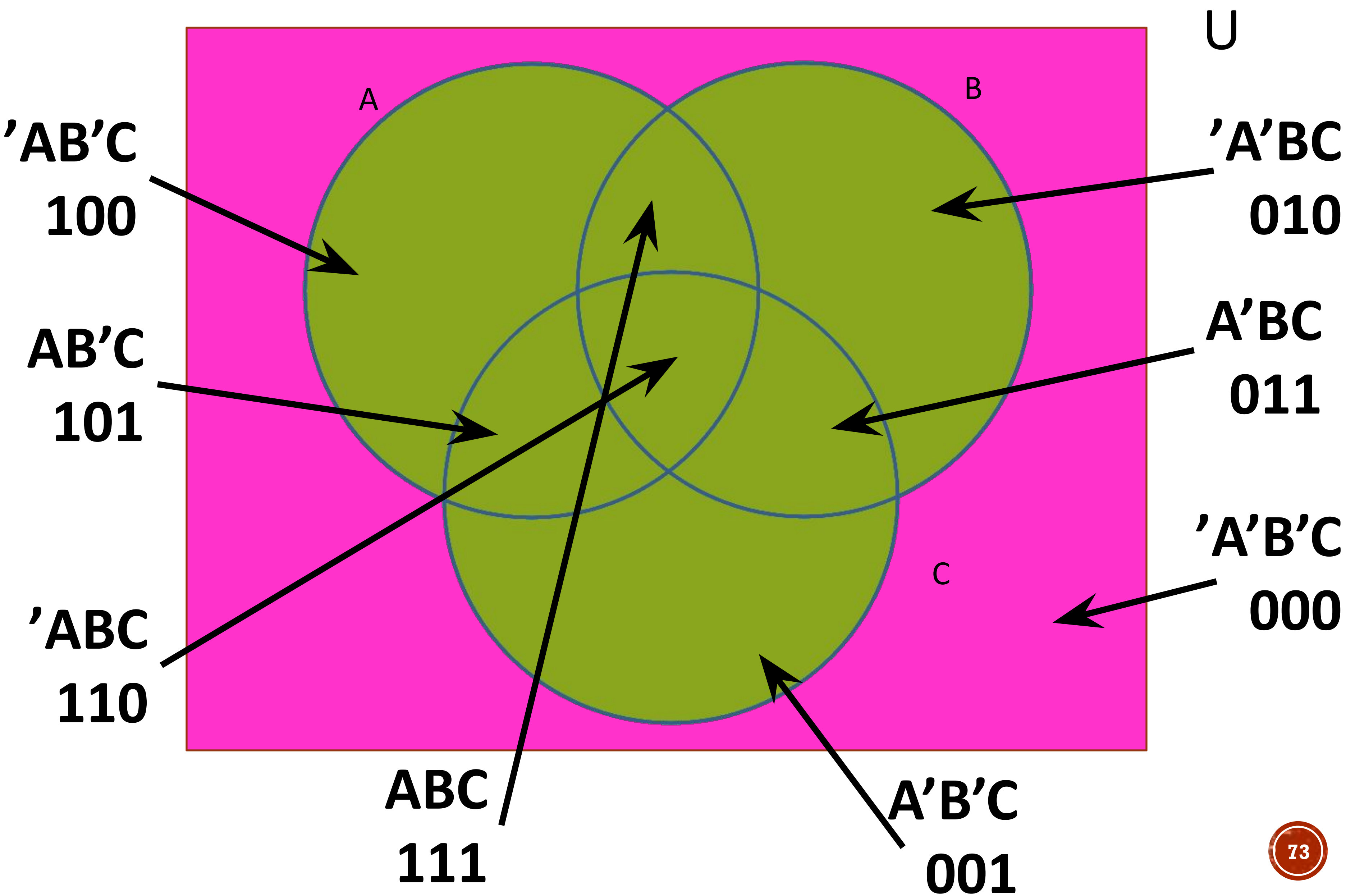
مخطط فين بثلاث متغيرات

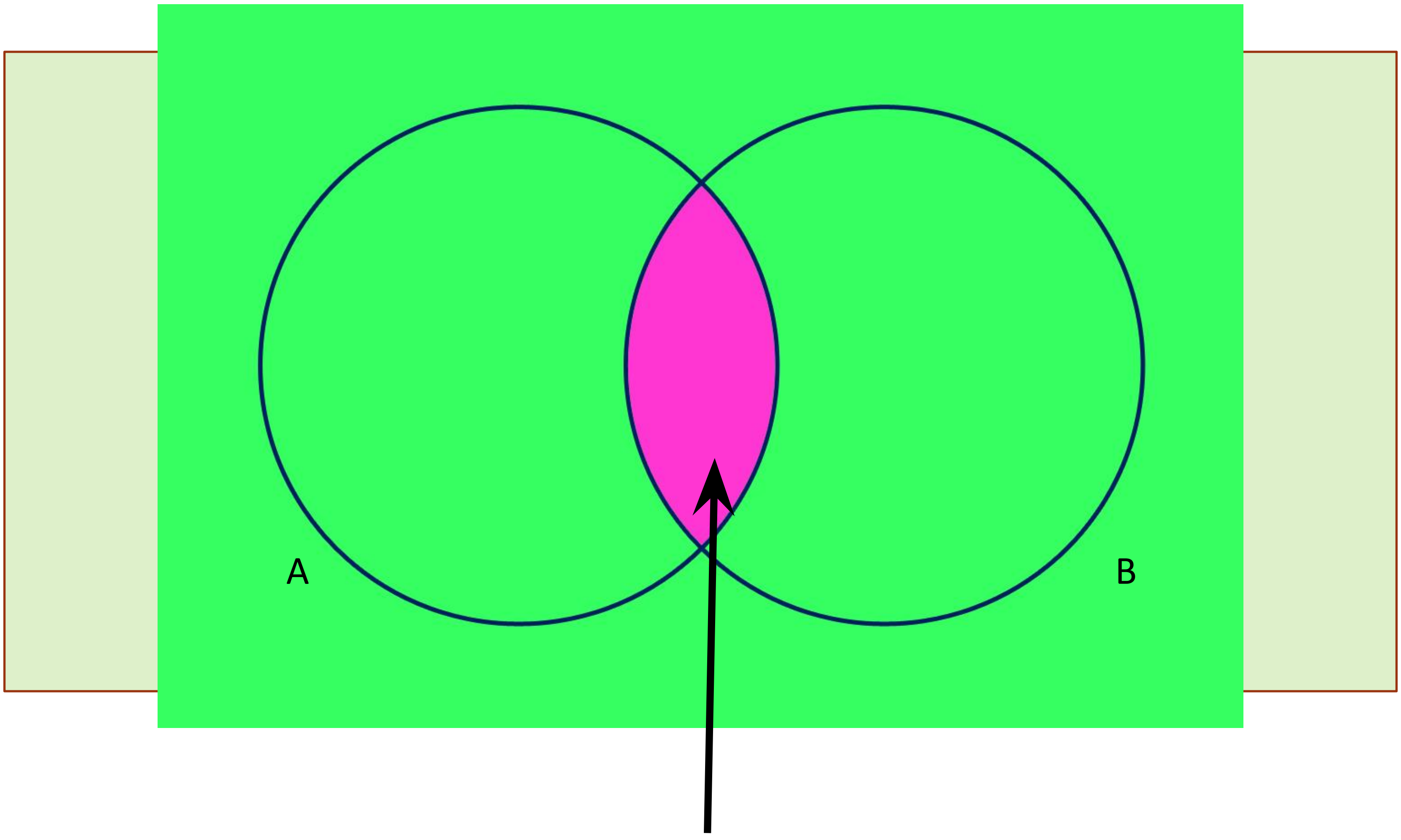

A
’A



AB’+AB+A’B   ’A’B

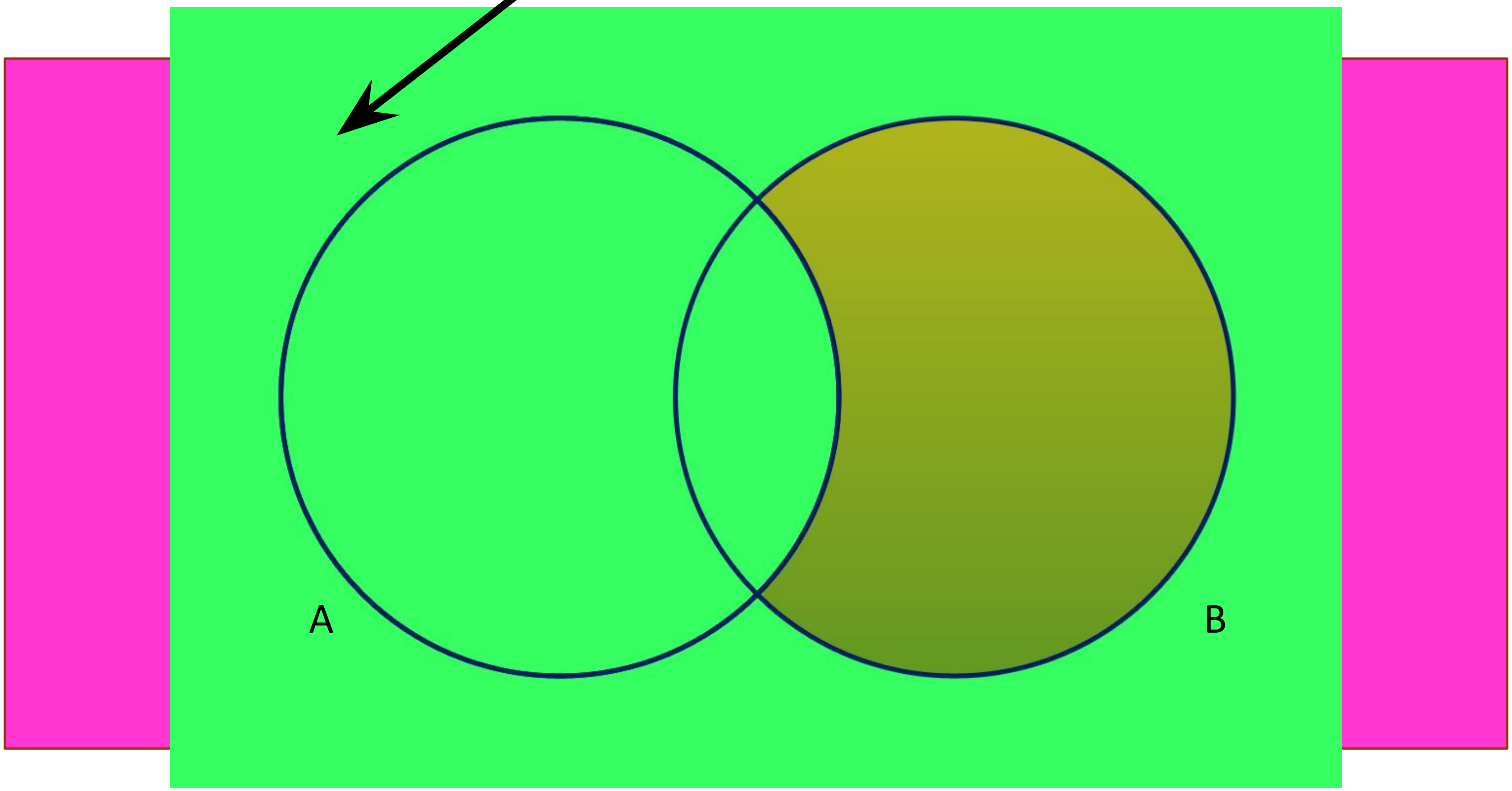
01   11   10   00


U
A
B
C
’AB’C
100
’A’BC
010
AB’C
101
A’BC
011
’A’B’C
000
’ABC
110
ABC
111
A’B’C
001

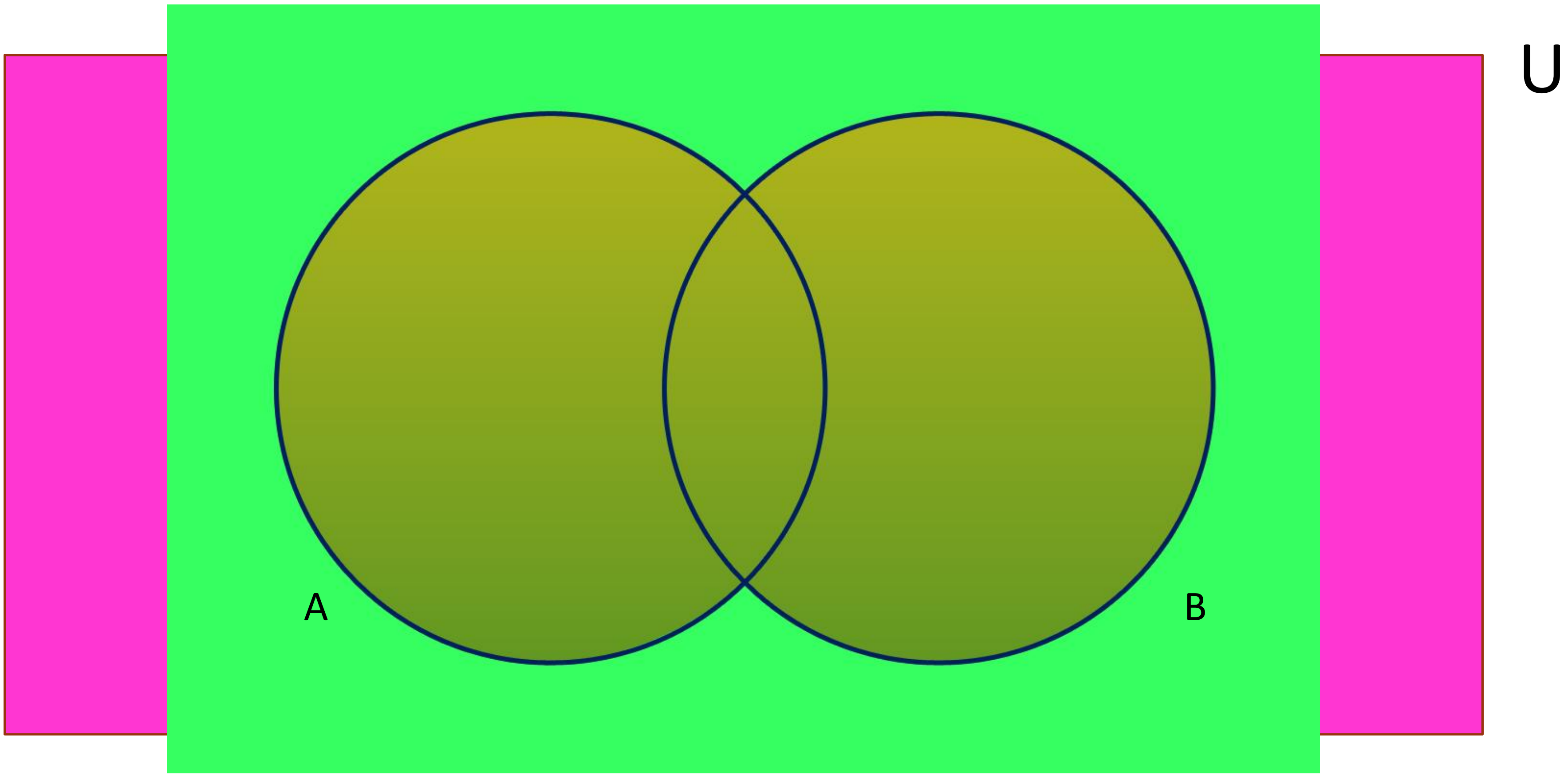


AB

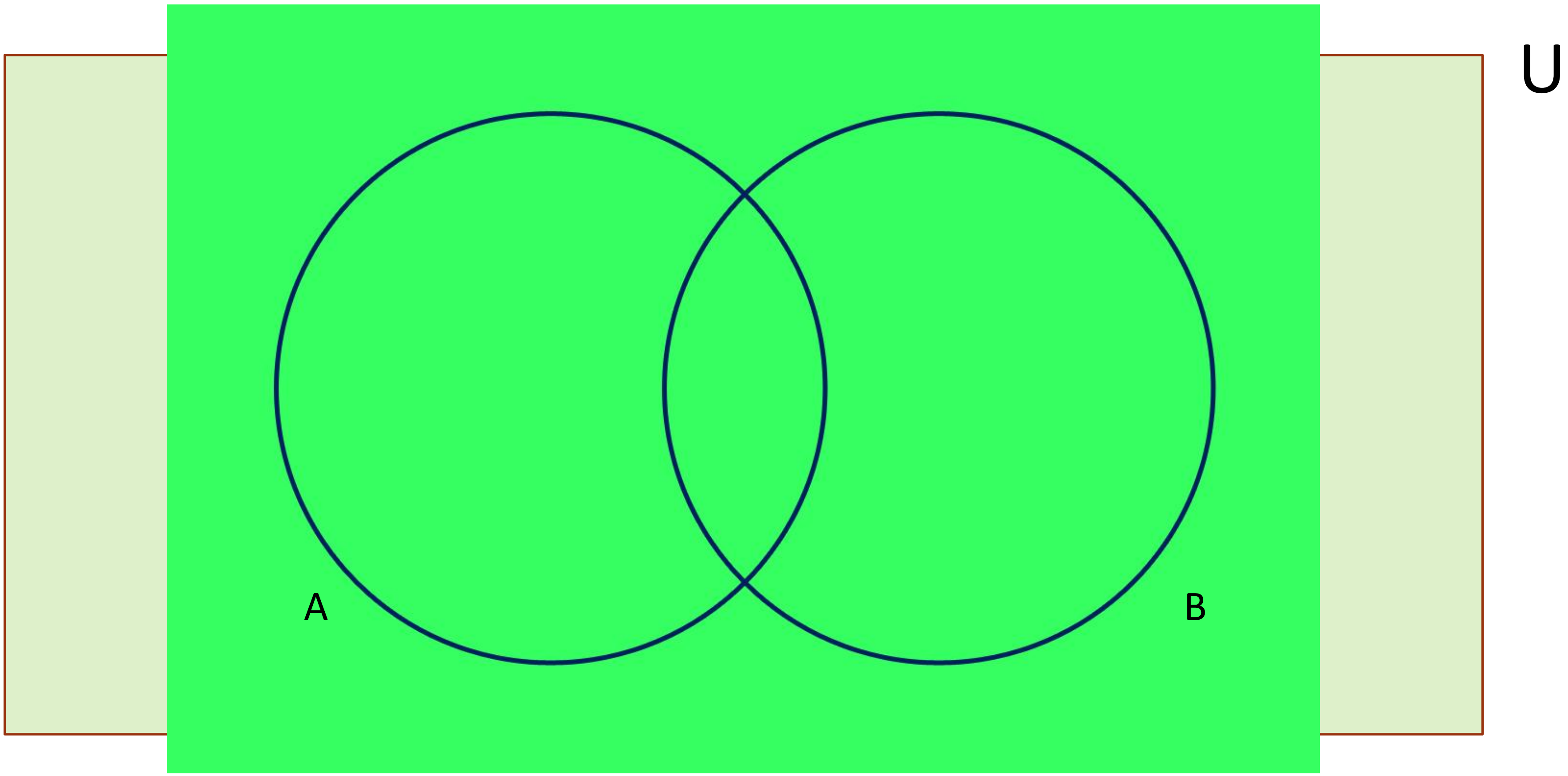
'A+B



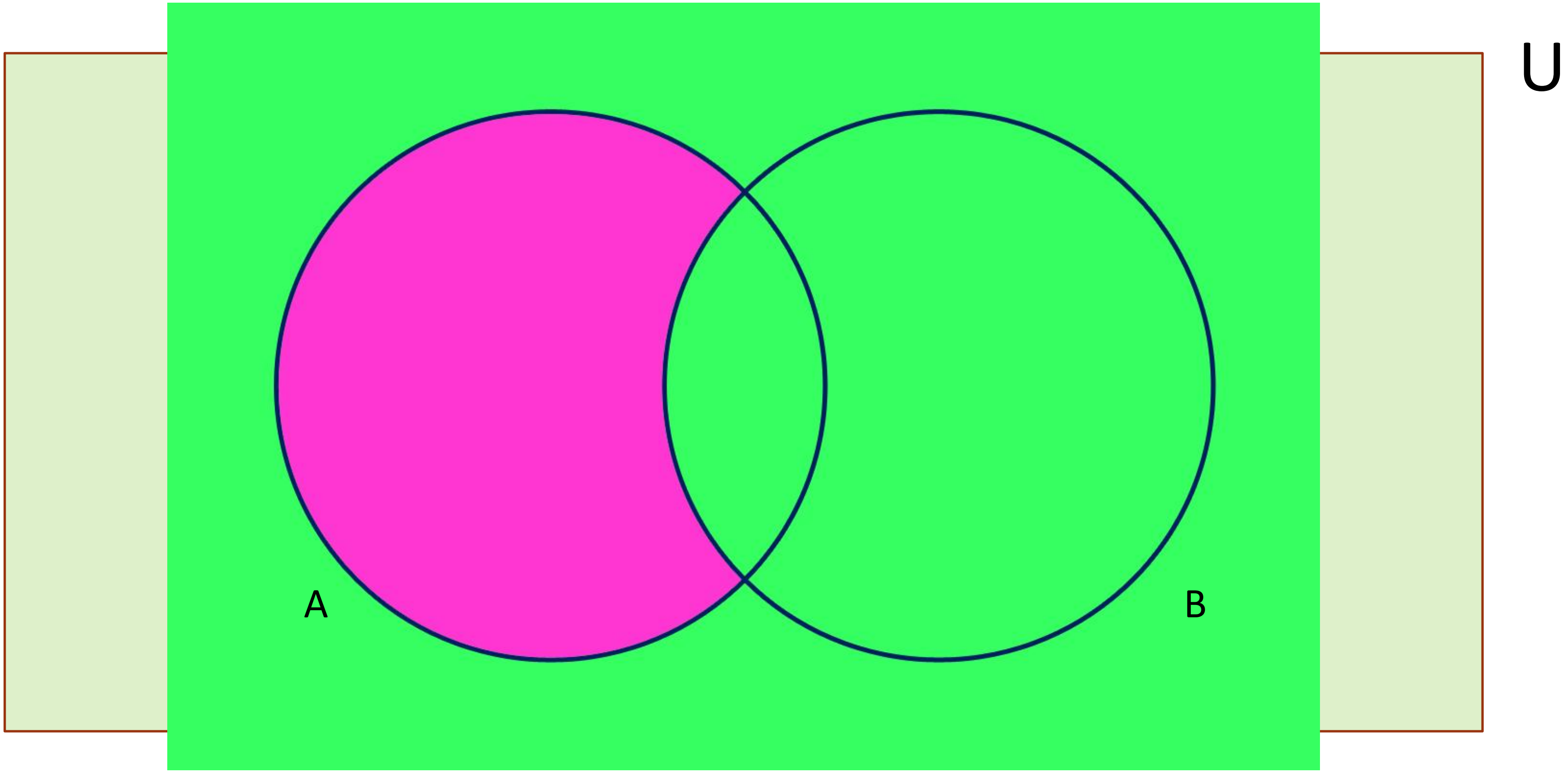
'A'B



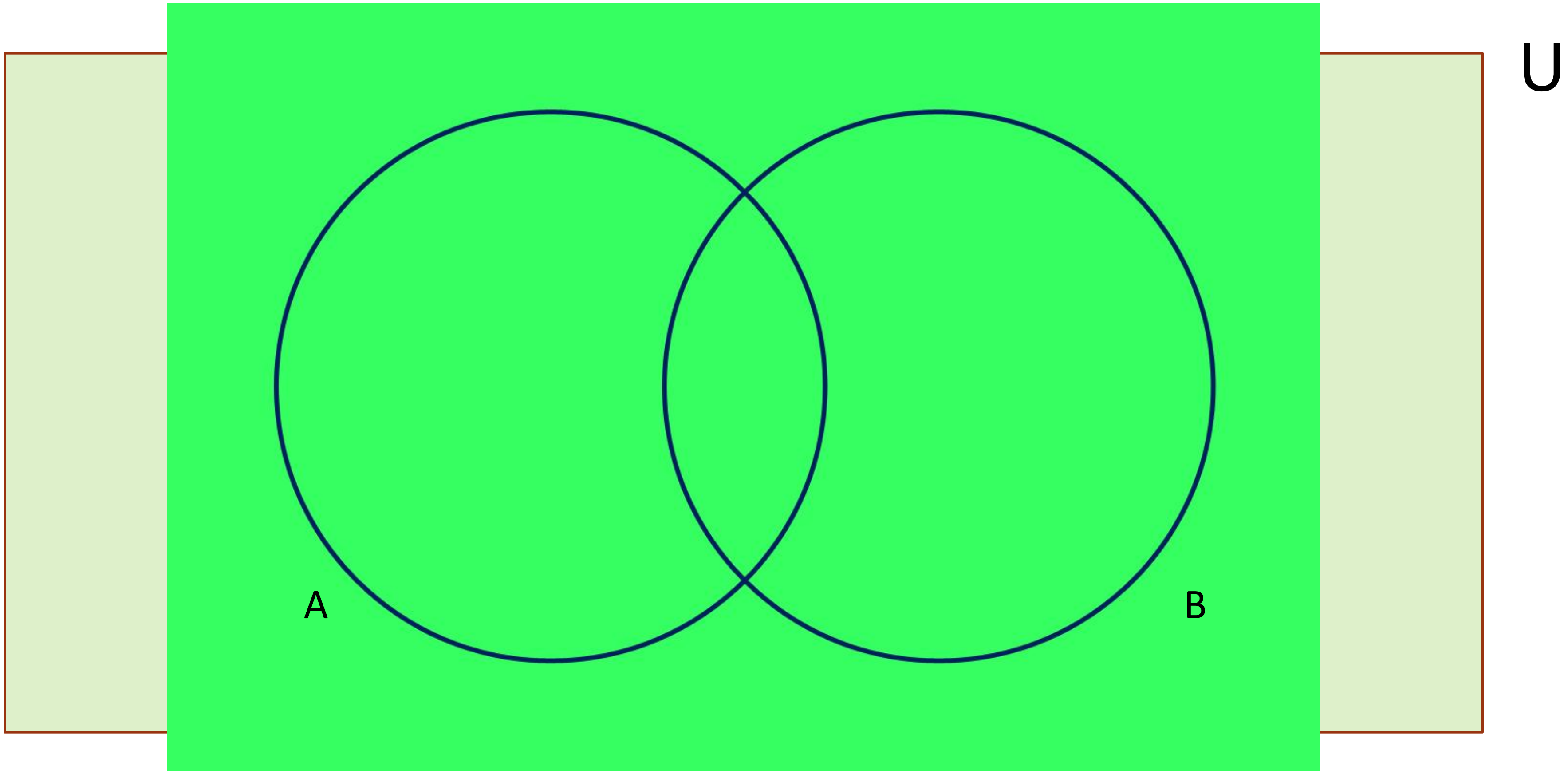
’AB



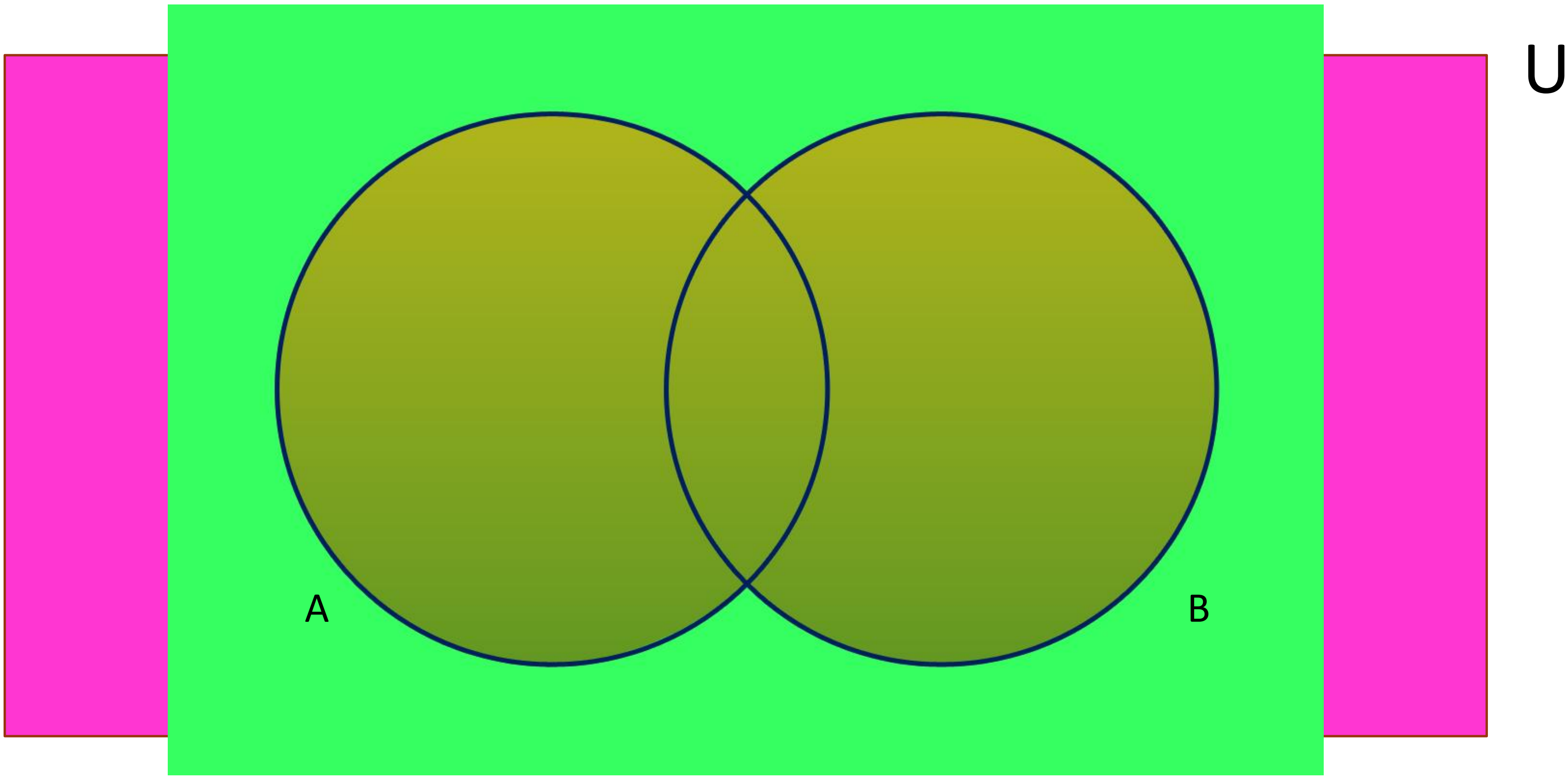
’AB



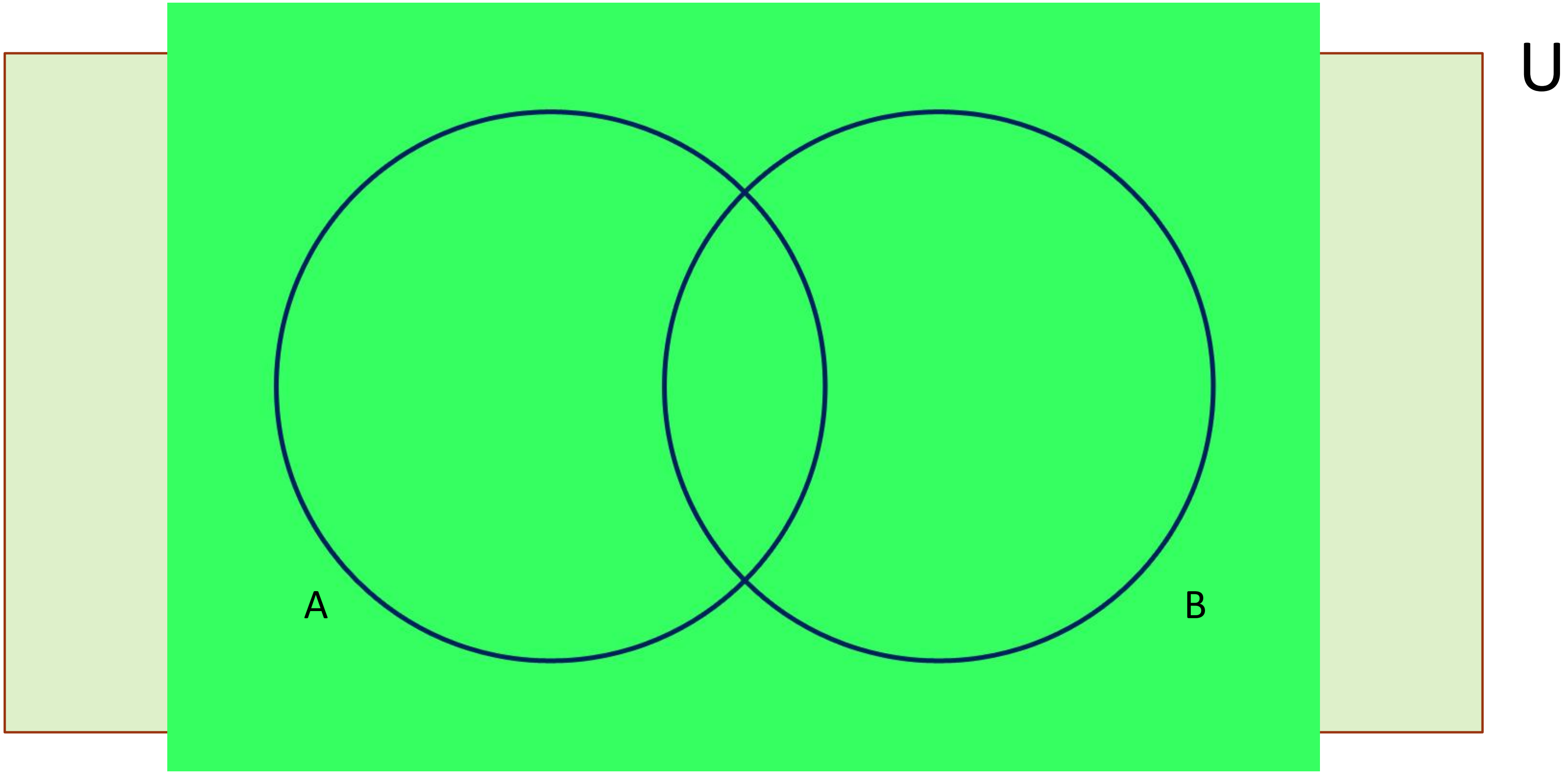
’(A+B)



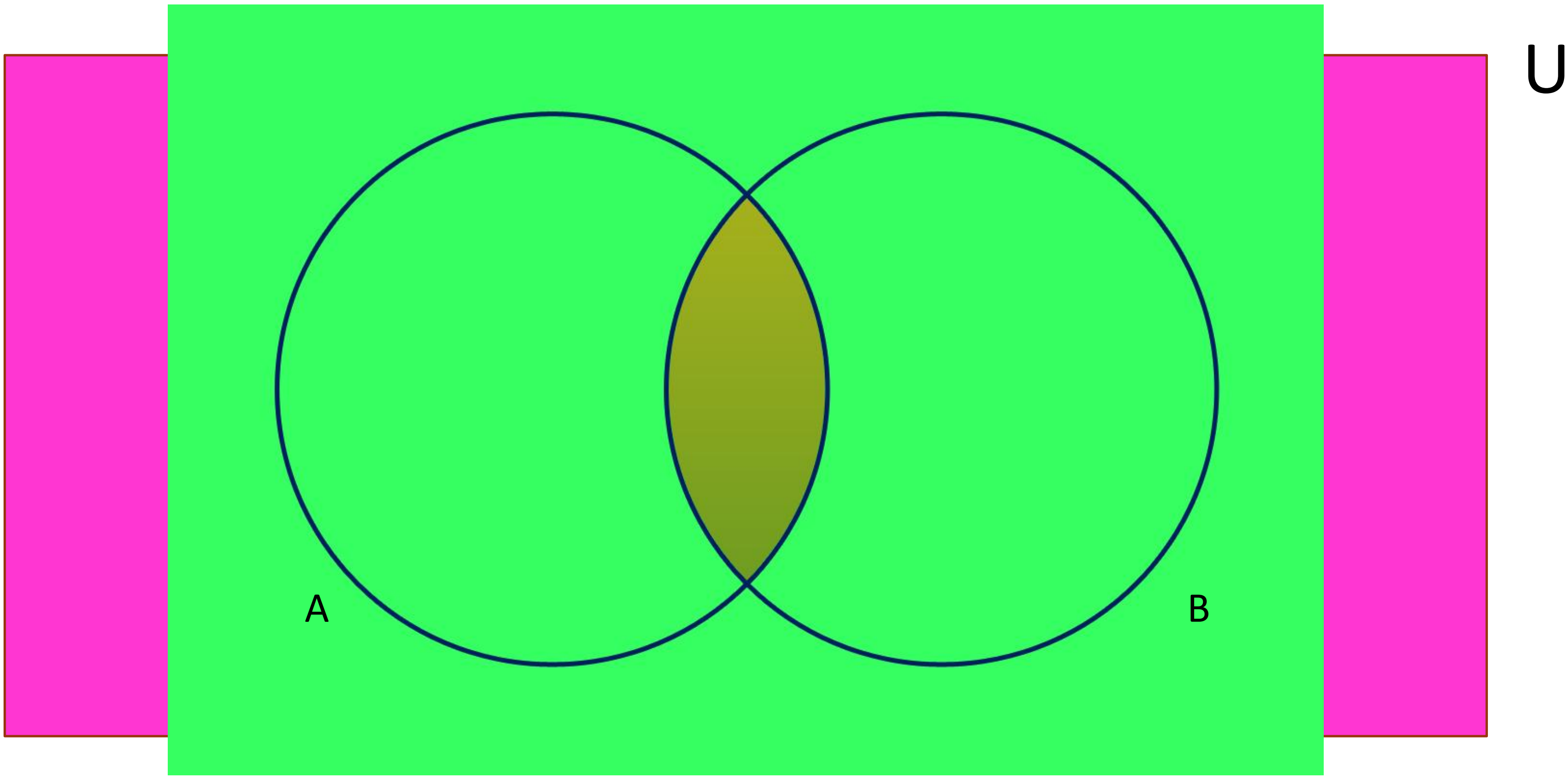
’(A+B)



