В мире правильных многогранников

Правильных многогранников вызывающе мало, но этот весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук.

Л.Кэррол

Признаки правильных многогранников:

1) Многогранник – выпуклый
2) Все его грани – равные правильные многоугольники
3) В каждой вершине сходится одинаковое число рёбер
4) Равны все двугранные углы, содержащие две грани с общим ребром.

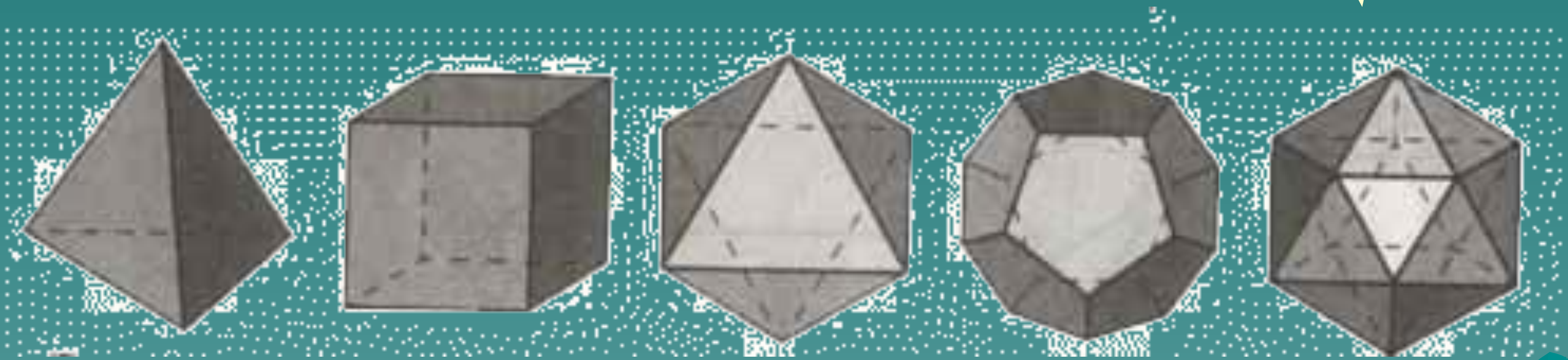
Виды правильных многогранников:

Правильный тетраэдр

Октаэдр

Додекаэдр

Икосаэдр



Куб (или Гексаэдр)

Названия многогранников

пришли из Древней Греции,

в них указывается число граней:

«эдра» – грань;

«тетра» – *4;*

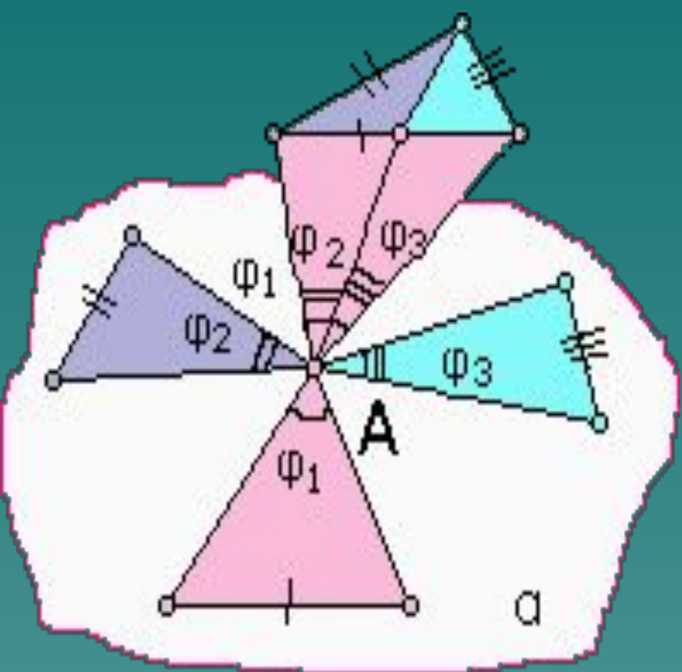
«гекса» – *6;*

«окта» – *8;*

«икоса» – *20;*