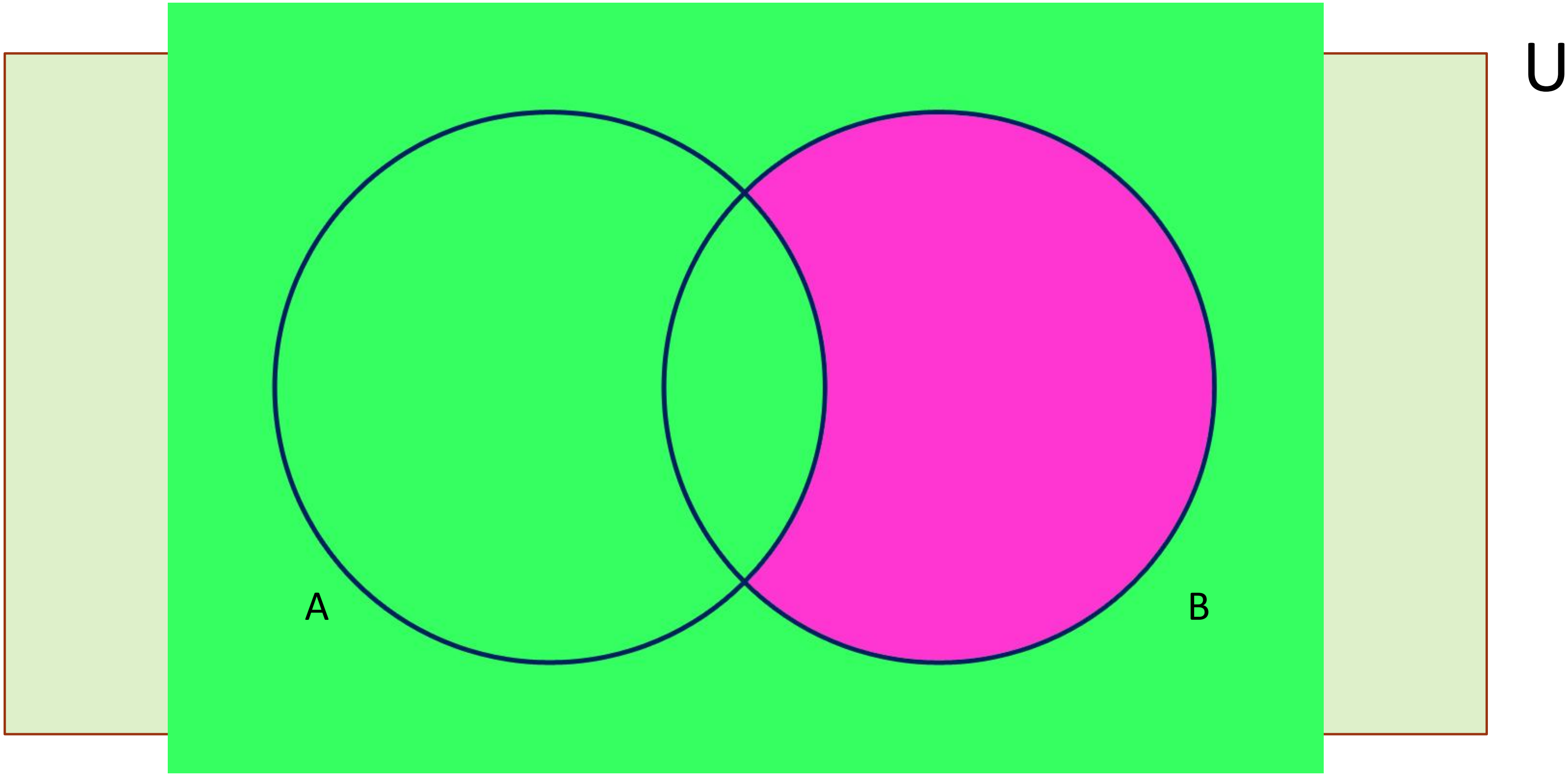
'A'+B



'A'+B

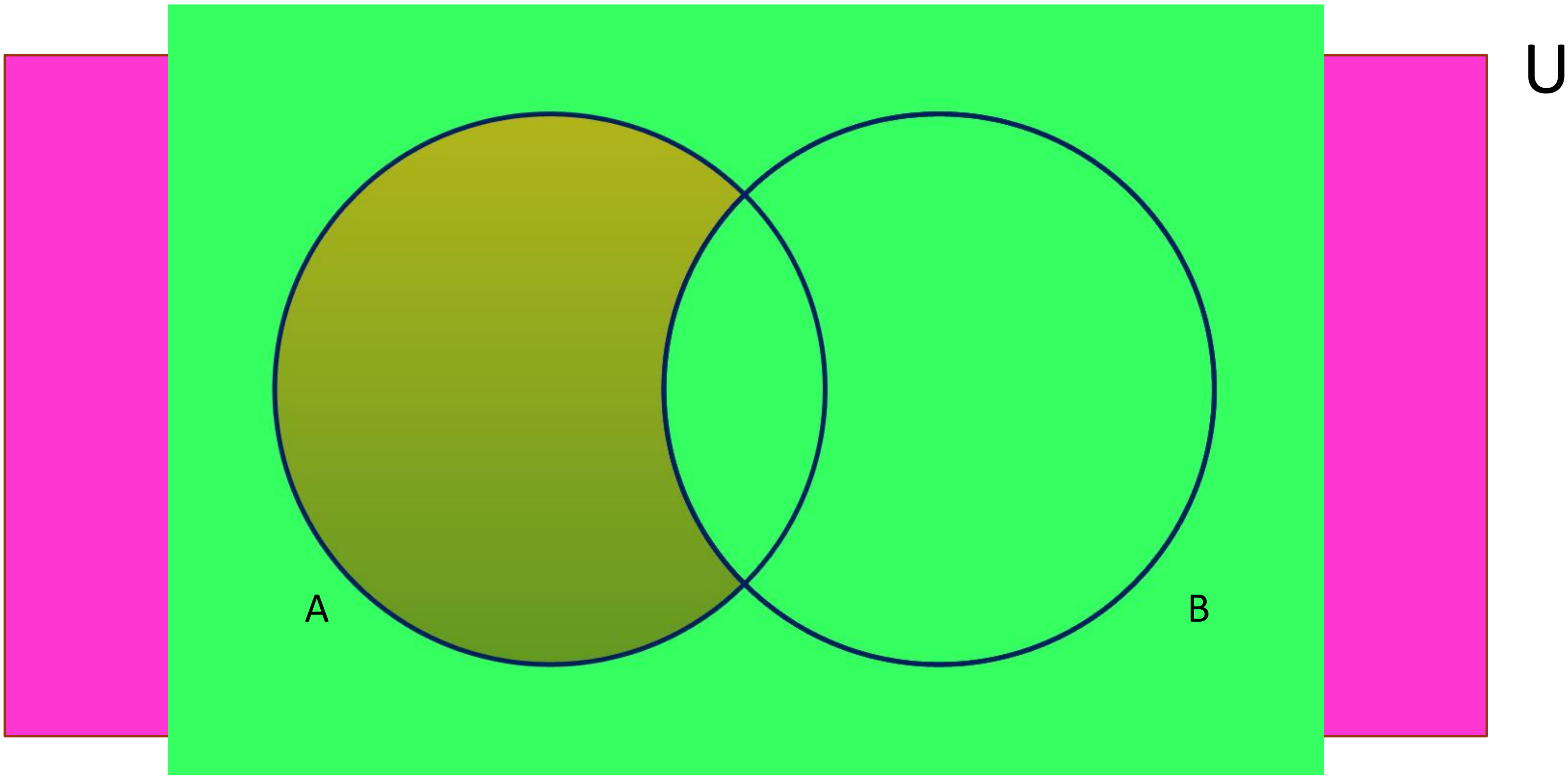


حول شكل فين إلى تعبير بوولي للمنطقة المظللة باللون الزهري



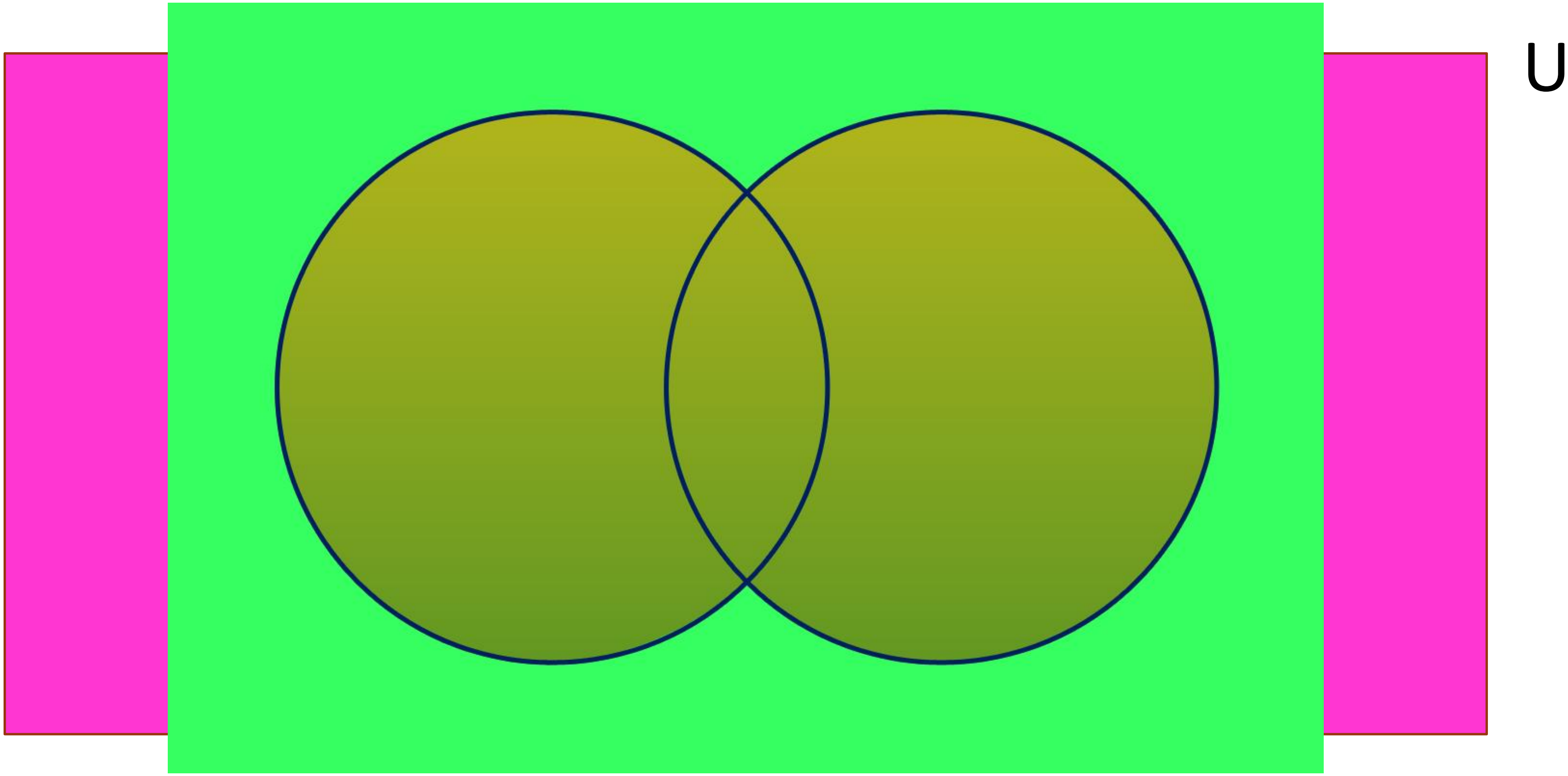
A’B

حول شكل فين إلى تعبير بوولي للمنطقة المظللة باللون الزهري



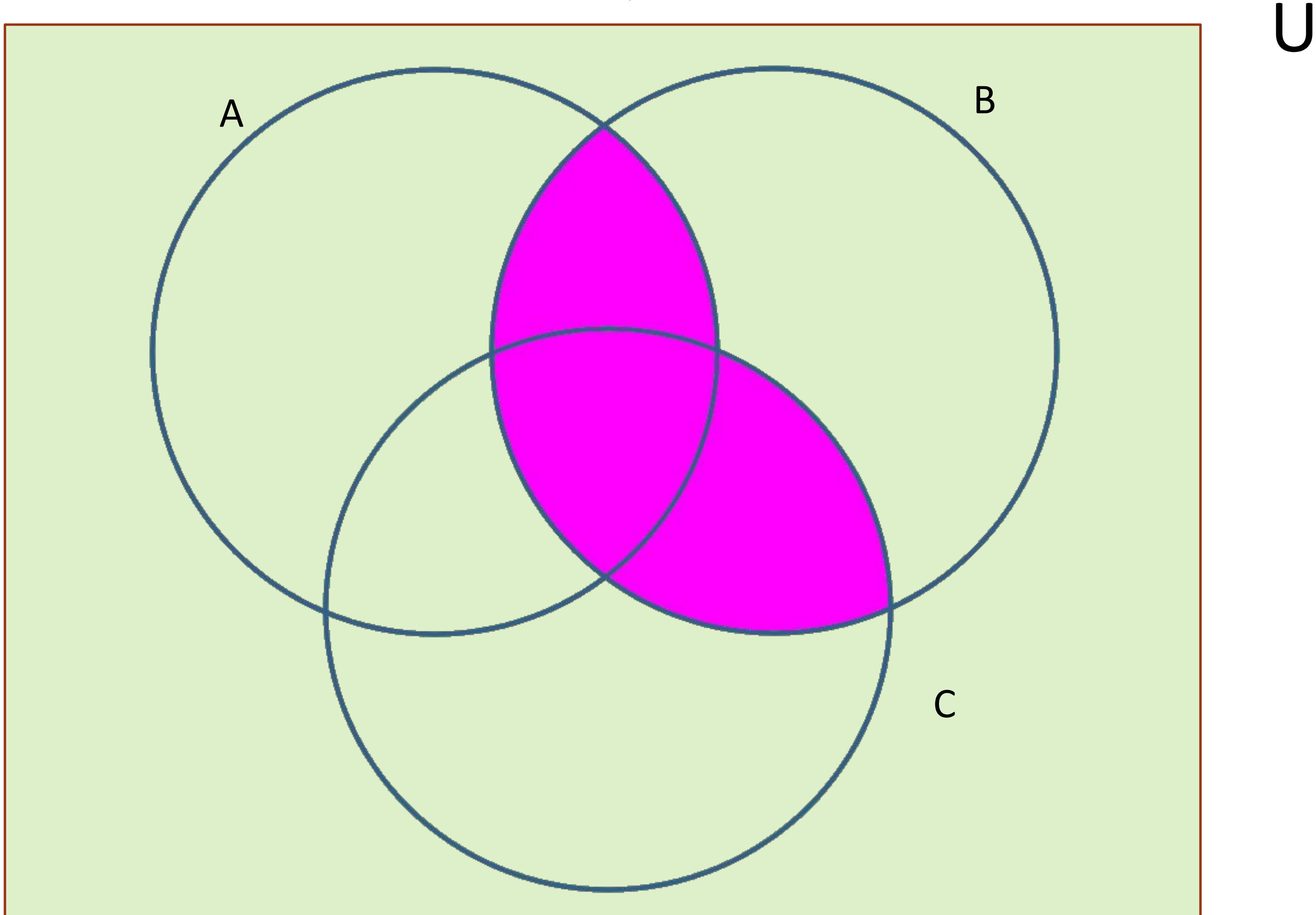
A'+B

حول شكل فين إلى تعبير بوولي للمنطقة المظللة باللون الزهري



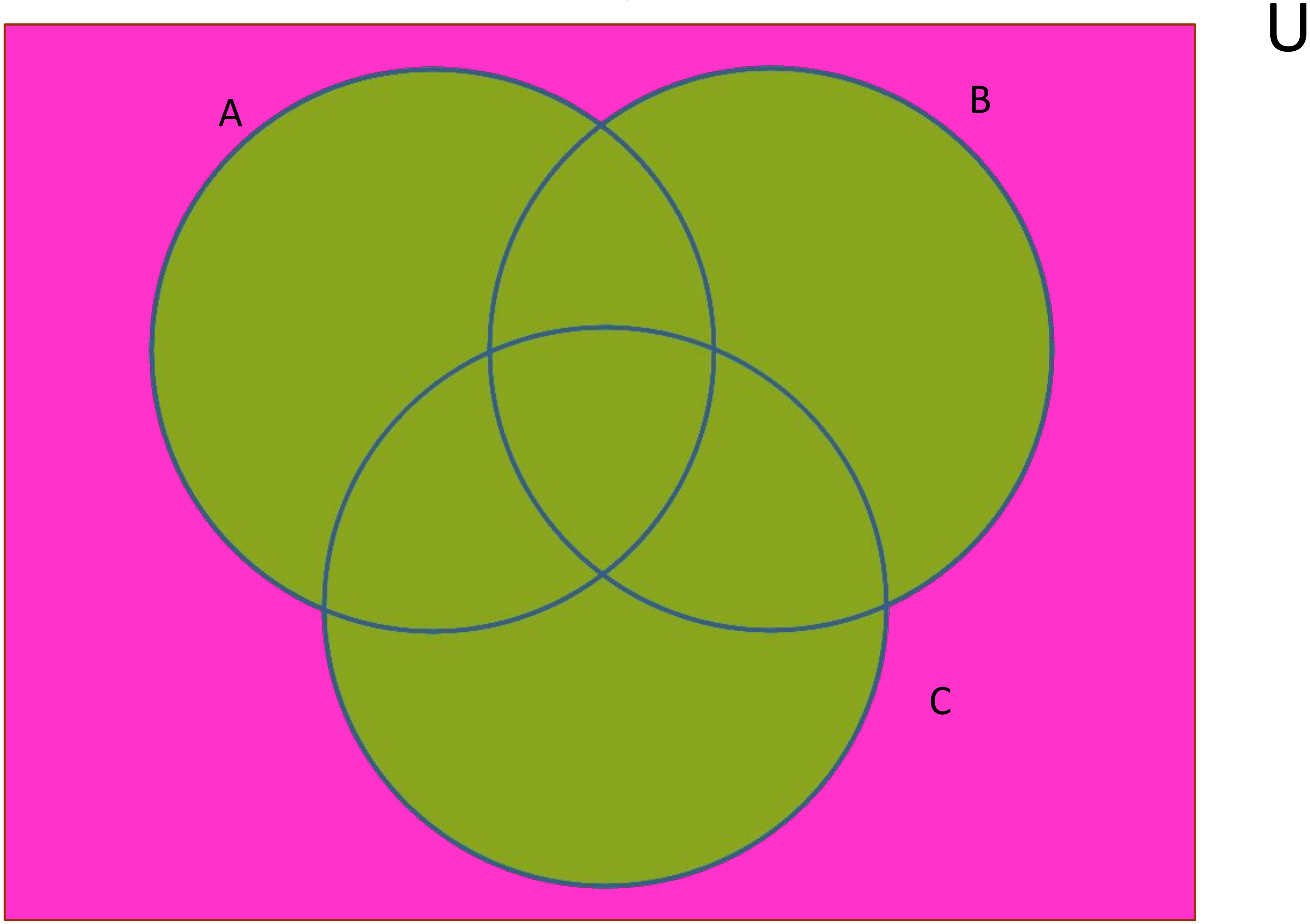
(A+B)'

حول شكل فين إلى تعبير بوولي للمنطقة المظللة باللون الزهري



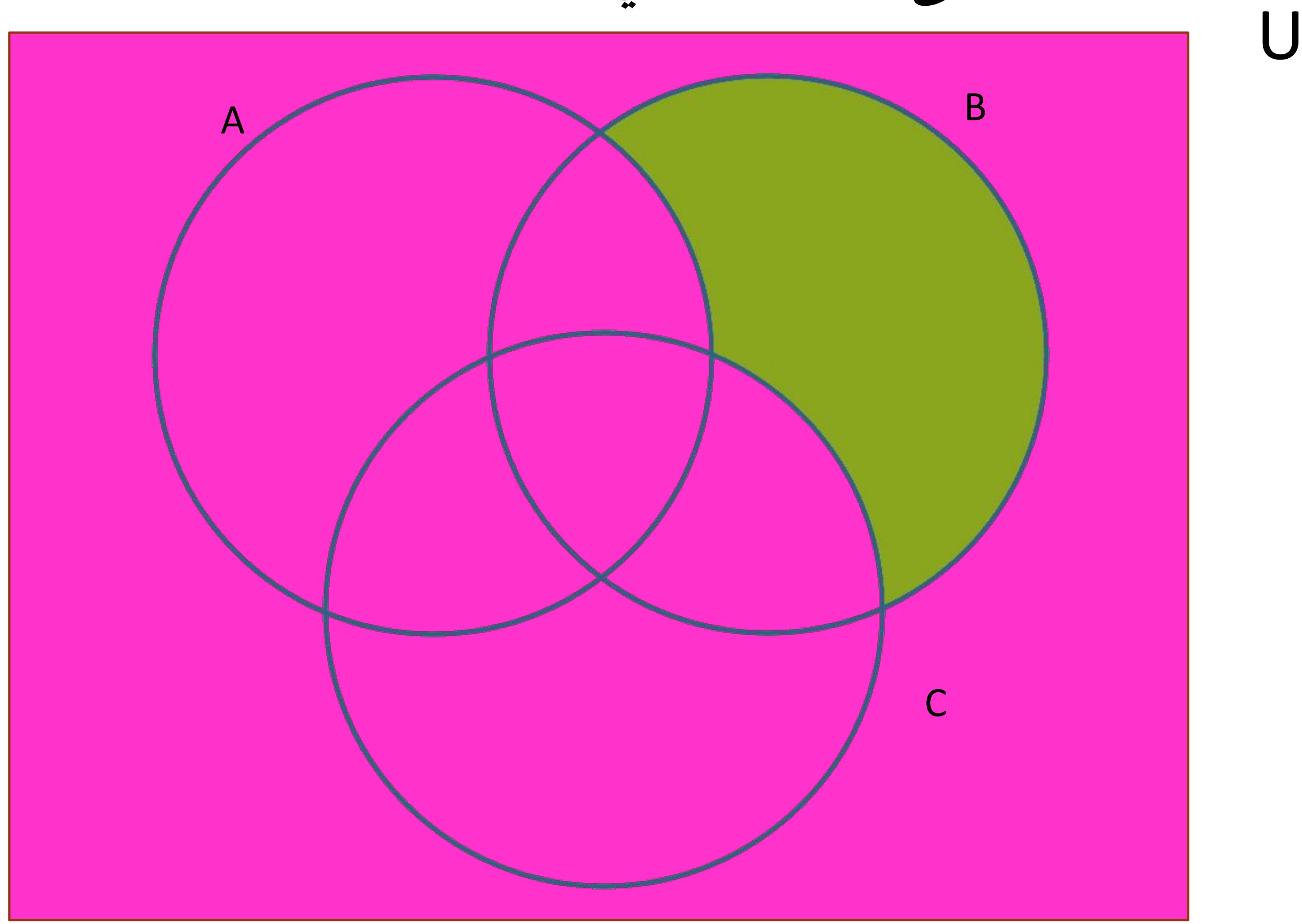
’ABC+A’BC+ABC   B.(A+A’C)

حول شكل فين إلى تعبير بوولي للمنطقة المظللة باللون الزهري



$(A+B+C)'$

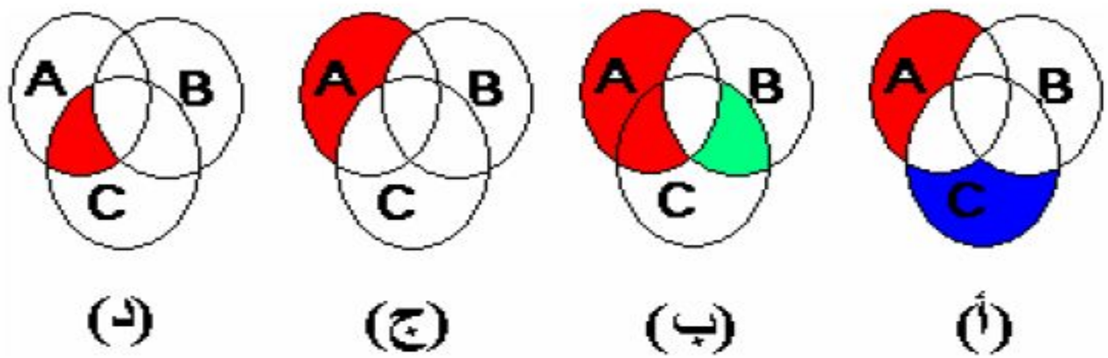
حول شكل فين إلى تعبير بوولي للمنطقة المظللة باللون الزهري



('A+C+B)

مخطط فين

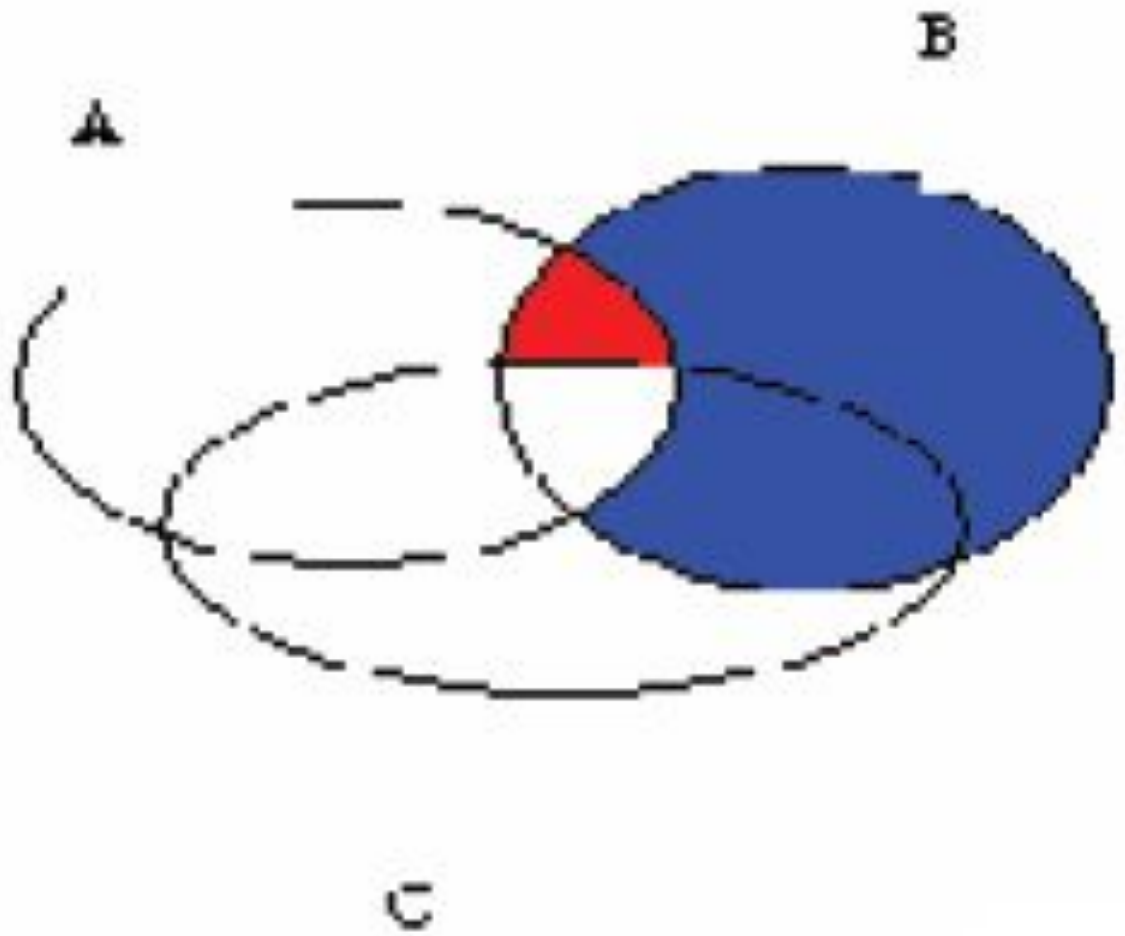
س) مخطط فين الذي يمثل الدالة $F = (A \oplus C)\overline{B}$ هو :



نظرا لناتج جدول الجدارة المقابل نجد أن الشكل الذي يمثل الدالة هو:

الشكل (أ) أي $A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$

F(A,B,C)=A'B+BC'



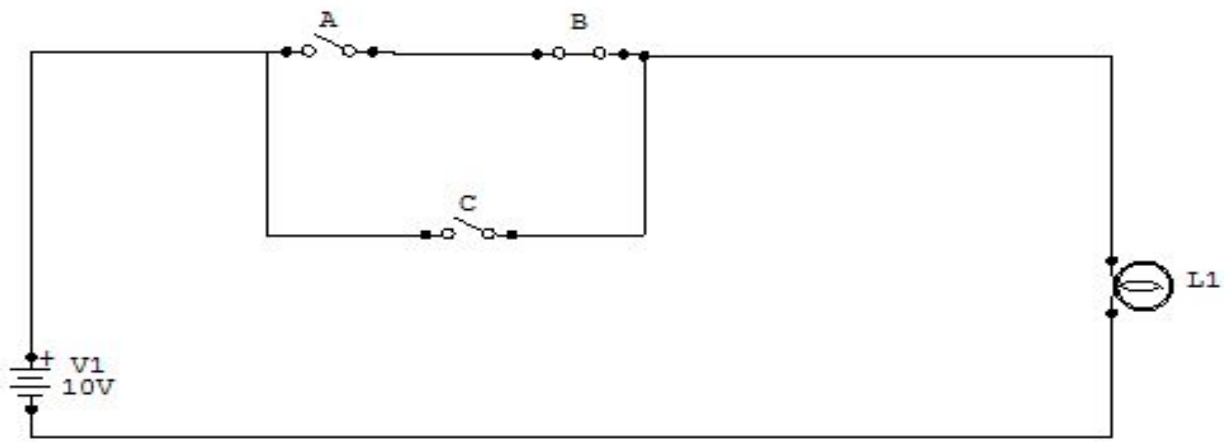
ملخص ما سبق

كيف يمكنك تمثيل الدالة البولية التالية بكافة الطرق أعلاه:

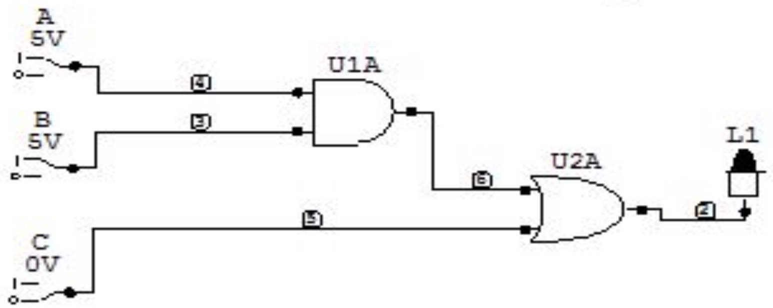
$$F(A,B,C) = AB + C$$

أولاً : الصيغ الغير معيارية

1- دائرة المفاتيح الكهربية



27- دائرة البوابات المنطقية



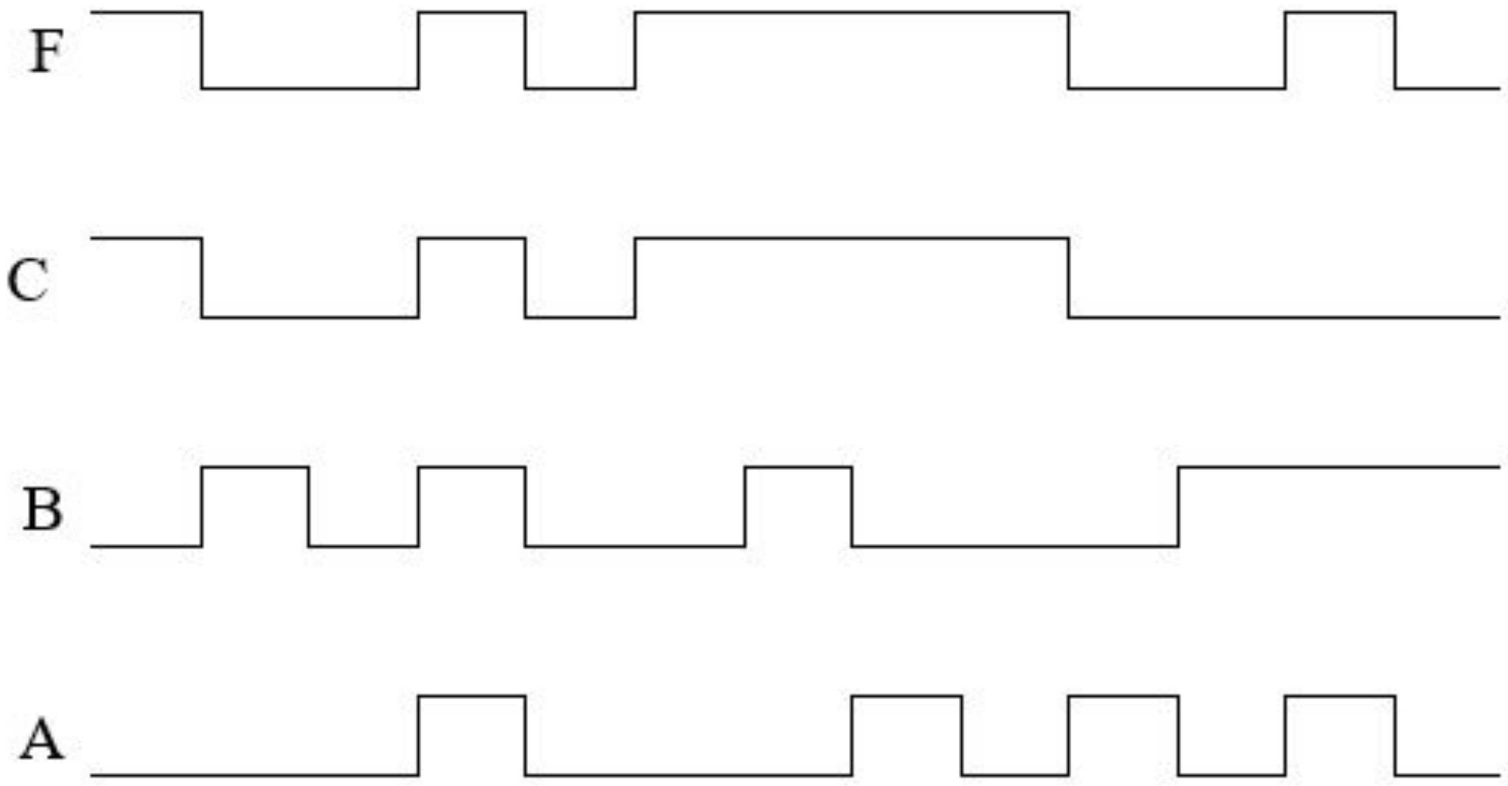
F (A,B,C) = AB + C

3- جدول الجدارة

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

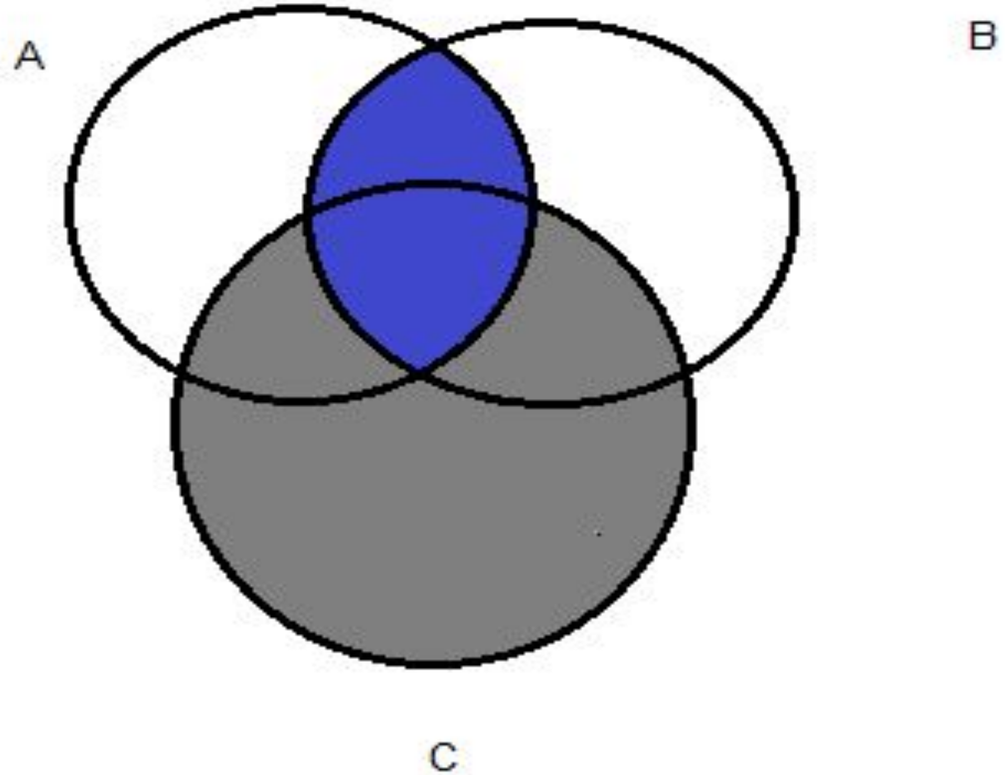
$F(A,B,C) = AB + C$

4- المخطط الزمني :



$F(A,B,C) = AB + C$

5- مخططات فين (VEN DIAGRAM)



6- التعبير اللفظي

تظهر القيمة 1 على المخرج F في حالة كانت:
قيمة C = 1 أو كل من قيم A و B = 1 .

الجبر البوولي

Boolean algebra

2- الجبر البولي

- الجبر البولي، هو الرياضيات الأساسية اللازمة من أجل دراسة تصميم المنطق للأنظمة الرقمية.
- لقد طور جورج بوول (George Boole) الجبر البولي في عام 1874، واستخدمه لحل مسائل في المنطق الرياضي،
- ثم استخدم كلاود شانون (Claude Shannon) الجبر البولي في تصميم شبكات التحويل (Switching networks) في عام 1939.
- ويوجد للجبر البولي تطبيقات أخرى تتضمن نظرية المجموعات (Set theory)، والمنطق الرياضي (Mathematical logic)، وسيكون اهتمامنا في هذا المقرر مقتصراً على تطبيق الجبر البولي في شبكات التحويل.
- وسندرس حالة الجبر البولي الخاصة التي تتخذ جميع المتغيرات فيها إحدى قيمتين، وذلك لأن جميع أجهزة التحويل (Switching devices) التي سنستخدمها هي أجهزة ذات حالتين "مثل الترانزستور مع جهد عال أو منخفض على المخرج".

2- الجبر البوولي

- ويطلق غالباً على هذا الجبر البوولي ذي القيمتين اسم جبر التحويل (Switching algebra).
- سنستعمل متغيراً بوولياً، مثل X أو Y، لتمثيل المدخل أو المخرج لشبكة التحويل. وسوف نفترض أن أي متغير من هذه المتغيرات البوولية يستطيع أن يأخذ فقط إحدى قيمتين مختلفتين.
- وتستعمل الرموز "0" و "1" لتمثيل هاتين القيمتين المختلفتين. فمثلاً، إذا كان X متغيراً بوولياً، فحينئذ إما أن يكون X=0 أو X=1.
- ومع أن الرمزين 0 و 1 المستعملين في هذه الوحدة يشبهان الأعداد الثنائية، إلاّ أنهما ليسا كذلك.
- فلا يوجد لهما قيم عددية، ولكنهما فقط رمزان يمثلان القيمتين للمتغير البوولي أو متغير التحويل (Switching variable). وقد يقابل الرمز 0، على سبيل المثال، الجهد المنخفض ويقابل الرمز 1 الجهد العالي. ويمكن استعمال الرموز F و T تماماً مثل 0 و 1.

الجبر البوولي

- إن التعبير الجبري البوولي يتكون من ثابت بوولي "مثل 1, 0" أو أكثر و/أو متغير بوولي "مثل Z, Y, X" أو أكثر، مستعملة معاً في مجموعة واحدة مع واحد أو أكثر من العاملات الثنائية أو عامل المتممة "إن X+1 ، X+Y.Z أو X.X' ، على سبيل المثال، كلها تعابير جبرية بوولية".

- وبما أن X يعتبر تعبيراً بوولياً فإنه أيضاً يمكن القول إن X' يمثل تعبيراً بوولياً. ويطلق في الجبر البوولي على كل من, X X' اسم حرفي (literal). فكل حدوث لمتغير دون أخذ متممته (uncomplemented) مثل X ، أو لمتغير قد أخذت متممته (complemented) مثل X ' هو حرفي. ونستطيع أيضاً، ومن خلال المسلمات البوولية، أن نرى أن تعبيرين بووليين مثل X.1, X هما تعبيران متكافئان، وكذلك الحال بالنسبة إلى التعبيرين البووليين X. (Y+Z), X.Y + X.Z . ذلك أنه يمكن القول عن تعبيرين أنهما متكافئان إذا كان بالإمكان أن يستبدل أحدهما بالآخر. أي أنه لكي يتحقق تكافؤ بين تعبيرين، فإنه يجب أن يأخذا القيم نفسها الخاصة بجميع مجموعات القيم المحتملة لمتغيراتهما.

- ويمكن معرفة قيم أي تعبير بوولي إذا عرفت قيم المتغيرات الموجودة في التعبير نفسه. إن هرمية العمليات البوولية مهمة في تقويم التعابير البوولية، لأنها تنفذ دائماً عملية "ليس" أولاً، تليها عملية "و"، ثم عملية "أو"، في حالة غياب الأقواس.

1.2 تعريف الجبر البوولي (DEFINITION OF BOOLEAN ALGEBRA)

- يمكن وصف الجبر البوولي، مثل أي نظام جبري آخر، من خلال مجموعة عناصر، ومجموعة معاملات، ومجموعة بديهيات أو مسلّمات.
- تمثل هذه المسلّمات الافتراضات التي تستنتج عن طريقها القوانين والنظريات الأخرى التي تحكم هذا الجبر.
- الجبر البوولي هو نظام جبري مغلق يحتوي على مجموعة من عنصرين أو أكثر، وعمليتين ثنائيتين هما عملية "+" (أي عملية "أو" (OR)) وعملية "." (أي عملية "و" (AND)).
- أي أنه إذا كان **X, Y** أي عنصرين في المجموعة **K**، فإن **X + Y** عنصر ينتمي إلى **K**، وكذلك **X.Y** عنصر ينتمي إلى **K**.
- هذه هي مسلّمة "هانتينقتن" الخاصة بالإغلاق (**the "closure" postulate of Huntington**).

1.2 تعريف الجبر البوولي DEFINITION OF BOOLEAN) (ALGEBRA

الجبر البولياني هو جبر المتغيرات المنطقية، و الهدف الأساسي من دراستنا لنظريات الجبر البولياني هو استخدام تلك النظريات في تبسيط التعبيرات المنطقية.

لكل نظرية (Theorem) من نظريات الجبر البولياني نظرية مقابلة أو مناظرة لها (Dual Theorem). و للحصول على النظرية المقابلة لأي نظرية نقوم بإجراء التبديلات التالية في النظرية الأصلية:

- استبدال أي 0 بـــ 1
- استبدال أي 1 بـــ 0
- استبدال أي عملية AND بعملية OR
- استبدال أي عملية OR بعملية AND

مسلمات الجبر البولي

- مسلمة التبادل
  1. $X+Y=Y+X$
  2. $X.Y=Y.X$
- مسلمة التجميع و الربط
  1. $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$
  2. $X.(Y.Z)=(X.Y).Z$
- مسلمة التوزيع
  1. $X+(Y.Z)=(X+Y).(X+Z)$
  2. $X.(Y+Z)=(X.Y)+(X.Z)$
- مسلمة المتمة
  1. $X+X'=1$
  2. $X.X'=0$

<u>المسلمة الأولى:</u> مسلمة وجود عنصر تطابق هو 0 بالنسبة إلى المعامل "+"، وعنصر تطابق هو 1 بالنسبة إلى المعامل "."، أي أن:

a $X = X + 0$

b $X = X . 1$

<u>المسلمة الثانية:</u> مسلمة تبادلية (Commutativity) للعاملين " + " ، " . "، أي أن:

a $X + Y = Y + X$

b $X . Y = Y . X$

<u>المسلمة الثالثة:</u> مسلمة تجميع وربط (Associativity) للعاملين " + "، " . "، أي أن:

a $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$

b $X . (Y . Z) = (X . Y) . Z$

لم تكن مسلمة الربط أصلاً بين مسلمات "هانتينقتن"، لأنه يمكن استنتاجها من المسلمات الأخرى، ولكنها أدرجت هنا كمسلمة مستقلة بقصد التسهيل.

مسلمات الجبر البوولي (POSTULATES OF BOOLEAN ALGEBRA)

المسلمة الخامسة: مسلمة وجود المتممة (Complement) X' لكل عنصر X في K، لذا فإن:

a $X + X' = 1$

b $X . X' = 0$

بمعنى أنه إذا كانت قيمة X تساوي 1 فإن X' تساوي 0 ، والعكس بالعكس.

سوف يقتصر تعاملنا في هذا المقرر على تطبيق الجبر البوولي على الدوائر المنطقية التي تعالج متغيرات منطقية ذات قيمتين. وسنبرهن الآن أن المجموعة المكونة من عنصرين $K = (0, 1)$ ، مع العاملين "." ، "+" تشكل جبراً بوولياً ذا قيمتين "أو ثنائياً" .

مسلمة الاغلاق: إن نتيجة أي عملية هي دائماً إما 1 أو 0 . ويوجد عنصران 1، 0 حيث أن 1 لا يساوي 0 ($1 \neq 0$) ، لذا فهي تحقق المسلمة الأولى، لأن:

a $0 + 0 = 0 , 1 + 0 = 1$

b $0 . 0 = 0 , 1 . 0 = 0$

أما المسلمة الثانية التي تنص على تبادلية المعاملات، فهي واضحة من خلال التماثل (Symmetry)الذي يمكن مشاهدته في الجدول

جدول (٢ -١١) يبين القواعد الأساسية للجبر البوليني والتي تستخدم في تناول وتبسيط التعبيرات البولينية.

1. $A + 0 = A$ 3. $A \bullet 0 = 0$ 5. $A + A = A$ 7. $A \bullet A = A$ 9. $\overline{\overline{A}} = A$	2. $A + 1 = 1$ 4. $A \bullet 1 = A$ 6. $A + \overline{A} = 1$ 8. $A \bullet \overline{A} = 0$ 10. $A + AB = A$	**13. A+A'B = A+B** **14. (A+B)(A+C)=A+BC**

جدول (٢ -١١) القواعد الأساسية للجبر البوليني.

مسلمات الجبر البوولي (POSTULATES OF BOOLEAN ALGEBRA)

تبادلية العاملان "." ، "+"

العامل "+"			العامل "."		
X	Y	X+Y	X	Y	X.Y
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

أما مسلمة التجميع فرع أ ، فهي محققة في الجدول

جدول جدارة يمثل مسلمة التجميع						
X	Y	Z	Y+Z	X+(Y+Z)	(X+Y)	(X+Y)+Z
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

أما المسلمة الرابعة، الخاصة بالتوزيع، فهي مبرهنة في الجدول

جدول جدارة يِمثل مسلمة التوزيِع فرعa

X	Y	Z	Y.Z	X+(Y.Z)	X+Y	X+Z	(X+Y)(X+Z)
0	0	0					

مسلمات الجبر البوولي

ويبين العمود الخامس من الجدول قيم الطرف الأيسر لمسلمة التوزيع فرع a، ويبين العمود الأخير قيم لطرف الأيمن للمسلمة نفسها، وبما أن قيم هذين الطرفين متطابقة لجميع مجموعات قيم X, Y, Z الممكنة، فإن طرفي المسلمة متساويان، مما يبرهن صحة مسلمة التوزيع فرع a. وبالطريقة نفسها تستطيع، التأكد من صحة فرعb من مسلمة التوزيع.

أما المسلمة الخامسة، التي تنص على وجود المتممة، فيمكن التأكد من صحتها من خلال التعابير التالية:

$$1+1' = 1+0 = 1 \quad , \quad 0+0' = 0+1 = 1$$

$$1 \,.\, 1' = 1 \,.\, 0 = 0 \quad , \quad 0 \,.\, 0' = 0 \,.\, 1 = 0$$

لذا، فإن أي جبر ذي قيمتين ومكونٍ من عنصرين 0 ,1 وعاملين "." ، "+" هو جبر بوولي.

وبالنظر إلى جداول الجدارة لعمليتي (XNOR) والتكافؤ (XOR)، نجد أن بعض المسلمات التي وردت أعلاه تنطبق على هاتين العمليتين مثل:

1. مسلمة تبادلية (Commutativity) العوامل

$$X \oplus Y = Y \oplus X$$

$$Y \equiv X = X \equiv Y$$

2. مسلمة تجميع أو ربط (Associativity) العوامل

$$X \oplus (Y \oplus Z) = (X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus Y \oplus Z$$

$$X \equiv (Y \equiv Z) = (X \equiv Y) \equiv Z = X \equiv Y \equiv Z$$

3. مسلمة التوزيع التالية تنطبق على عملية (XOR)

$$X (Y \oplus Z) = XY \oplus XZ$$

كذلك فإنه من جداول الجدارة لعمليتي(XOR) والتكافؤ (XNOR)، يتبين ما يلي:

1. $X \oplus X = 0$
2. $X \equiv X = 1$
3. $X \oplus 0 = X$
4. $X \equiv X' = 0$
5. $X' \oplus 0 = X'$
6. $X \equiv 0 = X'$
7. $X \oplus 1 = X'$
8. $X \equiv 1 = X$

وسوف نتعرف لاحقاً إن شاء الله، إلى أهمية عمليتي "ليس و" (NAND) و "ليس أو" (NOR)، في بناء الدوائر المنطقية، حيث يمكن استعمال أي من هاتين العمليتين بمفردها في تصميم أي دالة بوولية، وذلك لأنه يمكن الحصول من كل من عمليتي NOR و NAND على العمليات البوولية الثلاث الأساسية. ويطلق على عمليتي NAND و NOR بالعمليات الشاملة (Universal Operations).

2.2.2 الثنائية DUALITY

- يتم الحصول على ثنائية أي تعبير بولي من خلال استبدال كل عملية (أو) بعملية (و) والعكس صحيح ويستبدل الصفر بالواحد والعكس صحيح.
- وينص القانون أي معادلة مقبولة في الجبر البولي ثنائيتها تكون مقبولة كذلك.
- جميع المسلمات السابقة العنصر ب يعتبر ثنائية العنصر أ

$$0 \rightleftarrows 1$$

$$AND \rightleftarrows OR$$

فقط (يتحول النفي لإثبات والإثبات إلى نفي)
مع مراعاة وضع الأقواس في أماكنها الصحيحة وذلك لتحافظ على نفس القيمة

Example :

أعط ثنائية المقدار البولي التالي:

$$[AB'(C + DE')O]$$

اكتبها أولا كالتالي أفضل:

$$[A.B'.(C + D.E')O]$$

ثم حولها:

$$A + B' + C.(D + E') + 1$$

2.2.2 الثنائية DUALITY

يتم الحصول على ثنائية أي تعبير بوولي من خلال استبدال كل عملية "أو" (+) في التعبير بعملية "و" (.) ، وكل عملية "و" بعملية "أو"، واستبدال كل 1 بـ 0 وكل 0 بـ 1 ، مع المحافظة على وجود الأقواس في المواضع الضرورية.

وينص مفهوم الثنائية على أنه إذا كانت معادلة ما مقبولة دائماً في الجبر البوولي، فإن ثنائيتها، أيضاً تكون مقبولة كذلك. بالنظر إلى المسلمات البوولية المذكورة سابقاً، تلاحظ، أن فرع (b) من كل مسلمة هو ثنائية فرع (a) منها.

مثال (2)

أوجد ثنائية التعبير البوولي التالي:

$$[\, AB' (C + DE') \,.\, 0 \,] + AC(CD + B'E + 1)$$

الحل:

يمكن إعادة كتابة التعبير المعطى في المثال كالآتي:

$$[\, A \,.\, B' \,.\, (C + D \,.\, E') \,.\, 0 \,] + A \,.\, C \,.\, (1 + C \,.\, D + B' \,.E)$$

والآن نحصل على ثنائية التعبير من خلال استبدال "+" بـ "."، "." بـ"+"، 0 بـ 1 ، 1 بـ 0 :

$$(A+B'+C(D+E')+1)(A+C+(C+D)(B'+E).0))$$

الثنائية DUALITY

4- أوجد ثنائية التعبير البولي التالي:

WX(Y`Z+YZ`)+W`X`(Y`+Z)(Y+Z`)

الثنائية(Duality): يتم الحصول على ثنائية أي تعبير بوولي من خلال استبدال كل عملية "أو" (+) في التعبير بعملية "و" (.)، واستبدال كل 0 بـ 1 ، وكل 1 بـ 0، مع المحافظة على وجود الأقواس في المواضيع الضرورية.

W	.	X	.	(	Y`	.	Z	+	Y	.	Z`	)	+	W`	.	X`	.	(	Y`	+	Z	)	.	(	Y	+	Z`	)						
W	+	X	+	(	Y`	+	Z	.	Y	+	Z`	)	.	W`	+	X`	+	(	Y`	.	Z	)	+	(	Y	.	Z`	)						الثنائية

- **Example:** $F = (A + C') \cdot B + 0$

  الثنائية $F = (A \cdot C' + B) \cdot 1 = A \cdot C' + B$

- **Example:** $G = X \cdot Y + \overline{(W + Z)}$

  الثنائية $G = \overline{(W+Z)} \cdot (X+Y) = (\overline{W} \cdot \overline{Z}) \cdot (X+Y)$

- **Example:** $H = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$

  الثنائية$H = (A+B) \cdot (A+C) \cdot (B+C)$

قانون المتممة

- المتممة: إذا وزعت على مقدار بُوولي فالناتج يكون كالآتي:

$$AND \rightleftarrows OR$$

إثبات $\rightleftarrows$ نفي

$$0 \rightleftarrows 1$$

$Example:$

أوجد متممة F ، حيث $F=(x'y'+z).(x.y)$ ؟

الحل : $F'=(x+y).(z'+x'+y')$

عندما تحول لـ • افتح قوس مباشرة.

قانون متممة المتممة

- $(X')'=X$
- متممة المتم هو نفسه
- جميع القوانين السابقة تستخدم لتبسيط التعابير البولية.

النظريات والقوانين الأساسية للجبر البوولي

(Theorems and Laws of Boolean Algebra Basic)

سنقدم هنا مجموعة من النظريات والقوانين مع براهينها. ويمكنك الاستفادة، من هذه النظريات والقوانين بالإضافة إلى المسلمات الخمس التي وردت سابقاً في معالجة الدوال البوولية. ويمكنك أيضاً تطبيق هذه النظريات والقوانين في تبسيط الدوال البوولية.

نظرية التطابق (Idem potency)

a	$X + X = X$
b	$X \cdot X = X$

تنص هذه النظرية على أنه إذا وجد في التعبير البوولي حدان متطابقان "متشابهان"، فيمكننا حذف أحدهما. ويمكن برهنة نظرية التطابق اعتماداً على بعض المسلمات التي وردت سابقاً.

البرهان:

$X + X = X + X$	
$= X \cdot 1 + X \cdot 1$	باستعمال المسلمة الأولى فرع b
$= X \cdot (1+1)$	باستعمال المسلمة الرابعة فرع b
$= X.1$	باستعمال مفهوم عملية "أو"
$= X$	باستعمال المسلمة الأولى فرع b

البرهان: (الفرع b من نظرية التطابق)

$X . X = X . X$	
$= X . X + 0$	باستعمال المسلمة الأولى فرع a
$= X . X + X . X'$	باستعمال المسلمة الخامسة فرع b
$= X . (X + X')$	باستعمال المسلمة الرابعة فرع b
$= X . 1$	باستعمال المسلمة الخامسة فرع a
$= X$	باستعمال المسلمة الأولى فرع a

نظرية التعامل مع 0 و 1 (Properties of 1 and 0)

a $\quad X + 1 = 1$

b $\quad X . 0 = 0$

تنص هذه النظرية على أنه إذا نفذت عملية "أو" على أي حد مع 1، فإن النتيجة ستكون دائماً 1، وإذا نفذت عملية "و" على أي حد مع 0 ، فإن النتيجة ستكون دائماً 0 .

البرهان: (نظرية التعامل مع 0 و 1 (Properties of 1 and 0))

$X + 1 = X + 1$	
$= (X + 1) . 1$	باستعمال المسلمة الأولى فرع b
$= 1 . (X + 1)$	باستعمال المسلمة الثانية فرع b
$= (X + X') (X + 1)$	باستعمال المسلمة الخامسة فرع a
$= X + X' . 1$	باستعمال المسلمة الرابعة فرع a
$= X + X'$	باستعمال المسلمة الأولى فرع b
$= 1$	باستعمال المسلمة الخامسة فرع a

البرهان: (فرع b)

$X . 0 = X . 0$	
$= X . (X . X')$	باستعمال المسلمة الخامسة فرع b
$= (X . X) . X'$	باستعمال المسلمة الثانية فرع b
$= X . X'$	باستعمال نظرية التطابق فرع b
$= 0$	باستعمال المسلمة الخامسة فرع b

نظرية الاندماج- 1 (Absorption)

a	$X + XY = X$
b	$X . (X + Y) = X$

تنص هذه النظرية على أنه إذا نفذت عملية "أو" على متغير معزول (X) مع حد يحتوي على X "يمثل هذا الحد مضروباً مثل XY"، فإنه يتم حذف المضروب. وكذلك الحال إذا نفذت عملية "و" على متغير معزول (X) مع حد يحتوي على X "يمثل هذا الحد مجموعاً مثل X + Y"، فإنه يتم حذف المجموع.

البرهان:

$X + XY = X + XY$	
$= X.1 + XY$	باستعمال المسلمة الأولى فرع b
$= X. (X + Y)$	باستعمال المسلمة الرابعة فرع b
$= X. (1 + Y)$	باستعمال المسلمة الرابعة فرع b
$= X . 1$	باستعمال نظرية التعامل مع 0 و 1 فرع a
$= X$	باستعمال المسلمة الأولى فرع b

البرهان: (فرع b من نظرية الاندماج- 1 (Absorption))

$X. (X + Y) = X. (X + Y)$	
$= X.X + X.Y$	باستعمال المسلمة الرابعة فرع b
$= X + XY$	باستعمال نظرية التطابق فرع b
$= X.1 + XY$	باستعمال المسلمة الأولى فرع b
$= X. (1 + Y)$	باستعمال المسلمة الرابعة فرع b
$= X. 1$	باستعمال نظرية التعامل مع 0 و 1 فرع a
$= X$	باستعمال المسلمة الأولى فرع b

نظرية الاندماج- 2 (Absorption)

a	$X + X'Y = X + Y$
b	$X . (X' + Y) = X.Y$

تنص هذه النظرية على أنه إذا نفذت عملية "أو" على متغير معزول (X) مع حدٍ آخر "يمثل هذا الحد مضروباً " يحتوي متممة المتغير (X')، فإنه يتم حذف هذه المتممة. وكذلك إذا نفذت عملية "و" على متغير معزول (X) مع حدٍ آخر "يمثل هذا الحد مجموعاً " يحتوي على متممة المتغير (X')، فإنه يتم أيضاً حذف هذه المتممة.

البرهان:

$X + X'Y = X + X'Y$	
$= (X + X') . (X + Y)$	باستعمال المسلمة الرابعة فرع a
$= (X + Y) . (X + X')$	باستعمال المسلمة الثانية فرع b
$= (X + Y) . 1$	باستعمال المسلمة الخامسة فرع a
$= X + Y$	باستعمال المسلمة الأولى فرع b

البرهان: (فرع b من نظرية الاندماج- 2 (Absorption))

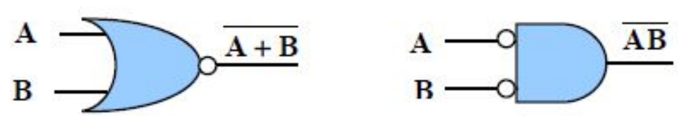
$X . (X' + Y) = X . (X' + Y)$	
$= X.X' + X.Y$	باستعمال المسلمة الرابعة فرع b
$= 0 + X . Y$	باستعمال المسلمة الخامسة فرع b
$= X . Y + 0$	باستعمال المسلمة الثانية فرع a
$= X . Y$	باستعمال المسلمة الأولى فرع a

٢ -٣ نظريات ديمورجان Demorgan's Theorems

نظريات ديمورجان تعتبر جزءً هاماً من الجبر البوليني، فهذه النظريات تستخدم لتحويل التعبيرات الجبرية من وضعية AND الأساسية إلى وضعية OR وبالعكس. كما تسمح لنا بحذف العلامات الفوقية (bars) من المتغيرات المتعددة، ويمكن كتابة نظريتا ديمورجان لمتغيرين على الشكل التالي:

نظرية ديمورجان الأولى: $\overline{A+B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$

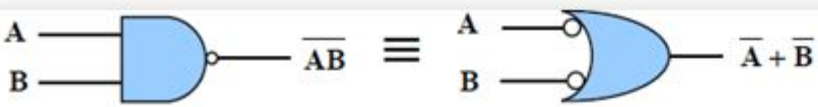
نظرية ديمورجان الثانية: $\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$



شكل (٣ -١) التغير من وضعية OR إلى وضعية AND.

المدخلات		الخرج	
A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A} \bullet \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

جدول (٣ -١) اثبات نظرية ديمورجان الأولى.



شكل (٣ -٢) التغير من وضعية AND إلى وضعية OR.

المدخلات		الخرج	
A	B	$\overline{A \bullet B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

جدول (٣ -٢) اثبات نظرية ديمورجان الثانية.

قانون ديمورجان (DeMorgan's Law)

a	$(X + Y)' = X' . Y'$
b	$(X . Y)' = X' + Y'$

ينص قانون ديمورجان على أن متممة المجموع تساوي مضروب المتممات، وأن متممة المضروب تساوي مجموع المتممات.

البرهان:

نفترض أن $P = X + Y$ وأن $Q = X' . Y'$

لو أثبتنا أن $P.Q = 0$ وأن $P + Q = 1$ ، فبعد ذلك، ووفقاً للمسلمة الخامسة، نكون قد أثبتنا أن P هي متممة Q ، وبذلك نكون قد برهنا صحة قانون ديمورجان.

نبدأ أولاً بالبرهنة على أن $P.Q = 0$:

$P.Q = (X + Y) . (X'Y')$	باستعمال المسلمة الثانية فرع b
$= (X'Y') . (X + Y)$	باستعمال المسلمة الرابعة فرع b
$= (XX')Y' + X'(YY')$	باستعمال المسلمة الثانية فرع b
$= 0 . Y' + X' . 0$	باستعمال المسلمة الخامسة فرع b
$= 0 + 0$	باستعمال نظرية التعامل مع 0 و 1 فرع b
$= 0$	باستعمال المسلمة الأولى فرع a

والآن سنعمل على برهنة أن $P + Q = 1$:

$P + Q = (X + Y) + X'Y'$	
$= (Y + X) + X'Y'$	باستعمال المسلمة الثانية فرع a
$= Y + (X + X'Y')$	باستعمال المسلمة الثالثة فرع a
$= Y + (X + Y')$	باستعمال نظرية الاندماج - 2 فرع b
$= Y + Y' + X$	باستعمال المسلمة الثانية فرع a
$= (Y + Y') + X$	باستعمال المسلمة الثالثة فرع a
$= 1 + X$	
$=1$	

وبذلك نكون قد أثبتنا أن $P=Q'$، الأمر الذي يؤكد صحة فرع (a) من قانون ديمورجان. وبالطريقة نفسها يمكنك، إثبات صحة فرع (b) من قانون ديمورجان، وذلك لو افترضت أن $P = X.Y$ وأن $Q= X' + Y'$ فيمكنك برهنة أن P هي متممة Q.

ويمكن تعميم قانون ديمورجان لغاية (n) متغير، فمثلاً قانون ديمورجان لثلاثة متغيرات هو:

$$(X + Y + Z)' = (X + Y)' . Z' = X' . Y' . Z'$$

وعليه فإن قانون ديمورجان لـ (n) متغير هو:

a $\quad (X_1+X_2+X_3+...+X_{n-1}+X_n)' = X'_1 . X'_2 . X'_3 . \; .... \; . X'_{n-1} . X'_n$

b $\quad (X_1 . X_2 . X_3 . \; .... \; . X_{n-1} . X_n)' = X'_1 + X'_2 + X'_3 + ... + X'_{n-1} + X'_n$

كما انه يمكن الحصول على متممة تعبير بوولي بواسطة استبدال كل متغير بمتممته، واستبدال 0 ، 1 كل منهما بالآخر، ثم استبدال عملية "أو" وعملية "و" كل منهما بالأخرى. وعليه فيمكننا كتابة قانون المتممة العام كالآتي:

قانون المتممة (Complement Law)

$$F(X_1 ,X_2 ,X_3 , .. , X_n , ..., + , 1 , 0)' = F(X'_1 ,X'_2 ,X'_3 , ... ,X'_n, +, ... ,0 ,1$$

مثال (٣ -١): طبق نظريات ديمورجان على التعبير البوليني التالي:

$$Y = \overline{(A + \overline{B} + \overline{C}) \bullet (\overline{A} + B + \overline{C})}$$

الحل:

$$\begin{aligned}
Y &= \overline{(A + \overline{B} + \overline{C}) \bullet (\overline{A} + B + \overline{C})} \\
&= \overline{(A + \overline{B} + \overline{C})} + \overline{(\overline{A} + B + \overline{C})} \\
&= \overline{A}\,\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}} + \overline{\overline{A}}\,\overline{B}\,\overline{\overline{C}} = \overline{A}\,B\,C + A\,\overline{B}\,C
\end{aligned}$$

مثال (٣ -٢): طبق نظريات ديمورجان على التعبير البوليني التالي:

$$Y = \overline{(\overline{A} + B) + CD}$$

الحل:

$$\begin{aligned}
Y &= \overline{(\overline{A} + B) + CD} \\
&= \overline{(\overline{A} + B)}.\overline{CD} \\
&= (\overline{\overline{A}}.\overline{B})(\overline{C} + \overline{D}) \\
&= A\overline{B}(\overline{C} + \overline{D})
\end{aligned}$$

نظرية الحد الزائد (الفائض) (Consensus Theorem)

a	$XY + X'Z + YZ$	$= XY + X'Z$
b	$(X + Y)(X' + Z)(Y + Z)$	$= (X + Y)(X' + Z)$

تنص هذه النظرية على أنه إذا وجد متغير في حد ما "الحد قد يكون مضروباً أو مجموعاً " من تعبير بوولي، ووجدت متممة هذا المتغير في حد آخر، فإن مضروب "أو مجموع" المتغيرات "الألفاظ" الأخرى المتبقية من هذين الحدين يمثل حداً زائداً يمكن حذفه من التعبير البوولي، أو إضافته إليه حسب الحاجة.

ويلاحظ من الصيغة الجبرية للنظرية أنه في فرع (a) تم تشكيل الحد الزائد (YZ) من خلال تنفيذ عملية "و" على المتغيرين الموجودين مع المتغير X ومتممة 'X في الحدين (X'Z, XY). وفي فرع (b) من النظرية تم تشكيل الحد الزائد (Y + Z) من خلال تنفيذ عملية "أو" على المتغيرين الموجودين مع X أو 'X في الحدين (X + Y) , (X' + Z).

البرهان: يمكن برهنة صحة الفرع (a) من نظرية الحد الزائد على النحو التالي:

$XY + X'Z + YZ = XY + X'Z + YZ$	
$= XY + X'Z + 1.YZ$	باستعمال المسلمة الأولى فرع b
$= XY + X'Z + (X + X')\,YZ$	باستعمال المسلمة الخامسة فرع a
$= XY + X'Z + XYZ + X'YZ$	باستعمال المسلمة الرابعة فرع b
$= (XY + XYZ) + (X'Z + X'YZ$	باستعمال المسلمة الثانية فرع a
$= XY + X'Z$	نظرية الاندماج – 1 فرع a

البرهان: كما يمكن برهنة صحة الفرع (b) من نظرية الحد الزائد على النحو التالي:

$$
\begin{aligned}
(X + Y)(X' + Z)(Y + Z) &= (X + Y)(X' + Z)(Y + Z) \\
&= (X + Y)(X' + Z)(0 + Y + Z) \\
&= (X + Y)(X' + Z)(X.X' + Y + Z) \\
&= (X + Y)(X' + Z)(X + Y + Z)(X' + Y + Z) \\
&= (X + Y)(X + Y + Z)(X' + Z)(X' + Y + Z) \\
&= (X + Y)(X' + Z)
\end{aligned}
$$

قانون متممة المتممة (Involution Law)

$$(X')' = X$$

لو افترضنا أن $X = 0$ ، فإن $X' = 1$ و $(X')' = 1' = 0$. وكذلك لو كانــت $X = 1$ ، فـــإن $X' = 0$ و $(X')' = 0' = 1$.

إن مجمل النظريات، والقوانين، والمسلمات التي وردت سابقاً، تلزم في معالجة التعابير البوولية وتبسيطها، الموضوع الذي سوف يتم معالجته لاحقاً إن شاء الله.

وعموماً يمكن إثبات صحة أي نظرية باستخدام جداول الصواب. الجدول التالي يوضح النظريات الأساسية المستخدمة في الجبر البولياني

اسم النظرية	النظرية	النظرية المقابلة
عكس العكس	$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{\overline{A}} = A$
العمليات مع 1 و 0	$A + 1 = 1$ $A + 0 = A$	$A \cdot 0 = 0$ $A \cdot 1 = A$
المتغير مع نفسه	$A + A = A$	$A \cdot A = A$
المتغير مع عكسه	$A + \overline{A} = 1$	$A \cdot \overline{A} = 0$
النظرية الإبدالية	$A + B = B + A$	$A \cdot B = B \cdot A$
النظرية التجميعية	$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
النظرية التوزيعية	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$
الامتصاص أو الابتلاع	$A + A \cdot B = A$ $A + \overline{A} \cdot B = A + B$	$A \cdot (A + B) = A$ $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$
دي مورغان (De Morgan)	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

تبسيط التعابير البولية باستخدام الجبر البولي

٢ -١٥ تبسيط التعبيرات البولينية باستخدام الجبر البوليني

Simplification of Boolean Expressions Using Boolean algebra

تستخدم قواعد الجبر البوليني والتي سبق شرحها لتبسيط الدوال المنطقية (التعبيرات البولينية) وذلك لتمثيلها بأقل عدد من البوابات المنطقية، وكذلك بأقل عدد من المدخلات، ولذلك فإنه عند تمثيل هذه الدوال المنطقية عمليا، يجب أولا أن نضعها في أبسط صورة ممكنة لاقتصاديات التصميم، والمثال التالي يوضح كيفية إجراء عملية التبسيط.

مثال (٢ -٥): باستخدام قواعد الجبر البوليني بسط الدالة المنطقية الآتية:

$$Y = AB + A(A + C) + B(A + C)$$

الحل: الخطوة الأولى في عملية التبسيط هي فك الأقواس الموجودة بالدالة فنحصل على:

$$Y = AB + AA + AC + AB + BC$$

نعوض عن قيمة الحد AA بالمتغير A (راجع القاعدة رقم 7 من قواعد الجبر البوليني) فتصبح الدالة:

$$Y = AB + A + AC + AB + BC$$

وبتطبيق القاعدة رقم 5 حيث $A + A = A$، فإن $AB + AB = AB$، وتصبح الدالة:

$$Y = AB + A + AC + BC$$

وبأخذ المتغير A عامل مشترك بين الحد الأول والثاني والثالث فنحصل على:

$$Y = A(B + 1 + C) + BC$$

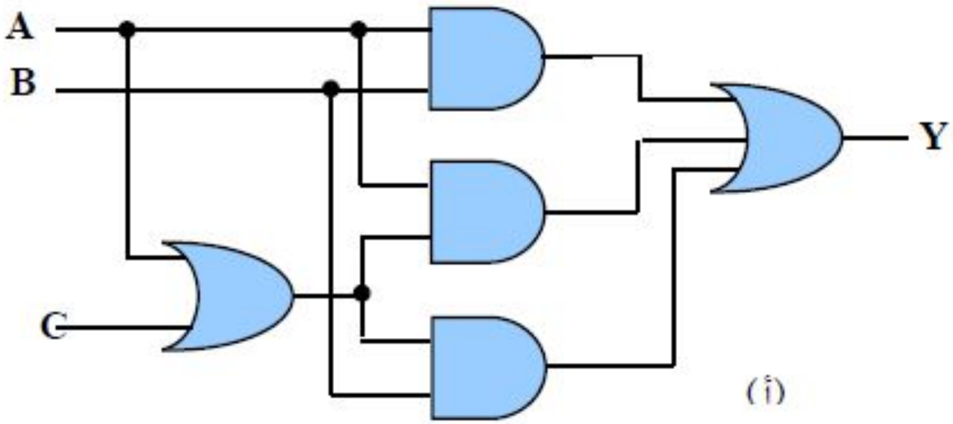
وبتطبيق القاعدة رقم 2 حيث $A + 1 = 1$، نجد أن:

$$Y = A \bullet 1 + BC$$

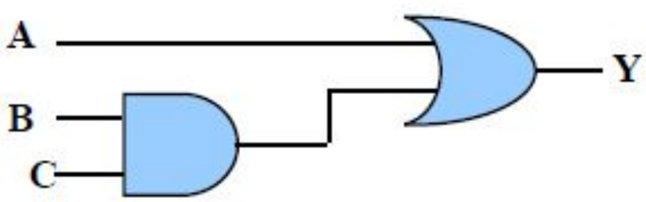
وأخيرا بتطبيق القاعدة رقم 4 حيث $A \bullet 1 = A$، نحصل على:

$$Y = A + BC$$

شكل (٢ -٢٣) يوضح كيف أمكن تمثيل الدالة بعد تبسيطها بأقل عدد ممكن من البوابات حيث أمكن تمثيلها باستخدام بوابتين فقط (الشكل(ب))، بينما أحتاج تمثيل الدالة الأصلية قبل التبسيط إلى خمس بوابات (الشكل(أ)).



(أ)



(ب)

شكل (٢ -٢٣) تمثيل الدالة المنطقية لمثال (٢ -٥) قبل وبعد تبسيطها.

ضع التعبير البوليني الآتي في أبسط صورة

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$

ثم ارسم الدائرة المنطقية للتعبير قبل وبعد التبسيط.

الحل: بأخذ الحدين الأول والثاني مع بعضهما ، وكذلك الحدين الثالث والرابع، نحصل على:

$$Y = (\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C) + (\overline{A}BC + ABC)$$

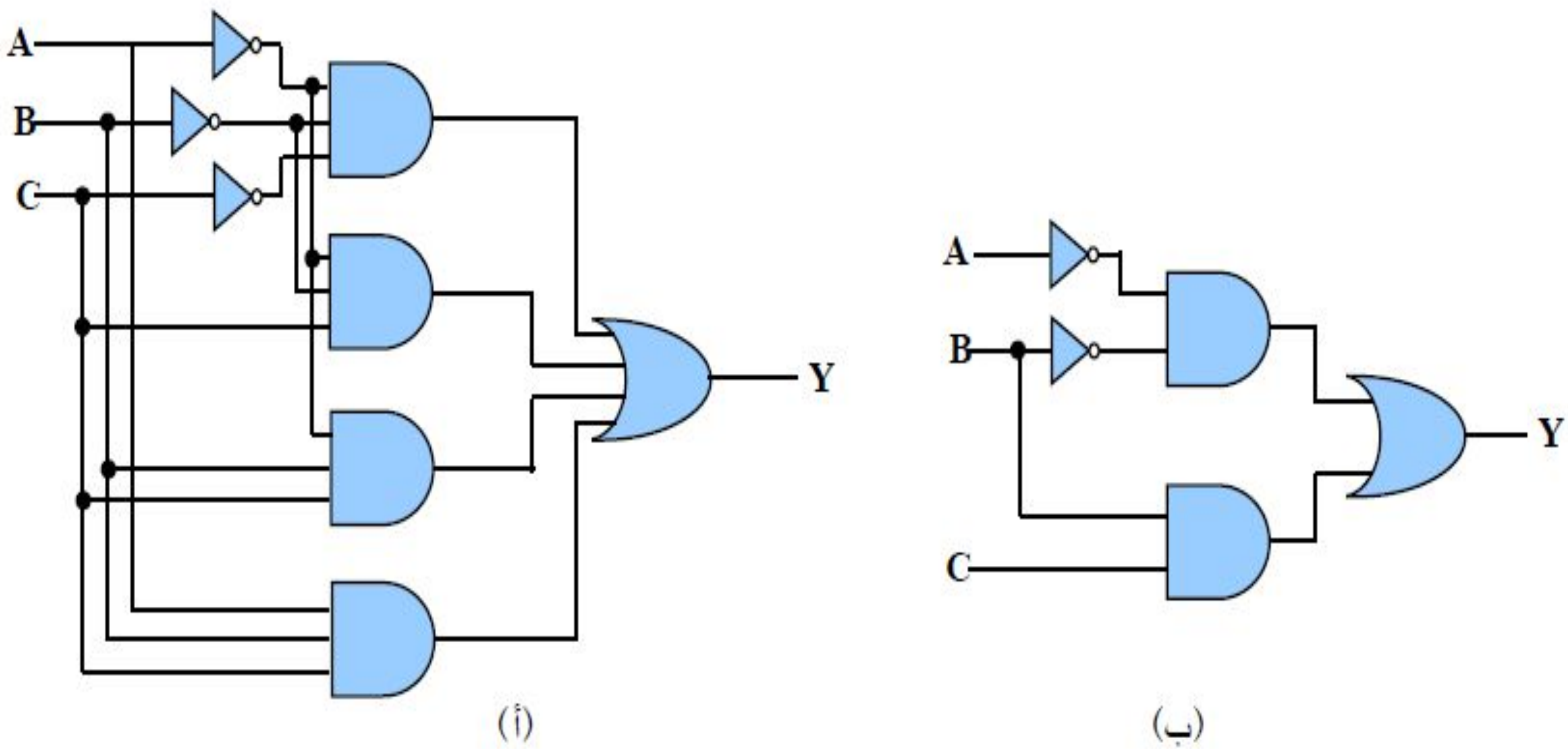
$$= \overline{A}\,\overline{B}(\overline{C} + C) + BC(\overline{A} + A)$$

وبتطبيق القاعدة رقم 6 نحصل على:

$$Y = \overline{A}\,\overline{B} \bullet 1 + BC \bullet 1$$

ثم بتطبيق القاعدة رقم 4 نحصل على الصورة النهائية للتعبير البوليني وهي: $Y = \overline{A}\,\overline{B} + BC$

شكل (٢ -٢٤) يوضح تمثيل التعبير البوليني بالبوابات قبل وبعد عملية التبسيط.



شكل (٢ -٢٤) تمثيل الدالة المنطقية لمثال (٢ -٦) قبل وبعد تبسيطها.

بسط التعبير المنطقي لأبسط صورة»

$AB+A(B+C)+B(B+C)$

1. $AB + AB + AC + BB + BC$
   - $BB=B$
2. $AB + AB + AC + B + BC$
   - $AB+AB=AB$
3. $AB+AC+B+BC$
4. $AB+AC+B(1+C)$
   - $1+C=C$
5. $AB+AC+B.1$
   - $B.1=B$
6. $AB+AC+B$
7. $AB+B+AC$
8. $B(A+1)+AC$
9. $B+AC$

بسط التعبير المنطقي لأبسط صورة»
C['AB'(C+BD)+A'B]

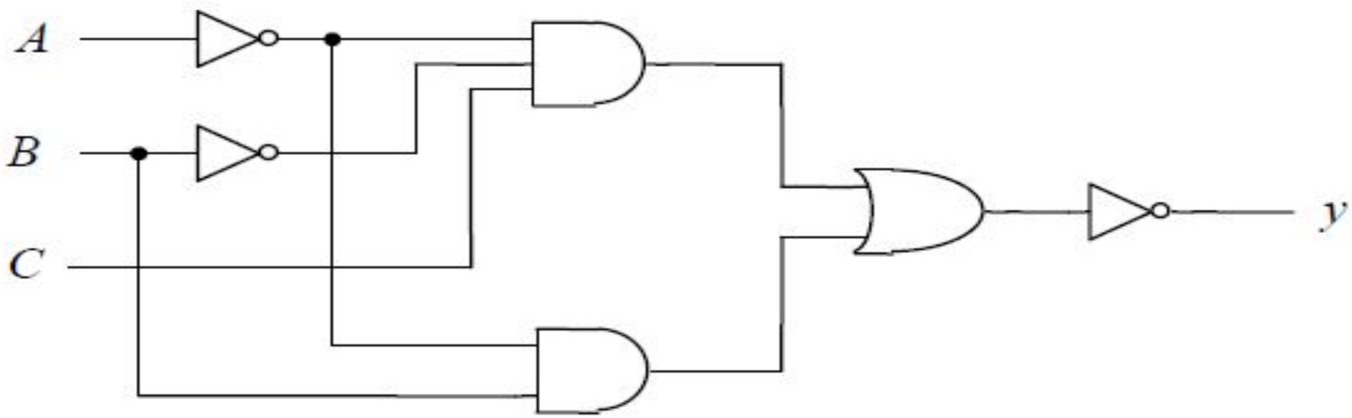
1. (AB'C+AB'BD+A'B').C
   - B'B=0
2. (AB'C+A.0.D+A'B').C
3. (AB'C+ 0 +A'B').C
4. (AB'C+A'B').C
5. AB'CC+A'B'C
   - CC=C
6. AB'C+A'B'C
7. B'C(A+A')
8. B'C.1
9. B'C

مثال:

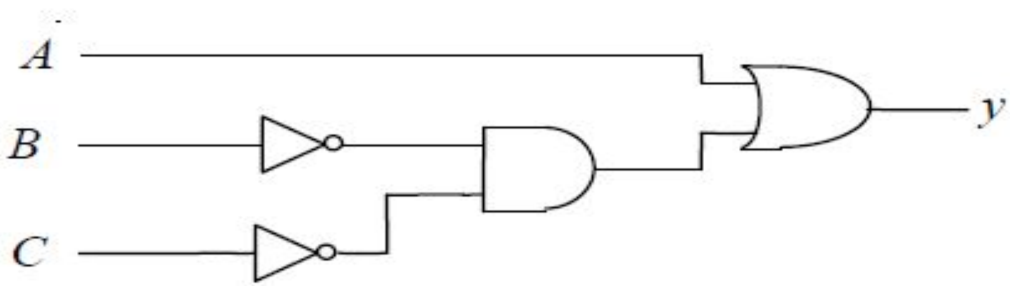
استخدم نظريات الجبر البولياني فى تبسيط التعبير المنطقي

ثم ارسم الدائرة المنطقية قبل التبسيط و بعده. $y = \overline{\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B}$

الدائرة قبل التبسيط:



الدائرة بعد التبسيط:



لاحظ أن الدائرة قبل التبسيط مكونة من 6 بوابات، و بعد التبسيط أصبحت مكونة من 4 بوابات فقط.

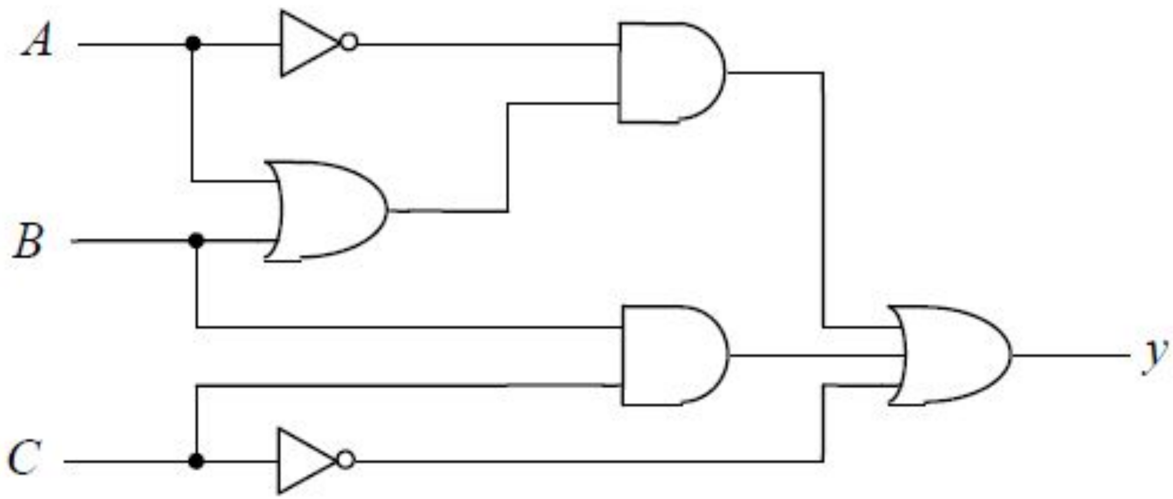
مثال:

استخدم نظريات الجبر البولياني فى تبسيط التعبير المنطقي

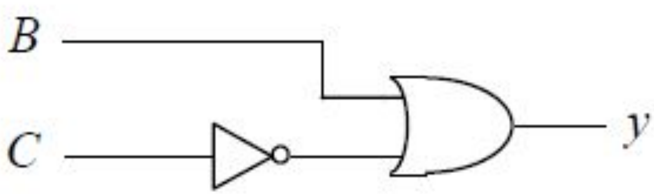
ثم ارسم الدائرة المنطقية قبل التبسيط و بعده. $y = \overline{A}(A + B) + \overline{C} + CB$

الحل:

الدائرة قبل التبسيط



الدائرة بعد التبسيط



مثال:

استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبير المنطقي

$$y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$

الحل:

$$y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$

بعد إيجاد التشابهات ما بين الحدود نقوم بجمع كل حدين متشابهين في حد واحد هو عبارة عن العامل المشترك ما بين الحدين، أما المتغير المختلف فيتم اختصاره.

$$y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$

$$y = \overline{A}\,\overline{B}(\overline{C} + C) + BC(\overline{A} + A)$$ بإخراج العامل المشترك في كل حدين متشابهين

$$y = \overline{A}\,\overline{B}(1) + BC(1)$$ بجمع المتغير مع عكسه

$$y = \overline{A}\,\overline{B} + BC$$ بالعمليات مع 1

لاحظ في المثال السابق وجود تشابه إضافي بين الحدود، حيث أن الحد الثاني $\overline{A}\,\overline{B}C$ يشبه الحد الثالث $\overline{A}BC$، و لكن لم نكن في حاجة لاستخدام هذا التشابه في عملية التبسيط.

مثال:

استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبير المنطقي

$$y=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C$$

الحل:

التعبير هنا في صورة مجموع الحدود الصغرى، لذلك نبحث عن التشابهات ما بين الحدود.

الحد الأول يشبه الحد الثاني، و الحد الرابع يشبه الحد الخامس، و الحد الثالث يشبه الحد الأول.

$$y=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C$$

نلاحظ هنا وجود مشكلة تتمثل في أن الحد الأول يتشابه في نفس الوقت مع كل من الحدين الثاني و الثالث. في مثل هذه الحالات نقوم بتكرار الحد الأول (مستخدمين نظرية المتغير مع نفسه) بحيث يتم جمعه مع كلا الحدين الثاني و الثالث.

$$y=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C$$

$$y=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C$$ بتكرار الحد الأول

$$y=\bar{A}\bar{B}+\bar{A}\bar{C}+A\bar{B}$$ بجمع كل حدين متشابهين

$$y=\bar{A}\bar{B}+A\bar{B}+\bar{A}\bar{C}$$ بالنظرية الإبدالية

$$y=\bar{B}+\bar{A}\bar{C}$$ بجمع الحدين المتشابهين

مثال:

استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبير المنطقي

$$y = \overline{\bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C}}$$

الحل:

نلاحظ أن ما أسفل خط العكس المنطقي الخارجي هو عبارة عن تعبير في صورة مجموع الحدود الصغرى، لذلك نبحث عن التشابهات ما بين الحدود.

$$y = \overline{\bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C}}$$

$$y = \overline{\bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C}}$$

$$y = \overline{B\bar{C} + A\bar{B}}$$ بجمع كل حدين متشابهين

$$y = \overline{(B\bar{C})} \cdot \overline{(A\bar{B})}$$ بنظرية دي مورغان

$$y = (\bar{B} + C) \cdot (\bar{A} + B)$$ بنظرية دي مورغان

مثال:

استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبير المنطقي

$$y = \overline{\overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC}$$

الحل:

نلاحظ أن ما أسفل خط العكس المنطقي الخارجي هو عبارة عن تعبير في صورة مجموع الحدود الصغرى، لذلك نبحث عن التشابهات ما بين الحدود.

$$y = \overline{\overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC}$$

$$y = \overline{\overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC}$$

$$y = \overline{\overline{A}BC + ABC + AB\overline{C} + ABC}$$ بتكرار الحد الثالث

$$y = \overline{BC + AB}$$ بجمع كل حدين متشابهين

$$y = \overline{B(C + A)}$$ بأخذ العامل المشترك

$$y = \overline{B} + \overline{(C + A)}$$ بنظرية دي مورغان

$$y = \overline{B} + \overline{CA}$$ بنظرية دي مورغان

تدريب 5:

استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط كل من التعبيرات المنطقية التالية

-1 $A = x + xyz + \bar{x}yz + xw + x\bar{w} + \bar{x}y$

-2 $B = (x + \bar{y} + xy)(x + \bar{y})\bar{x}y$

-3 $C = (x + \bar{y} + x\bar{y})(xy + \bar{x}z + yz)$

-1 $A = x + y$

-2 $B = 0$

-3 $C = xy + \bar{x}\bar{y}z$

3ـ الصيغ المعيارية للدوال البوولية
(Standard Forms of Boolean Algebra)

الحد الأصغر (minterm) هو عبارة عن حد تظهر فيه جميع متغيرات الدخل مربوطة مع بعضها البعض بعمليات AND، و قد يظهر متغير معين في الحد الأصغر معكوساً أو بدون عكس. يوجد عدد من الحدود الصغرى يساوي عدد احتمالات الدخل، أي عدد أسطر جدول الصواب، بحيث يكون هناك حد أصغر مقابل كل سطر من أسطر جدول الصواب. لإيجاد الحد الأصغر المقابل لسطر معين من أسطر جدول الصواب ننظر إلى قيم متغيرات الدخل في ذلك السطر، فإذا كانت قيمة المتغير هي 0 يظهر ذلك المتغير في الحد الأصغر معكوساً، أما إذا كانت قيمة المتغير هي 1 يظهر ذلك المتغير في الحد الأصغر بدون عكس. كما هو موضح في الجدول التالي، الذي يوضح جميع الحدود الصغرى لثلاثة متغيرات دخل A و B و C.

A	B	C	Minterm
0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}C$
0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	$\overline{A}BC$
1	0	0	$A\overline{B}\,\overline{C}$
1	0	1	$A\overline{B}C$
1	1	0	$AB\overline{C}$
1	1	1	ABC

مثال:

اكتب التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج x و y في جدول الصواب التالي في صورة مجموع الحدود الصغرى.

A	B	C	x	y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

الحل:

$$x = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$

$$y = \overline{A}\,\overline{BC} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{BC} + A\overline{B}C$$

لتسهيل كتابة التعبيرات المنطقية في صورة مجموع الحدود الصغرى يتم ترقيم أسطر جدول الصواب (ابتداءاً بالقيمة 0)، و استخدام الرمز m_k للحد الأصغر المقابل للسطر k من جدول الصواب. كما هو موضح بالجدول التالي

#	A	B	C	Minterm	
0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_0
1	0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}C$	m_1
2	0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2
3	0	1	1	$\overline{A}BC$	m_3
4	1	0	0	$A\overline{B}\,\overline{C}$	m_4
5	1	0	1	$A\overline{B}C$	m_5
6	1	1	0	$AB\overline{C}$	m_6
7	1	1	1	ABC	m_7

و عليه يمكن كتابة التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج x و y في المثال السابق بصورة مختصرة، باستخدام رموز الحدود الصغرى، كالتالي

$$x = m_0 + m_1 + m_3 + m_7$$

$$y = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5$$

كما يمكن تسهيل كتابة التعبير أكثر من ذلك باستخدام رمز المجموع $\sum$ ، و ذلك كالتالي

$$x = \sum m\,(0,1,3,7)$$
$$y = \sum m\,(0,1,2,4,5)$$

أي أن التعبير المنطقي في صورة مجموع الحدود الصغرى يمكن أن يكتب كاملاً، أو مختصراً باستخدام رموز الحدود الصغرى، أو مختصراً باستخدام رمز المجموع $\sum$ و أرقام الحدود الصغرى (أي أرقام أسطر جدول الصواب الحاوية على القيمة 1 للمتغير الذي يتم كتابة التعبير له). و بناء عليه فإنه في المثال السابق

$$\begin{aligned} x &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC \\ &= m_0 + m_1 + m_3 + m_7 \\ &= \sum m\,(0,1,3,7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C \\ &= m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 \\ &= \sum m\,(0,1,2,4,5) \end{aligned}$$

لاحظ هنا أهمية مراعاة استخدام الحرف m الصغير (small letter) للرمز للحدود الصغرى (minterms)، حتى لا يحدث خلط بينها و بين الحدود الكبرى (Maxterms)، حيث أننا سنستخدم الحرف M الكبير (capital letter) للرمز للحدود الكبرى.

الصيغ المعيارية للدوال البوولية

(Standard Forms of Boolean Algebra)

لقد بينا أن الدالة البوولية يمكن تمثيلها بعدة طرق مثل جداول الجدارة، ومخططات فين، والدوائر المنطقية، بالإضافة إلى استعمال التعابير البوولية الجبرية. ولقد عرضنا في كيفية تمثيل الدوال البوولية باستعمال كل من: جداول الجدارة، ومخططات فين، والدوائر المنطقية. وسنعرض هنا الصيغ الجبرية المعيارية لتمثيل الدوال البوولية. توجد صيغتان معياريتان هما: صيغة مجاميع الضرب، وصيغة ضرب المجاميع.

1.3 صيغة مجاميع الضرب "مجموع المضروبات" (Sum-of-Products Form)

1.1.3 المضروبات المعيارية (Standard Products)

المتغير البوولي قد يظهر في صورته العادية (X) أو في صورة المتممة له ('X). ولو افترضنا أن هناك متغيرين بوليين Y, X متحدين مع بعضهما بعضاً بواسطة عملية "و". فستوجد هناك أربع مجموعات ممكنة، لأن كل متغير منهما قد يظهر في إحدى صورتيه: 'XY, XY', X'Y, X'Y . يطلق على كل من هذه الحدود الأربعة "مينتيرم" (minterm) أو "مضروب معياري" (standard product). وبطريقة مشابهة يمكن توحيد (n) متغير لتشكيل (2^n) مضروباً معيارياً (أو 2^n "مينتيرمز"). ويمكن تحديد المضروبات المعيارية المختلفة (2^n) بطريقة مشابهة لما هو موضح في الجدول.

1.1.3 المضروبات المعيارية (STANDARD PRODUCTS)

يتم سرد الأعداد الثنائية من 0 لغاية $(2^n - 1)$ في أعمدة المتغيرات البالغ عددها (n). بعد ذلك يتم الحصول على كل مضروب معياري ("مينتيرم") من خلال عدد ثنائي، وذلك بتجميع المتغيرات (n) المناظرة لهذا العدد الثنائي مع بعضها بواسطة عملية "و"، مع ملاحظة أن كل متغير منها يظهر في صورته العادية إذا كانت قيمة الوحدة الثنائية (bit) المناظرة له في العدد الثنائي 1، ويظهر في صورة المتممة له إذا كانت قيمة هذه الوحدة 0. ويرمز لكل "مينتيرم" - بالرمز m_i، حيث i هو العدد العشري المكافئ للعدد الثنائي المناظر لهذا "المينتيرم". يوضح الجدول المضروبات المعيارية ("مينتيرمز") لثلاثة متغيرات (n = 3)

X	Y	Z	المضروبات المعيارية	" المنتيرمز "

1.1.3 المضروبات المعيارية

F1 الدالة	Z	Y	X
0	0	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
1	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	1
0	0	1	1
0	1	1	1

- يمكن التعبير عن الدالة البوولية جبرياً من جدول الجدارة بواسطة تشكيل مضروب معياري ("مينتيرم") لكل مجموعة من المتغيرات التي تولد 1 في الدالة، وبعد ذلك ربط هذه الحدود مع بعضها بواسطة عملية "أو". وسنوضح ذلك من خلال المثال التالي، لنفرض جدول الجدارة التالي لدالة من ثلاثة متغيرات:

- **يلاحظ من جدول الجدارة المبين أعلاه أن قيمة الدالة F1 تكون 1 في حالة مجموعات المتغيرات التالية: 101, 100, 011, 001. ويمكن التعبير عن هذه الحالات باستعمال الحدود "المضروبات المعيارية" التالية: XY'Z, XY'Z', X'YZ, X'Y'Z.**

المضروبات المعيارية

وبما أن كل حد من هذه الحدود تنتج عنه القيمة 1 للدالة F1 لذا يمكن التعبير عن الدالة F1 على النحو التالي:

$$F1 = X'Y'Z + X'YZ + XY'Z' + XY'Z = m1 + m3 + m4 + m5$$

ويتضح من هذا المثال فرضية مهمة في الجبر البوولي هي: أنه يمكن التعبير عن أي دالة بوولية في صيغة جمع الـ "مينتيرمز" (Sum-of-minterms) (تعني كلمة جمع هنا جمع الحدود مع بعضها بواسطة عملية "أو").

لاحظ، أنه يمكن الحصول على (2^n) مضروباً معيارياً ("مينتيرم") لكل (n) متغير بوولي، وأن أي دالة بوولية يمكن التعبير عنها في صيغة مجموع المضروبات المعيارية أو جمع الـ "مينتيرم". وأن المضروبات المعيارية التي مجموعها يعرف الدالة البوولية هي تلك المضروبات التي تعطي القيمة 1 للدالة في جدول الجدارة. وبما أن الدالة إما أن تكون 1 أو 0 لكل مضروب معياري "مينتيرم"، ولأنه يوجد (2^n) مضروباً معيارياً، فيمكن القول بأن الدوال الممكن تشكيلها من (n) متغير هي (2^{2^n}).

تحويل الدوال البوولية إلى صيغة جمع "المينتيرمز"

(Conversion of Boolean Functions to the Sum-of-minterms Form)

من الملائم أحياناً التعبير عن الدالة في صيغة جمع "المينتيرمز". ويمكن تحويل الدالة إلى صيغة جمع الـ "مينتيرمز" إذا كانت موجودة في صيغة أخرى على النحو التالي: تحول الدالة أولاً إلى صيغة مجموع المضروبات (يقصد هنا "بالمضروب" أي حد مكون من عدد من المتغيرات متحدة مع بعضها بواسطة عملية "و")، بعد ذلك يجب فحص ما إذا كان بعض هذه الحدود لا يحتوي على جميع المتغيرات الموجودة في الدالة. وإذا كان حد ما ينقصه متغير أو أكثر، فيتم توحيده مع تعبير (مثل 'X+X) بواسطة عملية "و" حيث يمثل X أحد المتغيرات الناقصة. ويوضح المثال التالي هذه الخطوات، لو فرضنا طلب التعبير عن الدالة البوولية التالية في صيغة جمع "المينتيرمز": $F(A, B, C, D) = A'B + B'CD + AB'CD$

الحل:

تحتوي الدالة - على أربع متغيرات A, B, C, D . وينقص الحد الأول (A'B) متغيران هما C, D ، وينقص الحد الثاني (B'CD) متغير واحد هو A، وأما الحد الثالث فلا ينقصه أي متغير. ولذا يتوجب إضافة المتغيرات الناقصة إلى كل من الحدين الأول والثاني باستعمال المسلمة الخامسة فرع (a).

نعمل أولاً على إضافة المتغيرات الناقصة إلى الحد الأول. ولإضافة المتغير C إلى الحد الأول ننفذ الخطوة التالية:

$A'B = A'B(C + C') = A'BC + A'BC'$

لكن ما زال هناك متغير ناقص هو D. ومن أجل إضافة D ننفذ الخطوة التالية:

$$A'B = A'BC\,(D + D') + A'BC'\,(D + D')$$
$$= A'BCD + A'BCD' + A'BC'D + A'BC'D'$$

ونعمل على إضافة المتغير A إلى الحد الثاني من خلال الخطوة التالية:

$$B'CD = (A + A')\,B'CD = AB'CD + A'B'CD$$

ويمكن كتابة الدالة F على النحو التالي:

$$F(A, B, C, D) = A'B + B'CD + ABCD$$

$=A'BCD$	$+A'BCD'$	$+A'BC'D$	$+A'BC'D'$	$+AB'CD$	$+A'B'CD$	$+AB'CD$
0 1 1 1	0 1 1 0	0 1 0 1	0 1 0 0	1 0 1 1	0 0 1 1	1 0 1 1

وبالتدقيق في الدالة نلاحظ أن الحد AB'CD قد ظهر مرتين، ويمكن حذف أحدهما اعتماداً على قانون التطابق (X + X = X). لذا يمكن إعادة كتابة الدالة على النحو التالي مع مراعاة الترتيب التصاعدي لأرقام "المينتيرم". ويتم معرفة أرقام "المينتيرمز" من خلال وضع 0 مكان المتغير إذا كان ظاهراً في صورة المتممة له، ووضع 1 مكان المتغير إذا كان في صورته العادية (انظر الدالة أعلاه).

$$F(A, B, C, D) = A'B'CD + A'BC'D' + A'BC'D + A'BCD' + A'BCD + AB'CD$$
$$= m3 + m4 + m5 + m6 + m7 + m11$$

ملاحظة: من المفروض الانتباه، إلى المحافظة على ترتيب المتغيرات في كل حد، وذلك من أجل الحصول على أرقام "المينتيرمز" الصحيحة. فمثلاً لو كتب الحد الأول في الدالة (A'B'CD) أي يمثل m3 مع تبديل مواقع المتغيرات C, A لأصبح (CB'A'D) الذي يمثل m9 ، مما يؤدي إلى الحصول على صيغة خاطئة للدالة.
ومن الملائم أحياناً التعبير عن الدالة البوولية، عندما تكون في صيغة جمع "المينتيرمز" بالصورة القصيرة التالية:

$$\boxed{(F (A, B, C, D) = \sum m(3, 4, 5, 6, 7, 11}$$

حيث يمثل الرمز $\sum$ جمع الحدود مع بعضها بواسطة عملية "أو"، ويمثل حرف m الصغير كلمة "مينتيرم"، أما الأرقام التي تتبعه بين القوسين فتمثل أرقام "المينتيرمز" للدالة. وتمثل الحروف الموجودة داخل الأقواس بعد الرمز F متغيرات الدالة بالترتيب الذي تم أخذه عند تحويل "المينتيرم" إلى مضروب معياري.

2.3- تمثيل الدوال البوولية في صيغة مجموع المضروبات

- **1.2.3 المجاميع المعيارية**
- بالإضافة إلى صيغة مجموع المضروبات المعيارية (أو صيغة جمع "المينتيرمز")، يمكن التعبير عن الدالة البوولية بواسطة صيغة مجموع المضروبات. وقد تحتوي الحدود المكونة للدالة، في هذه الصيغة، على متغير (لفظ) واحد أو أكثر، (بالطبع فإن عدد المتغيرات في الحد الواحد لا يمكن أن يزيد عن n ، حيث n هو عدد متغيرات الدالة).
- وصيغة مجموع المضروبات هي تعبير بوولي يشتمل على حدود مكونة بواسطة "و" (AND terms)، يطلق عليها المضروبات (product terms)، ويتكون كل حد منها من متغير واحد أو أكثر. وتعني كلمة "مجموع" هنا جمع هذه الحدود مع بعضها بواسطة عملية "أو". ويوضح المثال التالي دالة في صيغة مجموع المضروبات:
- $F2 (X, Y, Z) = Y' + XY + X'YZ'$
- يلاحظ أن التعبير مكون من ثلاثة حدود، يحتوي الحد الأول منها على متغير واحد، ويحتوي الحد الثاني على متغيرين، ويحتوي الحد الثالث على ثلاثة متغيرات. ويطلق على كل حد منها مضروب (كلمة "مضروب" تعود لكون هذه الحدود يتم تشكيل كل منها بواسطة توحيد المتغيرات بواسطة عملية "و" التي يطلق عليها أحياناً بعملية الضرب البوولي). أما مجموع المضروبات فهو ناتج عن تنفيذ عملية "أو" على هذه الحدود (تعود كلمة "مجموع" لاستعمال عملية "أو" التي يطلق عليها أحياناً بعملية الجمع البوولي).

يمكن تحويل أي دالة بوولية إلى صيغة مجموع المضروبات من أي صيغة أخرى باستعمال مسلمة التوزيع (b). فمثلاً الدالة التالية:

$$F3\ (A, B, C, D) = (AB + CD)\ (A'B' + C'D')$$

موجودة في صيغة غير معيارية، ويمكن تحويلها إلى صيغة مجموع المضروبات بواسطة استعمال مسلمة التوزيع (b) ، وإزالة الأقواس، لنحصل على:

$$F3 = ABC'D' + A'B'CD$$

يلاحظ،أن المضروبات التي تظهر في صيغة مجموع المضروبات هي مضروبات مكونة من متغيرات مفردة، فمثلاً الدالة:

$$F4\ (A, B, C, Z) = A'BC + AB' + Z$$

موجودة في صيغة مجموع المضروبات، لأن كلاً من المضروبات الثلاثة مكون من متغيرات مفردة (قد يظهر المتغير في صورته العادية أو في صورة المتممة له). فالمضروب الأول مكون من المتغيرات المفردة (A', B, C)، والمضروب الثاني مكون من المتغيرات (A, B') والمضروب الثالث مكون من المتغير Z (يطلق على Z مضروب لأن Z.1 = Z).

أما الدالة:

$$F5\ (A, B, C, E, Z) = B'C + ABC' + B'Z'\ (A + E)$$

فهي موجودة في صيغة غير معيارية، ولا نستطيع أن نطلق عليها صيغة مجموع المضروبات، لأن المضروب الأخير [$B'Z'\ (A + E)$] لا يتكون من متغيرات مفردة، حيث أن ($A + E$) ليس متغيراً مفرداً.

ولكن يمكننا تحويل الدالة F5 - إلى صيغة مجموع المضروبات بواسطة تطبيق مسلمة التوزيع (b) للتخلص من الأقواس، حيث ستصبح الدالة F5 في الصيغة التالية:

$$F5 = B'C + ABC' + AB'Z' + B'Z'E$$

ويلاحظ، أنه لا نستطيع تطبيق مسلمة التوزيع (b) على الدالة F5 بعد أن تخلصنا من الأقواس، وبهذا نكون قد وصلنا إلى صيغة مجموع المضروبات للدالة F5.

3.2.3- تمثيل الدوال البوولية في صيغة ضرب المجاميع

صورة مضروب الحدود الكبرى (Product of Maxterms)

الحد الأكبر (Maxterm) هو عبارة عن حد تظهر فيه جميع متغيرات الدخل مربوطة مع بعضها البعض بعمليات OR، و قد يظهر متغير معين في الحد الأكبر معكوساً أو بدون عكس. يوجد عدد من الحدود الكبرى يساوي عدد احتمالات الدخل، أي عدد أسطر جدول الصواب، بحيث يكون هناك حد أكبر مقابل كل سطر من أسطر جدول الصواب.

لإيجاد الحد الأكبر المقابل لسطر معين من أسطر جدول الصواب ننظر إلى قيم متغيرات الدخل في ذلك السطر، فإذا كانت قيمة المتغير هي 0 يظهر ذلك المتغير في الحد الأكبر بدون عكس، أما إذا كانت قيمة المتغير هي 1 يظهر ذلك المتغير في الحد الأكبر معكوساً. كما هو موضح في الجدول التالي، الذي يوضح جميع الحدود الكبرى لثلاثة متغيرات دخل A و B و C.

A	B	C	Maxterm
0	0	0	$A+B+C$
0	0	1	$A+B+\overline{C}$
0	1	0	$A+\overline{B}+C$
0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$
1	0	0	$\overline{A}+B+C$
1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$
1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$
1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

مثال:

اكتب التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج x و y في جدول الصواب التالي في صورة مضروب الحدود الكبرى.

A	B	C	x	y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

الحل:

$$x = (A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

$$y = (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

لتسهيل كتابة التعبيرات المنطقية في صورة مضروب الحدود الكبرى يتم ترقيم أسطر جدول الصواب (ابتداءاً بالقيمة 0)، و استخدام الرمز M_k للحد الأكبر المقابل للسطر k من جدول الصواب. كما هو موضح بالجدول التالي

#	A	B	C	Maxterm	
0	0	0	0	$A+B+C$	M_0
1	0	0	1	$A+B+\overline{C}$	M_1
2	0	1	0	$A+\overline{B}+C$	M_2
3	0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
4	1	0	0	$\overline{A}+B+C$	M_4
5	1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
6	1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
7	1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

و عليه يمكن كتابة التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج x و y في المثال السابق بصورة مختصرة، باستخدام رموز الحدود الكبرى، كالتالي

$$x = M_2 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6$$
$$y = M_3 \cdot M_6 \cdot M_7$$

كما يمكن تسهيل كتابة التعبير أكثر من ذلك باستخدام رمز المضروب $\prod$، و ذلك كالتالي

$$x = \prod M(2,4,5,6)$$
$$y = \prod M(3,6,7)$$

أي أن التعبير المنطقي في صورة مضروب الحدود الكبرى يمكن أن يكتب كاملاً، أو مختصراً باستخدام رموز الحدود الكبرى، أو مختصراً باستخدام رمز المضروب $\prod$ و أرقام الحدود الكبرى (أي أرقام أسطر جدول الصواب الحاوية على القيمة 0 للمتغير الذي يتم كتابة التعبير له). و بناء عليه فإنه في المثال السابق

$$\begin{aligned}
x &= (A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C) \\
&= M_2 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M \\
&= \prod M(2,4,5,6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) \\
&= M_3 \cdot M_6 \cdot M_7 \\
&= \prod M(3,6,7)
\end{aligned}$$

صيغة ضرب المجاميع "مضروب المجاميع" (Product-of-Sums Form)

المجاميع المعيارية (Standard Sums)

لقد اوردنا أنه يمكن توحيد (n) متغير بواسطة عملية "و" لتشكيل (2^n) مضروباً معيارياً. وبطريقة مشابهة يمكن أيضاً توحيد (n) متغير (قد يظهر المتغير في صورته العادية أو في صورة المتممة له) بواسطة عملية "أو" لتشكيل (2^n) مجموعاً معيارياً (standard sums) أو (2^n) "ماكستيرم". ويوضح الجدول اللاحق المجاميع المعيارية الثمانية والرمز لكل "ماكستيرم" (M_i) حيث يبين i العدد العشري للماكستيرم) لثلاثة متغيرات. وبطريقة مشابهة يمكن تحديد (2^n) "ماكستيرمز" لـ (n) متغير. ويتم الحصول على كل مجموع معياري "ماكستيرم" من خلال توحيد المتغيرات البالغ عددها (n) بواسطة عملية "أو"، علماً بأن كل متغير يظهر في صورة المتممة له إذا كانت الوحدة الثنائية المناظرة له في العدد الثنائي الذي يمثل رقم "الماكستيرم" 1 ، ويظهر في صورته العادية إذا كانت 0 .

يوضح الجدول: المجاميع المعيارية "ماكستيرمز" لثلاثة متغيرات.

" الماكستيرمز "	المجاميع المعيارية	Z	Y	X

التدقيق، في المجاميع المعيارية "الماكستيرمز" الموجودة في الجدول أعلاه، ومقارنتها مع المضروبات المعيارية "المينتيرمز" التي في جدول سابق، فإنك ستجد العلاقة التالية: $Mi = m'i$
أي أن "الماكستيرم" يمثل المتممة "للمينتيرم" المناظر، والعكس صحيح.

2.2.3- تحويل الدوال إلى صيغة الماكستيرمز

- يمكن التعبير عن أي دالة بوولية بصيغة ضرب المجاميع المعيارية (ضرب "الماكستيرمز") (تعني كلمة "ضرب" هنا تنفيذ عملية "و" على الحدود، حيث يطلق أحياناً على عملية "و" عملية الضرب البوولي). إن خطوات الحصول على صيغة ضرب المجاميع (ضرب "الماكستيرمز") مباشرة من جدول الجدارة هي: شكّل مجموعاً معيارياً ("ماكستيرم") لكل مجموعة من المتغيرات التي تولد 0 في الدالة، وبعد ذلك ربط هذه الحدود مع بعضها بواسطة عملية "و".
- 2.2.3 تحويل الدوال البوولية إلى صيغة ضرب "الماكستيرمز"
- يمكن تحويل الدالة إلى صيغة ضرب "الماكستيرمز" إذا كانت موجودة في صيغة أخرى على النحو التالي: تحول الدالة أولاً إلى صيغة ضرب المجاميع (يقصد هنا "بالمجموع" أي حد مكون من عدد من المتغيرات متحدة مع بعضها بواسطة عملية "أو")، وبعد ذلك يجب فحص ما إذا كان بعض هذه الحدود لا يحتوي على جميع المتغيرات الموجودة في الدالة. فإذا كان حد ما ينقصه متغير أو أكثر، فيتم توحيده مع تعبير (مثل X.X') بواسطة عملية "أو"، حيث يمثل X أحد المتغيرات الناقصة.

دعنا نوضح ذلك من خلال المثال التالي، لنفرض أنه طلب التعبير عن الدالة البوولية التالية في صيغة ضرب "الماكستيرمز":

$$F7\,(A, B, C, D) = A'B + B'CD$$

الحل:

نحوّل الدالة أولاً إلى صيغة ضرب المجاميع باستعمال مسلمة التوزيع (a) التي تنص:

$$X + Y.Z = (X + Y)\,(X + Z)$$

$$F7 = A'B + B'CD = (A'B + B')\,(A'B + CD)$$

$$= A' + B')\,(B + B')\,(A'B + C)\,(A'B + D)$$

$$=(A' + B')\,(1)\,(A' + C)\,(B + C)\,(A' + D)\,(B + D)$$

$$=A' + B')\,(A' + C)\,(B + C)\,(A' + D)\,(B + D)$$

$$= (A' + B')\,(B + C)\,(A' + D)\,(B + D)$$ {باستعمال نظرية الحد الزائد (b)}

$$= (A' + B')\,(B + C)\,(B + D)$$ {باستعمال نظرية الحد الزائد (b)}

نضيف المتغيرات الناقصة من كل حد، حيث تحتوي الدالة على أربعة متغيرات، بينما يحتوي كل حد على متغيرين فقط، أي أنه يجب إضافة المتغيرين الناقصين من كل حد، وذلك باستعمال المسلمة الخامسة (b).

$$F7 = (A' + B')\,(B + C)\,(B + D)$$

$$=A'+B'+C.C'+D.D')(A.A'+B+C+D.D')(A.A'+B+C.C'+D)$$

$= A'+B'+C'+D'$	$.\ A'+B'+C'+D$	$.\ A'+B'+C+D'$	$.\ A'+B'+C+D$	$.\ A'+B+C+D'$
1 1 1 1	1 1 1 0	1 1 0 1	1 1 0 0	1 1 0 0
$.\ A'+B+C+D$	$.\ A+B+C+D'$	$.\ A+B+C+D$	$.\ A'+B+C'+D$	$.\ A'+B+C+D$
1 0 0 0	0 0 0 1	0 0 0 0	1 0 1 1	1 0 0 0

وبالتدقيق في الدالة نلاحظ أن الحدين(A+B+C+D) ، (A'+B+C+D)قد ظهر كل منهما مرتين، وسوف نحذف واحداً من كل منهما باستعمال قانون التطابق .(X=X.X) لذا يمكن إعادة كتابة الدالة على النحو التالي (مع مراعاة الترتيب التصاعدي لأرقام" الماكستيرمز "ويتم معرفة أرقام" الماكستيرمز "من خلال وضع 0 مكان المتغير، إذا كان ظاهراً في صورته العادية، ووضع 1 إذا كان في صورته المتممة له (انظر الدالة السابقة):

$$F7 = (A+B+C+D)\,(A+B+C+D')\,(A+B+C'+D)\,(A'+B+C+D)\,(A'+B+C+D')(A'+B+C'+D)$$
$$(A'+B'+C+D)\,(A'+B'+C+D')\,(A'+B'+C'+D)\,(A'+B'+C'+D')$$
$$=M_0 \,.\, M_1 \,.\, M_2 \,.\, M_8 \,.\, M_9 \,.\, M_{10} \,.\, M_{12} \,.\, M_{13} \,.\, M_{14} \,.\, M_{15}$$

ملاحظة: علينا الانتباه، إلى المحافظة على ترتيب المتغيرات في كل حد، وذلك من أجل الحصول على أرقام "الماكستيرمز" الصحيحة. فمثلاً لو كتب الحد الثاني في الدالة (A+B+C+D') الذي يمثل M1 مع تبديل مواقع المتغيرات D', B لأصبح (A+D'+C+B) الذي يمثل M4 ، مما يؤدي إلى الحصول على صيغة خاطئة للدالة. ومن الملائم أحياناً التعبير عن الدالة البوولية، عندما تكون في صيغة ضرب "الماكستيرمز" بالصورة القصيرة التالية:

$$F7\,(A, B, C, D) = \Pi\, M\,(0, 1, 2, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15)$$

تمثيل الدوال البوولية في صيغة ضرب المجاميع

- بالإضافة إلى صيغة ضرب المجاميع المعيارية (أو صيغة ضرب "الماكستيرمز")، يمكن التعبير عن الدالة البوولية بواسطة صيغة ضرب المجاميع. وقد تحتوي الحدود المكونة للدالة في هذه الصيغة على متغير (لفظ) واحد، أو متغيرين أو أي عدد من المتغيرات "بالطبع لا يمكن أن يزيد عدد المتغيرات في الحد الواحد عن **n** ، حيث يمثل **n** عدد متغيرات الدالة".
- وصيغة ضرب المجاميع هي تعبير بوولي يشتمل على حدود مكونة بواسطة عملية "و" **(OR Terms)**، ويطلق عليها المجاميع **(Sum Terms)**، ويتكون كل حد منها من متغير واحد أو أكثر. وتعني كلمة "ضرب" هنا ربط هذه الحدود مع بعضها بواسطة عملية "و" (حيث تدعى عملية "و" بالضرب البوولي).
- ويوضح المثال التالي دالة في صيغة ضرب المجاميع:
- **F8 (A, B, C, D) = A (B' + C) (A' + B + C') (A' + B' + C + D(**
- نلاحظ أن الدالة **F8** تحتوي على أربعة حدود، يحتوي الحد الأول منها على متغير واحد **(A)**، ويحتوي الحد الثاني على متغيرين **(B'+C)**، ويحتوي الحد الثالث على ثلاثة متغيرات**('A'+B+C)**، ويحتوي الحد الرابع على أربعة متغيرات **A' +B' +C) +D)**. ويطلق على كل حد منها "مجموع"، وهذه الحدود يتم تشكيل كل منها عن طريق توحيد المتغيرات بواسطة عملية "أو" التي يطلق عليها أحياناً عملية الجمع

تمثيل الدوال البوولية في صيغة ضرب المجاميع

- أما ضرب المجاميع فهو ناتج عن تنفيذ عملية "و" على هذه الحدود. ويمكن تحويل أي دالة بوولية إلى صيغة ضرب المجاميع من أي صيغة أخرى باستعمال مسلمة التوزيع (a).
- ويلاحظ، أن المجاميع التي تظهر في صيغة ضرب المجاميع هي مجاميع مكونة من متغيرات مفردة، فمثلاً الدالة:

- $F10 (A, B, C, D) = (C' + D') (A + C + D) B'$

- موجودة في صيغة ضرب المجاميع، لأن كلاً من المجاميع الثلاثة مكونة من المتغيرات المفردة، فالمجموع الأول مكون من المتغيرين ('C', D)، والمجموع الثاني مكون من المتغيرات (A, C, D)، والمجموع الثالث مكون من المتغير 'B (يطلق على 'B مجموع لأن B'+0 = B'). أما الدالة:

- $F11 (A, B, C, D) = (A + B') (B + C'D')$

- بالنظر للدالة، فهي موجودة في صيغة غير معيارية، ولا نستطيع أن نطلق عليها صيغة ضرب المجاميع، لأن المجموع الثاني ('B+C'D) لا يتكون من متغيرات مفردة، حيث أن ('C'D) ليس متغيراً مفرداً. ولكن يمكننا تحويل الدالة F11 "كما ورد"إلى صيغة ضرب المجاميع بواسطة تطبيق مسلمة التوزيع (a)، حيث ستصبح الدالة F11:

- $F11 = (A + B') (B + C') (B + D')$

- ويلاحظ، أنه لا نستطيع تطبيق مسلمة التوزيع (a) على الدالة F11، بعد أن أصبحت مكونة من مجاميع، يحتوي كل منها على متغيرات مفردة، وبهذا نكون قد وصلنا إلى صيغة ضرب المجاميع للدالة F11.

العلاقة بين صيغة جمع "المينتيرمز" وصيغة ضرب "الماكستيرمز"

F_{12}	C	B	A
0	0	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	1	1

- لابد لنا من توضيح علاقة الصيغ المعيارية مع بعضها، ولذا سنورد مثالاً نوضح من خلاله علاقة الصيغ المعيارية مع بعضها، وكيفية الانتقال من صيغة إلى صيغة أخرى.
- تأمل جدول الجدارة المبين أدناه للدالة F_{12} ، ثم عبر عن هذه الدالة باستعمال الصيغ المعيارية المختلفة.

الحل:

يمكن التعبير عن الدالة F_{12} في صيغة مجموع المضروبات المعيارية (أو جمع "المينتيرمز") كالآتي:

$$F12\ (A, B, C) = A'B'C + AB'C' + ABC = m1 + m4 + m7$$

ويلاحظ، أن التعبير عن الدالة F_{12} في صيغة مجموع المضروبات المعيارية، فإننا نعتني من جدول الجدارة بالأسطر التي تكون فيها قيمة الدالة 1.

أما إذا أردنا التعبير عن الدالة F_{12} في صيغة ضرب المجاميع، فعلينا أن نعتني من جدول الجدارة بالأسطر التي تكون فيها قيمة الدالة 0، وعليه فإن صيغة ضرب المجاميع للدالة F_{12} هي كالآتي:

$$F_{12} = (A+B+C)\ (A+B'+C)\ (A+B'+C')\ (A'+B+C')\ (A'+B'+C)$$

$$= M0\ .\ M2\ .\ M3\ .\ M5\ .\ M6$$

نلاحظ أن أرقام "الماكستيرمز" هي تلك الأرقام التي لم تظهر في صيغة جمع "المينتيرمز"، أي أنه إذا علمنا صيغة جمع "المينتيرمز" لدالة ما، فإنه يمكن منها مباشرة معرفة صيغة "الماكستيرمز" للدالة نفسها، وذلك بأخذ الأرقام غير الموجودة في صيغة جمع "المينتيرمز"، والعكس صحيح.

فمثلاً لو افترضنا أن:

$$F_{13}\ (A, B, C, D) = (0, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 15)$$

فيمكننا اعتماداً على صيغة جمع "المينتيرمز" للدالة F_{13} كتابة صيغة ضرب "الماكستيرمز" لها:

$$F_{13}\ (A, B, C, D) = (1, 2, 3, 5, 8, 10, 13)$$

حيث أن الدالة بأربعة متغيرات، لها - كما نعلم - (24) مضروباً معيارياً ("مينتيرم")، ولها (24) مجموعاً معيارياً ("ماكستيرم")، وتبدأ أرقام "المينتيرمز" أو "الماكستيرمز" من 0 ولغاية 15. وبما أن صيغة جمع "المينتيرمز" تظهر أرقام "المينتيرمز" التي تكون فيها قيمة الدالة 1 فإن الأرقام التي لا تظهر في صيغة جمع "المينتيرمز" تكون فيها قيمة الدالة 0 وهي تلك التي يجب أن تظهر في صيغة ضرب "الماكستيرمز".

تدريب 1:

من جدول الصواب التالي اكتب التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج x و y في صورة:

1- مجموع الحدود الصغرى

2- مضروب الحدود الكبرى

A	B	x	y
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

-1

$$x = \overline{AB} + A\overline{B} + AB$$

$$y = \overline{A}B + A\overline{B}$$

-2

$$x = A + \overline{B}$$

$$y = (A + B)(\overline{A} + \overline{B})$$

تدريب 2:

من جدول الصواب التالي اكتب التعبيرات المنطقية لمتغيرات الخرج x و y و z في صورة:

1- مجموع الحدود الصغرى

2- مضروب الحدود الكبرى

A	B	C	x	y	z
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0

-1

$$x = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

$$y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

$$z = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + AB\overline{C}$$

-2

$$x = (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

$$y = (A+B+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})$$

$$z = (A+B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

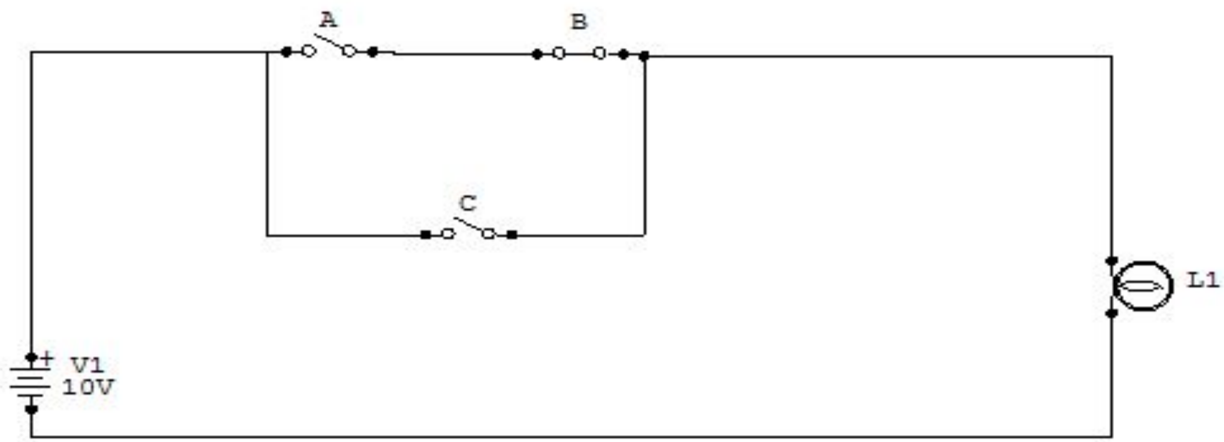
ملخص ما سبق

كيف يمكنك تمثيل الدالة البولية التالية بكافة الطرق أعلاه:

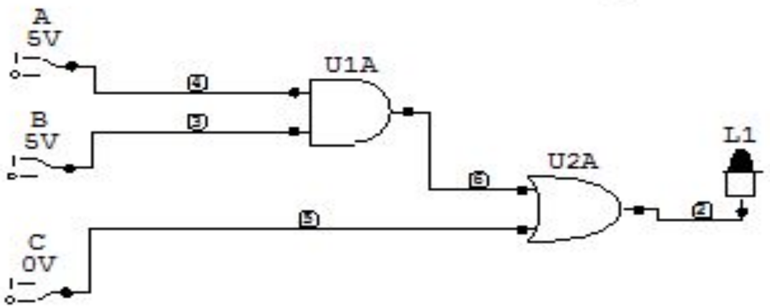
$$F(A,B,C) = AB + C$$

أولاً : الصيغ الغير معيارية

1- دائرة المفاتيح الكهربية



27- دائرة البوابات المنطقية



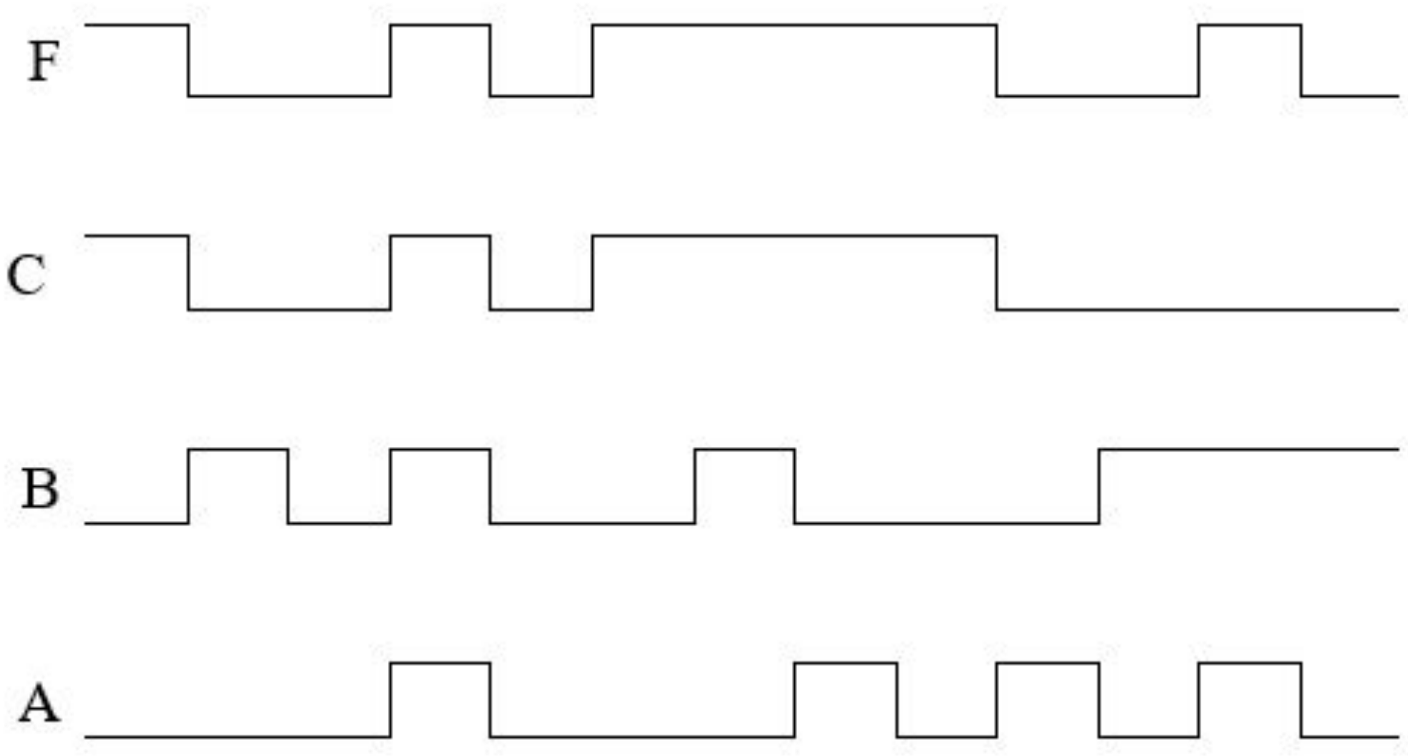
$$F(A,B,C) = AB + C$$

3- جدول الجدارة

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

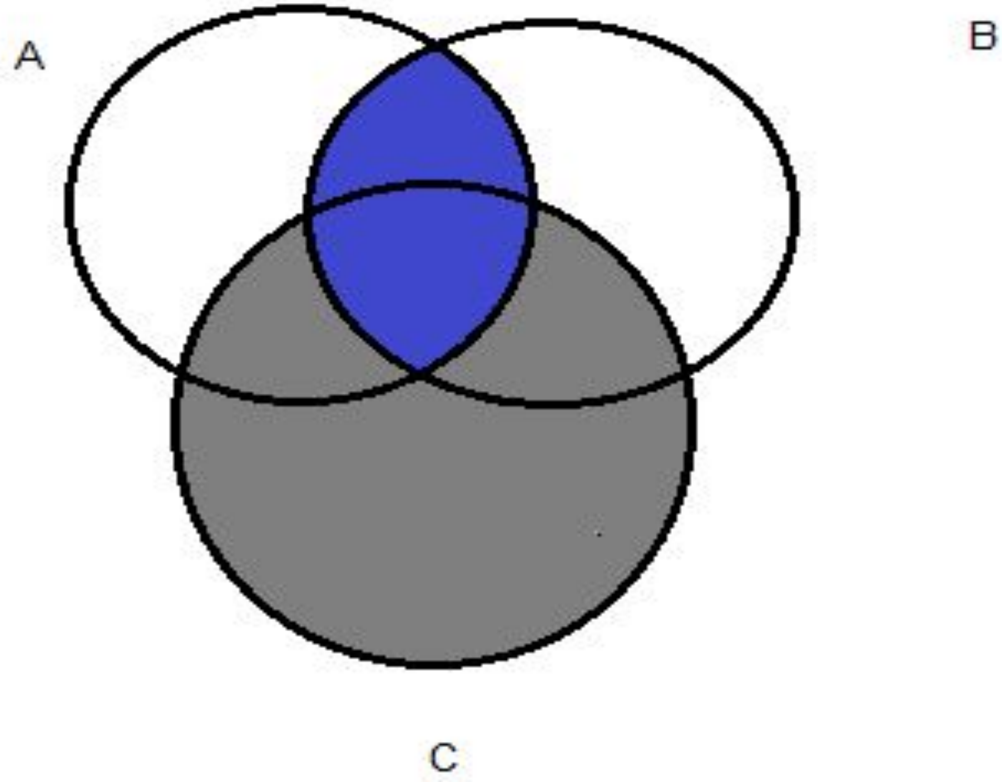
$$F(A,B,C) = AB + C$$

4- المخطط الزمني :



$F(A,B,C) = AB + C$

5- مخططات فين (VEN DIAGRAM)



6- التعبير اللفظي

تظهر القيمة 1 على المخرج F في حالة كانت:
قيمة C = 1 أو كل من قيم A و B = 1 .

$F(A,B,C) = AB + C$

ثانياً: الصيغ المعيارية للدالة البولية وهي كالاتي:

8- جمع المضاريب المعيارية Sum of the Products

$$F(A, B, C) = ABC + ABC' + A'B'C + A'BC + AB'C$$

9- صيغة ضرب المجاميع المعيارية Products Of the Sums

$$(A + B + C)(A' + B + C)(A + B' + C)$$

10- صيغة المينتيرمز Minterms

$$\sum m(1,3,5,6,7)$$

11- صيغة الماكستيرمز Maxterms

$$\prod M(0,2,4)$$

4 ـ تحليل الدوائر المنطقيـة

الدوائر المنطقية

- ورد أنه يمكن استخدام البوابات لتمثيل الدوال البوولية بواسطة الدوائر المنطقية التي يتم بناؤها. وسنقوم في هذا الفصل بعرض طريقة تحليل الدوائر المنطقية، والتعبير عنها بواسطة الصيغ المعيارية "صيغة مجموع المضروبات، وصيغة ضرب المجاميع".
- ويمكن تصنيف الدوائر المنطقية إلى صنفين رئيسين هما: الدوائر المنطقية التوافقية (Combinational logic circuits) والدوائر المنطقية التتابعية (Sequential logic circuits).
- تتكون الدوائر المنطقية التوافقية من بوابات منطقية تعتمد مخارجها، في أي لحظة فقط، على مجموعة القيم الموجودة على مداخلها، في تلك اللحظة نفسها، دون أي اعتبار لمجموعات القيم السابقة على تلك المداخل. ويتم وصف العمليات التي تقوم بها الدائرة المنطقية التوافقية بواسطة مجموعة من الدوال البوولية. وتحتوي الدوائر المنطقية التتابعية بالإضافة إلى بوابات المنطق على عناصر ذاكرة، وتعتمد مخارجها في لحظة ما، ليس فقط على مجموعة القيم الموجودة على مداخلها، وإنما تعتمد أيضاً على حالة عناصر الذاكرة. أي أنه يمكن القول بأن مخارج الدوائر المنطقية التتابعية في لحظة ما، تعتمد على مجموعة القيم الموجودة على المداخل في هذه اللحظة، وكذلك على مجموعات القيم السابقة. والدوائر التي سنقوم بعرضها هي دوائر منطقية توافقية.

1.4- تحليل الدوائر المنطقية بواسطة الصيغ المعيارية

- يبدأ بناء أو تصميم الدوائر المنطقية عادة من الوصف اللفظي للوظيفة "العملية" المطلوب تحقيقها من هذه الدائرة، وينتهي بمجموعة من الدوال البوولية لمخرجاتها، أو بالمخطط المنطقي (Logic Diagram) لها. أما في تحليل الدوائر المنطقية، فيتم اتباع الخطوات بترتيب معكوس، مقارنة مع ترتيب خطوات التصميم، حيث تبدأ عملية التحليل بمخطط منطقي معلوم للدائرة، وتنتهي بمجموعة دوال بوولية، وجدول جدارة، أو وصف لفظي لعمل الدائرة.
- إن أول خطوة في تحليل الدوائر المنطقية هي تحديد نوع الدوائر أتوافقية هي أم تتابعية؟ إلاّ أننا لن نتوقف عند هذه الخطوة طويلاً هنا، لأننا لم نتعرض بعد للمنطق التوافقي والمنطق التتابعي. ولكن يمكن تعرف أن الدائرة توافقية وليست تتابعية، إذا انعدمت فيها مسارات "أو وصلات" التغذية الراجعة (Feedback paths)، أو عناصر الذاكرة (Flip Flops). وبمعنى آخر إذا كانت الدائرة لا تحتوي على عملية ربط بين مخرج بوابة ما ومدخل بوابة أخرى تشكل جزءاً من مدخلات البوابة الأولى، فإن الدائرة تكون توافقية. لكننا سوف نقوم بتحليل الدوائر التوافقية فقط. من هنا فإن خطوة تحديد نوع الدائرة يمكن إهمالها في هذه المرحلة.
- عند تحديد أن الدائرة المراد تحليلها من النوع التوافقي (كما هو الحال هنا)، فيمكن حينئذ تتبع المخطط المنطقي للدائرة من أجل الحصول على الدوال البوولية لمخرجات الدائرة، أو جدول الجدارة لها. فإذا توفر مع المخطط المنطقي للدائرة وصف لفظي للوظيفة التي تقوم بها، فيمكن عندئذ التحقق من الدوال البوولية، أو من جدول الجدارة.
- أما إذا كانت وظيفة الدائرة ما زالت تحت الدراسة، فمن الضروري عندئذ تفسير عمل هذه الدائرة من جدول الجدارة الذي تم استنتاجه.

1.4- تحليل الدوائر المنطقية بواسطة الصيغ المعيارية

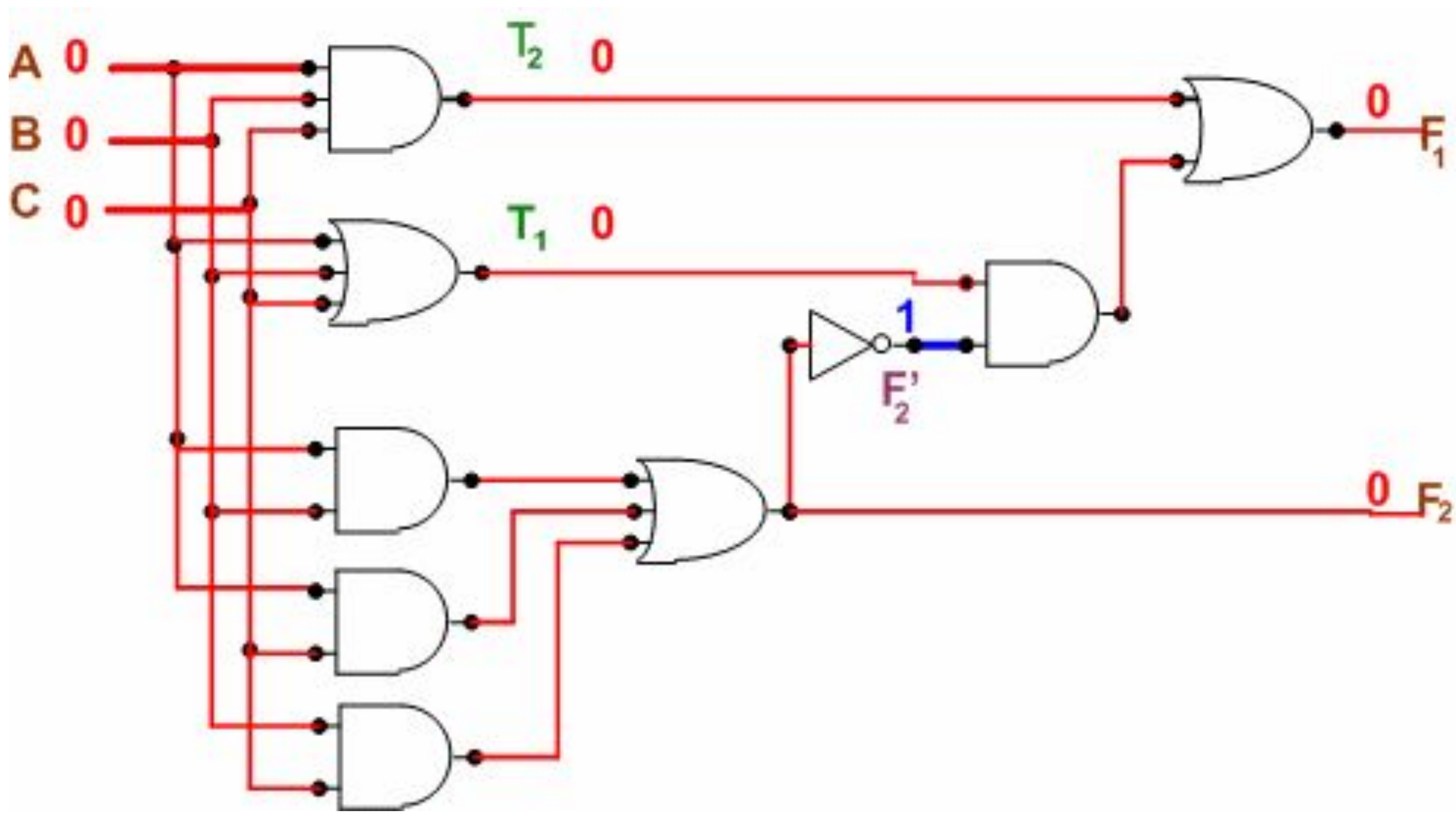
- ويمكن، تلخيص الخطوات الواجب اتباعها من أجل الحصول على الدوال البوولية للمخرجات من مخطط منطقي معطى على النحو التالي:

1. أعط أسماء لمخرجات جميع بوابات المنطق التي هي دوال لمتغيرات الإدخال فقط، باستعمال رموز عشوائية، ثم احصل على الدوال البوولية لكل بوابة بدلالة مدخلاتها.
2. اعط أسماء لمخرجات البوابات التي هي دوال لمتغيرات الإدخال و (أو) بوابات تمت تسميتها سابقاً. ثم جد الدوال البوولية لهذه البوابات.
3. كرر العملية المشار إليها في خطوة 2، حتى يتم الحصول على مخرجات الدائرة.
4. احصل على الدوال البوولية لمخرجات الدائرة بدلالة متغيرات الإدخال فقط، وذلك عن طريق تكرار تعويض الدوال المعرفة سابقاً.

- يمكن توضيح هذه الخطوات المقترحة للتحليل من خلال تحليل الدائرة المبينة أدناه في الشكل أدناه:

كما تلاحظ، يوجد للدائرة التي نريد تحليلها ثلاثة مداخل A, B, C ، ومخرجان F_2, F_1 .

- لقد تم تسمية المخارج لبوابات مختلفة برموز وسط. وأعطيت الأسماء F'_2, T_2, T_1 لمخارج البوابات المنطقية التي هي دوال لمتغيرات الإدخال فقط. فمثلاً يمثل T_1 مخرج بوابة "أو" التي مدخلاتها هي المتغيرات A, B, C .



والدوال البوولية للمخارج الثلاثة هي:

$F_2 = AB + AC + BC$

$T_1 = A + B + C$

$T_2 = ABC$

ودعنا نتأمل مخرجي البوابات المنطقية التي هي دوال لرموز "مخارج الوسط" قد تم تعريفها:

$T_3 = F'_2 T_1$

$F_1 = T_3 + T_2$

يوجد للدائرة - كما ذكرنا - مخرجان، وقد تم حتى الآن الحصول على الدالة البوولية F_2 التي تمثل أحد المخارج بدلالة متغيرات الإدخال فقط A, B, C. وبقي علينا أن نحصل على الدالة F_1، التي تمثل المخرج الثاني، بدلالة متغيرات الإدخال فقط. وللحصول على ذلك، سنقوم بإجراء عمليات التعويض التالية:

$$F_1 = T_3 + T_2 = F'_2 T_1 + ABC$$

$$= (AB + AC + BC)' . (A + B + C) + ABC$$

$$=(A' + B') . (A' + C') . (B' + C') . (A + B + C) + ABC \quad \text{\{قانون المتممة\}}$$

$$=(A' + B'C') . (AB' + AC' + BC' + B'C) + ABC \quad \text{\{مسلمة التوزيع b\}}$$

ولو قمنا بضرب الأقواس {مسلمة التوزيع (b) }، وحذفنا الحدود التي قيمتها 0 "بسبب ظهور المتغير ومتممته في مضروب واحد مثل B'A'A " لحصلنا على الدالة F_1 :

$$F_1 = A'BC + A'B'C + AB'C' + ABC$$

$$F_2 = AB + AC + BC$$

ويمكننا استنتاج جدول الجدارة مباشرة من الدوال البوولية، إذا ما أردنا متابعة التحري عن الدائرة من أجل تحديد العملية التي تعمل على إنجازها. ويعتبر استنتاج جدول الجدارة للدائرة عملية واضحة الخطوات، لأن الدوال البوولية لمخارج الدائرة معروفة. لكن إذا أردنا استنتاج جدول الجدارة مباشرة من المخطط المنطقي دون استنتاج للدوال البوولية، فيمكننا اتباع الخطوات التالية:

1. تحديد عدد متغيرات الإدخال للدوائر. وتشكيل (2^n) مجموعة إدخال ممكنة من 0, 1 من أجل (n)متغير إدخال، وذلك بسرد الأعداد الثنائية من 0 ولغاية (2^n - 1).
2. تسمية المخارج لبوابات مختارة باستعمال رموز عشوائية.
3. الحصول على قيم مخارج تلك البوابات التي تعتمد على متغيرات الإدخال فقط.
4. متابعة الحصول على قيم مخارج تلك البوابات التي تعتمد على القيم التي تم تحديدها سابقاً، وهكذا حتى يتم الحصول على قيم المخارج جميعها.

- ويمكن توضيح هذه الخطوات باستعمال المخطط المنطقي المبين في الشكل السابق، من أجل استنتاج جدول الجدارة له (الجدول اللاحق). ويحتوي جدول الجدارة للمخطط المنطقي على ثماني مجموعات مختلفة من القيم لأن عدد متغيرات الإدخال في المخطط ثلاثة. ويتم تحديد قيم العمود F2 مباشرة من قيم متغيرات الإدخال A, B, C ، حيث أن F2 تساوي 1 ، عندما تكون قيمة متغيرين أو ثلاثة تساوي 1.

- أما قيم العمود F'2 فيتم الحصول عليها بواسطة أخذ المتممة للعمود F2.

- ويتم الحصول على قيم العمود T1 بتنفيذ عملية "أو" على متغيرات الإدخال، وبتنفيذ عملية "و" على متغيرات الإدخال يتم الحصول على قيم العمود T2 من جدول الجدارة. أما قيم العمود T3 فيتم اشتقاقها بواسطة تنفيذ عملية "و" على قيم كل من العمودين T'1, F2، أي أن T3 تساوي 1 فقط عندما تكون قيمتا F'2, T1 تساويان 1. وأخيراً فإن قيمة F1 تساوي 1 عندما تكون قيمة T2 و T3 تساوي 1، أو كلا القيمتين تساوي 1.

- لو تمعنت، في جدول الجدارة المبين أدناه، لوجدت أن العمود F1 يمثل قيمة المجموع لثلاث وحدات ثنائية (binary digits 3)، وأن العمود F2 يمثل المحمول (carry) الناتج عن جمع ثلاث وحدات ثنائية.أي أن المخطط المنطقي السابق، يمثل المخطط المنطقي لدائرة "الجامع الكامل" (Full-Adder).

جدول الجدارة الذي يمثل المخطط المنطقي الوارد سابقاً

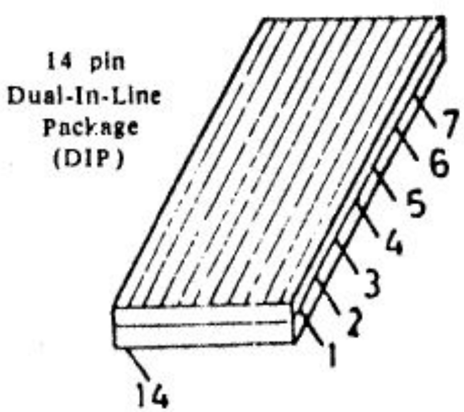
A	B	C	F_2	F'_2	T_1	T_2	T_3	F_1
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1	0	1

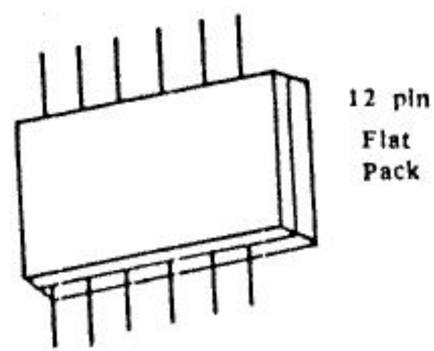
الدوائر المنطقية التكاملية (المندمجة INTEGRATED LOGIC) (CIRCUITS

- البوابة المنطقية هي دائرة إلكترونية مكونة من عناصر أساسية تشمل الترانزستورات، والصمامات الثنائية (diodes)، والمقاومات، والمكثفات، وعناصر أخرى موصولة فيما بينها لتحقيق مهمة "وظيفة" محددة.
- يقوم مصمم المنطق المعاصر، بتجميع ما يعرف بالدوائر التكاملية (Integrated Circuits) التي تنفذ له وظائف محددة لبناء وحدات منطقية وظيفية.
- والدائرة التكاملية هي شريحة صغيرة من السيليكون البلوري شبه الموصل، تدعى بالرقاقة (chip)، يتم عليها تصنيع العناصر الأساسية المنفصلة المذكورة أعلاه كيميائياً، وربطها لتشكيل بوابات ودوائر أخرى. ويمكن الوصول إلى هذه الدوائر فقط بواسطة أرجل خارجية (pins) مربوطة بالرقاقة. وتوجد رجل خارجية لكل إشارة إدخال، ورجل خارجية لكل إشارة إخراج للدائرة المصنعة على الرقاقة. وتحفظ الرقاقة في صندوق (package) معدني أو بلاستيكي. وتستعمل أنواع مختلفة من الصناديق، مثل الصندوق الثنائي الخط (Dual In-line Package)، والصندوق المسطح، أو المنبسط (Flat Package). كما هو مبين في الشكل اللاحق والصندوق الثنائي الخط أكثر استخداماً من الصندوق المسطح نظراً إلى رخص ثمنه، وسهولة نصبه على لوحة الدائرة الكهربائية. وغطاء الصندوق (envelope) مصنوع من البلاستيك أو السيراميك. ومعظم الصناديق لها أحجام قياسية (standard sizes).
- **ويتراوح عدد أرجلها من ثمانٍ إلى أربع وستين. ولكل دائرة متكاملة رقم معين مطبوع على سطح صندوقها لمعرفتها، ويقوم البائع بنشر كتاب للتعليمات "كاتالوج" يحتوي على المعلومات الضرورية.**

الدوائر المنطقية التكاملية (المندمجة)
(INTEGRATED LOGIC CIRCUITS)

إن حجم الدائرة المتكاملة صغير جداً، فمثلاً توجد أربع بوابات "و" داخل صندوق أبعاده (20 * 8 * 3 ملليمتراً)، ويوجد معالج ميكروويي (microprocessor) كامل في صندوق أبعاده (4 * 15 * 50 ملليمتر).
ومن ميزات الدائرة المتكاملة صغر حجمها، وانخفاض تكاليفها، وقلة استهلاكها للطاقة، وهي أكثر وثوقية، وتحتاج إلى صيانة أقل، كما تمتاز أيضاً بسرعتها، مما يجعلها تناسب العمليات العالية السرعة. كذلك فإن استخدام الدوائر التكاملية يقلل عدد وصلات الاستهلاك الخارجية لأنها موصولة داخلياً.
وتحتوي كل دائرة تكاملية على بوابة واحدة أو أكثر من النوع نفسه. ويعمل مصمم المنطق على تجميع الدوائر التكاملية التي تنفذ وظائف معينة لبناء وحدات منطقية وظيفية. ولا يتطلب مثل ذلك، تفاصيل عن التركيب الإلكتروني للبوابات، لبناء دوائر منطقية ذات كفاءة. ولكن كلما زاد تعقيد الدوائر المنطقية، فإن الخصائص الإلكترونية تصبح مهمة في حل مسائل التوقيت والتحميل (Timing and loading problems) في الدائرة.





1.2.4 تصنيف الدوائر التكاملية

تصنف الدوائر التكاملية حسب طبيعة عملها إلى خطية ورقمية (Linear And Digital). وتتعامل الدوائر التكاملية الرقمية مع الإشارات الثنائية، بينما تتعامل الدوائر التكاملية الخطية مع إشارات متصلة لتعطي وظيفة إلكترونية، كما في المكبرات ومقارنات الجهد. وبفضل تطور تكنولوجيا الدوائر التكاملية يصنع عدد كبير من البوابات على رقاقة واحدة. ويمكن تصنيف الدوائر التكاملية، اعتماداً على عدد البوابات التي تحتويها، إلى:

أ- الدوائر القليلة التكثيف (Small-Scale Integration (SSI))

وهذه الدوائر هي أقل الدوائر التكاملية الرقمية تعقيداً. وهي تحتوي على ما يصل إلى 12 بوابة منطقية أو ما يعادلها. وتشمل وظائف أساسية مثل: "أو"، "و"، "لا"، "ليس أو"، "ليس و"، وكذلك المراجيح (flip-flops).

ب- الدوائر المتوسطة التكثيف (Medium-Scale Integration (MSI))

تحوي هذه الدوائر من 12 إلى 100 بوابة منطقية أو ما يعادلها. وهي تقوم بوظائف أكثر تعقيداً من وظائف الدوائر القليلة التكثيف، ومن ضمنها: العدادات (counters)، المرمز (decoder)، المحور (encoder)، ذاكرات صغيرة (memories small)، والدوائر الحسابية (arithmetic circuits).

ج- الدوائر عالية التكثيف (Large-Scale Integration (LSI))

تحتوي هذه الدوائر على أكثر من 100 بوابة أو ما يعادلها لكل رقاقة. وتحتوي على ذاكرات كبيرة ومعالجات ميكروية (microprocessors).

د- الدوائر ذات التكثيف العالي جداً (VLSI) Very-Large-Scale Integration))

تحتوي هذه الدوائر على عشرات الآلاف من البوابات أو ما يعادلها، وذلك في صندوق واحد، وعلى رقاقة واحدة

2.2.4 عائلات الدوائر التكاملية الرقمية (Digital Integration Circuits Families)

توجد فئتان رئيستان من فئات تكنولوجيا الدوائر التكاملية، تعتمد إحداهما على الترانزستورات الثنائية الأقطاب (bipolar transistors)، أي الترانزستورات التي تحتوي على كلا النوعين من حاملي الشحنات "الإلكترونات والفراغات". أما الفئة الأخرى فتعتمد على الترانزستورات الأحادية القطبية، المركبة من مادة شبه موصلة عليها طبقة من أكسيد معدني (unipolar metal oxide semiconductor field effect transistor).

وتصنف الدوائر التكاملية الرقمية إلى عائلات حسب القطع الإلكترونية المستخدمة في تركيبها، ومن العائلات المعروفة تجارياً ما يلي:

TTL Transistor-transistor logic
ECL Emitter-coupled logic
MOS Metal-oxide semiconductor
CMOS Complementary Metal-oxide semiconductors
I2L Integrated-Injection logic

تستخدم عائلة TTL في وظائف رقمية عديدة، وهي أكثر عائلات المنطق شيوعاً. أما عائلة ECL فتستخدم في النظم التي تتطلب سرعة عالية. بينما تستخدم عائلة MOS وعائلة I^2L في الدوائر التي تتطلب كثافة قطع عالية. وتستخدم عائلة CMOS في النظم التي تتطلب استهلاكاً قليلاً للطاقة. وبالنظر إلى الكثافة العالية التي يمكن بها تصنيع الترانزستورات في عائلتي I^2L ، MOS ، فإننا نراهما تستخدمان كثيراً في وظائف الدوائر العالية التكثيف (LSI)، في حين تستخدم العائلات: TTL, ECL, CMOS في الدوائر: SSI, MSI, LSI . وتميز الدوائر التكاملية من عائلة TTL عن طريق ترقيمها، كما في متوالية 5400 ، ومتوالية 7400 (series/54 74). وتعمل المتوالية الأولى (54) ضمن مدى حراري واسع (55- إلى 125-)، لذلك فهي تناسب الاستعمال العسكري. في حين أن المدى الحراري للمتوالية الثانية (series 74) أقل (0 إلى 70) ولذا تصلح للاستخدام الصناعي.o

ويعني رقم المتوالية (7400) أن صناديق الدوائر التكاملية يرمز إليها بالرمـز: 7415, 7401, 7400 ، مثلاً ... وهكذا.وأكثر النماذج استخداماً ضمن عائلة ECL هي المتسلسلة (series 10,000) مثل: 10102, 10107 ، وتنتمي المتسلسلة (4000) إلى عائلة CMOS ، مثل: 4050, 4002 .

3.2.4 أوراق التعليمات (DATA SHEETS)

- يمكن الحصول على معلومات محددة عن خصائص التشغيل لدوائر تكاملية معينة عن طريق كتاب التعليمات الذي ينشره عادة المصنع. وورقة التعليمات النمطية مجزأة إلى ثلاثة أقسام رئيسة:
- أ- ظروف تشغيلية ينصح بها (Recommended Operating Conditions).
- ب- خصائص كهربائية (Electrical Characterisitics).
- ج- خصائص تبديلية (Switching Characterstics).

Parameter	5400			7400			units
	Minimum	Typical	Maximum	Minimum	Typical	Maximum	
Supply voltage (V_{cc})	4.5	5.0	5.5	4.75	5.0	5.25	V
Operating free-air temperature range	-55	25	1.25	0	25	70	°C
HIGH level output current (I_{oh})			-400			-400	µA
HIGH level output current (I_{ol})			16			16	mA

a – recommended operating conditions

Parameter		Limits			units	Test Conditions[1]
		Minimum	Typical[2]	Maximum		
HIGH level Voltage(V_{IH})		2.0			V	
LOW level Voltage(V_{IL})				0.8	V	
HIGH level Output Voltage(V_{OH})		2.4	3.4		V	V_{CC}=min, I_{OH}= 0.4ma V_{IN}=0.8V
LOW level Output Voltage(V_{OL})			0.2	0.4	V	V_{CC}=min, I_{OL}= 16ma V_{IN}=2.0V
HIGH level input current (I_{IH})				40	µA	V_{CC}=max, V_{IN}=2.4V
LOW level input current (I_{IL})				1.6	mA	V_{CC}=max, V_{IN}=0.4V
Short-circuit output current[3] (I_{OS})	5400	20		-55	mA	V_{CC}=max
	7400	18		-55	mA	
Total supply current with outputs HIGH (I_{CCH})			40	80	mA	V_{CC}=max
Total supply current with outputs LOW (I_{CCL})			12	22	mA	V_{CC}=max

b – Electrical characteristics operating temperature range tunnels otherwise noted

Parameter	Limits			units	Test Conditions[1]
	Minimum	Typical[2]	Maximum		
Propagation delay time LOW-to-HIGH output (t_{PLH})		11	22	ns	V_{CC}=5.0V C_{LOAD}=15 pF R_{LOAD}=15Ω
Propagation delay time HIGH-to-LOW output (t_{PHL})		7.0	15	ns	

c - Switching characteristics (T_A=25°C)

نورد فيما يلي تفسيراً للعوامل المذكورة في ورقة التعليمات:

.1	V_{CC}	مصعد الجهد. ليس بالإمكان ضمان وثوقية العملية إذا كان الجهد أقل من الحد الأدنى المعين. إذا كان الجهد أعلى من الحد الأعلى، فقد يحدث تلف للدائرة التكاملية.
.2	I_{OH}	الحد الأعلى لتيار المخرج الذي تستطيع عنده البوابة العمل والتحميل (to load) بوثوقية، عن يكون المخرج في المستوى المنخفض.
.3	I_{OL}	الحد الأعلى لتيار المخرج الذي تستطيع عنده البوابة أن تعمل بوثوقية، عندما يكون المخرج المستوى المنخفض.
.4	V_{IH}	قيمة جهد المدخل الذي يمكن تقبله، كمستوى عال، بواسطة البوابة.
.5	V_{IL}	قيمة جهد المدخل الذي يمكن تقبله، كمستوى منخفض، بواسطة البوابة.
.6	V_{OH}	قيمة المستوى العالي لجهد المخرج الذي تنتجه البوابة.
.7	V_{OL}	قيمة المستوى المنخفض لجهد المخرج الذي تنتجه البوابة.
.8	I_{IH}	قيمة تيار المدخل لمستوى جهد المدخل العالي.
.9	I_{IL}	قيمة تيار المدخل لمستوى جهد المدخل المنخفض.
.10	I_{OS}	تيار المخرج عندما يتم ربط مخرج البوابة بالأرض (ground) وبتوفر شروط مدخل تع مستوى عالياً على المخرج.
.11	I_{CCH}	التيار الكلي من مصدر الجهد عندما تكون مخارج البوابات جميعها في المستوى العالي.
.12	I_{CCL}	التيار الكلي من مصدر الجهد عندما تكون مخارج البوابات جميعها في المستوى المنخفض.

3.4- التطورات الراهنة

بالإضافة إلى عائلات الدوائر التكاملية التي وردت سابقاً، هناك عائلة أخرى أكثر حداثة، وهي تعتمد على زرنيخيد "أرسنايد" الغاليوم (arasenide Gallium) بدلاً من السيليكون. وتمتاز تكنولوجيا أرسنايد الغاليوم بقدرتها على توفير دوائر تكاملية ذات سرعة أداء أعلى من تلك التي تعتمد على تكنولوجيا السيليكون، وذات درجة مرتفعة في مقاومة الإشعاعات. وهي تتنافس مع عائلة ECL (أكثر عائلات الدوائر التكاملية التي تعتمد على تكنولوجيا السيليكون سرعة) ويطلق عليها "تكنولوجيا التسعينات" لدوائر تكاملية سريعة، وذات استهلاك منخفض للطاقة. حيث توفر تكنولوجيا أرسنايد الغاليوم خصائص إلكترونية ممتازة إذا ما قورنت مع تكنولوجيا السيليكون، مثل تنقلية عالية للإلكترونات (high electron mobility)، وسرعة إشباع عالية (high saturation velocity)، وطبقة تحتية شبه عازلة (substrates semi-insulating).

ولكن ارتفاع التكلفة لمادة أرسنايد الغاليوم كان سبباً في تأخير ظهور تغليف معياري (standard packaging)، وتأخير وضع قواعد وأدوات تصميم عامة، وتأخر في ظهور معدات فحص ملائمة.

وقد تم تطوير الدوائر التكاملية فوق عالية التكثيف (Ultra Large-Scale Integration ULSI) التي تحتوي على مئات الآلاف من البوابات المنطقية أو ما يعادلها. ويعتبر تطوير الدوائر التكاملية ذات التكثيف العالي جداً (VLSI)، وفوق عالية التكثيف، ثورة في عالم تصميم الحواسيب، حيث وفر ذلك للمصممين إمكانيات لابتكار تراكيب وهياكل لم تكن مجدية من قبل.

وهناك أبحاث تتجه لتطوير دوائر تكاملية ذات طبيعة بيولوجية ("biochips") لتحل مكان دوائر السيليكون.

6- الخلاصة

تناولت هذه الوحدة، مفهوم الجبر البوولي، والعمليات البوولية الأساسية منها والأخرى، كما تناولت مسلمات الجبر البوولي ووضح مفهوم الثنائية.

ثم تناولت الوحدة الدوال البوولية، وكيفية تمثيلها بالطرق المختلفة، مثل جدول الجدارة، ومخططات فين، أو تحقيقها بواسطة الدوائر المنطقية. ثم بعد ذلك قوانين الجبر البوولي ونظرياته المختلفة.

وبالإضافة إلى ذلك عرضت في الوحدة الصيغ المعيارية المستخدمة في تمثيل الدوال البوولية، وطرق التحويل من صيغة إلى أخرى. حيث وضحت صيغة مجموع المضروبات المعيارية، وصيغة ضرب المجاميع المعيارية، وكذلك كيفية تحويل الدوال البوولية إلى كل من صيغة جمع "المينتيرمز"، وصيغة ضرب "الماكستيرمز".

علاوة على ذلك تناولت هذه الوحدة البوابات المنطقية الأساسية والبوابات المنطقية الأخرى وتم ربطها مع العمليات البوولية. كما عرضنا في هذه الوحدة الدوائر المنطقية، وكيفية تحليلها بواسطة الصيغ المعيارية. وأخيراً عرضنا الدوائر التكاملية مع توضيح لأهم تصنيفاتها وعائلاتها.

7. لمحة مسبقة عن الوحدة اللاحقة

بعد أن تعرفت، على الجبر البوولي، والعمليات البوولية الأساسية، وقوانين الجبر البوولي، والصيغ المعيارية للدوال البوولية. فإنه اصبح بالامكان تقديم "المنطق التوافقي وتطبيقاته" طرق تبسيط الدوال المنطقية وطرق التبسيط الجبري، وطريقة خريطة كارنو، وطريقة كواين ماكلوسكي الجدولية.

وبعد عرض طرق التبسيط سنقوم بشرح عملية تحليل الدوائر المنطقية ووصفها بالدوال المنطقية المبسطة.

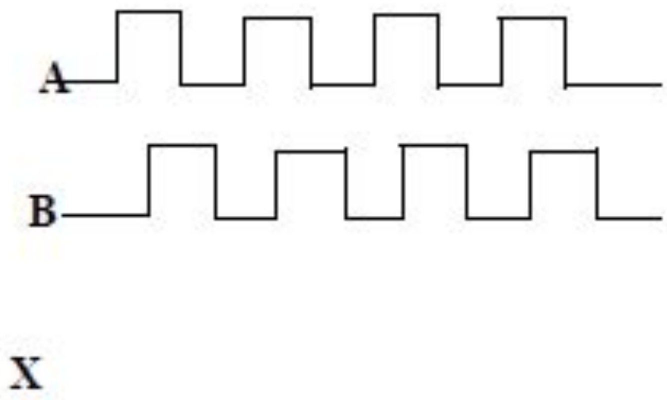
وبعد ذلك سنقوم بعرض عملية بناء الدوائر المنطقية باستعمال البوابات المنطقية المختلفة مثل: دوائر "و" (AND) و "أو" (OR)، ودوائر "ليس و" (NAND)، ودوائر "ليس أو" (NOR).

ثم بعد ذلك سوف نعرض بعض التطبيقات على الدوائر المنطقية في الحاسوب مثل: الجامع (Adder) والطارح (Subtractor)، والمرمز (Decoder)، والمحور (Encoder)، والمرسل المضاعف (Multiplexer)، وذاكرة القراءة فقط (ROM).

تدريبات وأسئلة على الوحدة

تدريبات

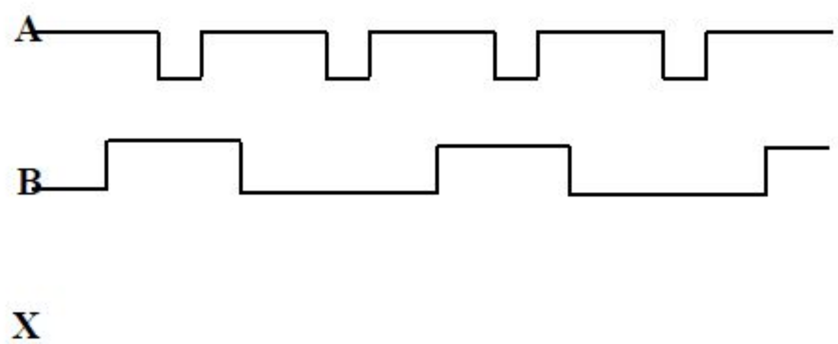
١) ارسم شكل المخطط الزمني للخرج X لبوابة AND ذات المدخلين A,B ، إذا كان شكل نبضات الدخل على المدخلين موضح في شكل -١.



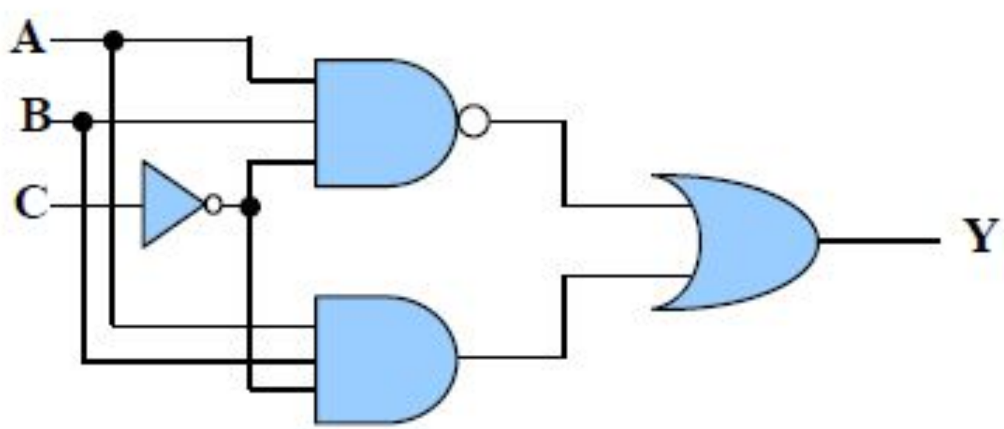
شكل -١

٢) ارسم شكل المخطط الزمني للخرج X لبوابة OR ذات المدخلين A,B ، إذا كان شكل نبضات الدخل على المدخلين موضح في شكل -١.

٣) ارسم شكل المخطط الزمني للخرج X لبوابة NAND ذات المدخلين A,B، إذا كان شكل نبضات الدخل على المدخلين موضح في شكل -٢.



اكتب التعبير البوليني للدائرة الموضحة في شكل -٤.



شكل -٤

٨) ارسم الدائرة المنطقية لكل من التعبيرات المنطقية الآتية:

a) $A\overline{B} + \overline{A}B$

b) $AB + \overline{AB} + \overline{A}BC$

c) $\overline{A}B(C + \overline{D})$

d) $A + B[C + D(B + \overline{C})]$

٩) استنتج الدائرة المنطقية لتمثيل جدول الحقيقة الموضح.

المدخلات			الخرج
A	**B**	**C**	**Y**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

١٠) استنتج جدول الحقيقة للتعبيرات البولينيه الآتية:

a) $(A + B)C$

b) $(A + B)(\overline{B} + C)$

c) $A(AC + \overline{A}B)$

d) $A(A + \overline{A}B)$

١١) باستخدام قواعد الجبر البوليني بسط التعبيرات الآتية:

a) $(A+\bar{B})(A+C)$

b) $\bar{A}B+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BCD+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}E$

b) $(A+\bar{A})(AB+AB\bar{C})$

d) $AB+(\bar{A}+\bar{B})C+AB$

12) طبق نظريات ديمورجان على كل من التعبيرات الآتية:

a) $\overline{A\bar{B}(C+\bar{D})}$

b) $\overline{AB(CD+EF)}$

c) $\overline{(A+\bar{B}+C+\bar{D})}+\overline{ABC\bar{D}}$

d) $\overline{\overline{(\bar{A}+B+C+D)}\;\overline{(A\bar{B}\bar{C}D)}}$

السؤال الرابع: (25علامة)

1) الاقتران $f(A,B,C,D)$ هو اقتران تكون قيمته 1 في حال كان عدد المداخل التي تساوي 1 اكبر من او يساوي المداخل التي تساوي 0 ، حيث يتم استخدام شيفرة BCD لتمثيل الأرقام العشرية على المدخل.

1. **أوجد جدول الجدارة لهذا الاقتران (10علامات)**
2. **بسط الاقتران باستخدام التبسيط الجبري (10 علامات)**
3. **ارسم الاقتران بعد عملية التبسيط (5 علامات)**

---

١. أوجد قيمة المينترميز إذا علمت أن الماكستيرميز $F(A,B,C)=\Pi M(1,4,6,7)$ ؟

٢. أوجد قيمة ضرب المجاميع الماكستيرميز $F(A,B,C)=AB+B'C$؟

---

١. مثل التعبير البولي التالي باستعمال مخططات فين؟

$F(A,B,C)=A'B+BC'$

٢. اثبت صحة المعادلة التالية:

$(AB)''=(A'+B')'$

٣. بسط الدالة البولية التالية:

$F(A,B,C,D)=A'C'D' + AC'+BCD+A'CD'+A'BC+AB'C'$

إنتهت الوحدة الثانية

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

أ. محمد حسن أبو حمادة
فرع شمال غزة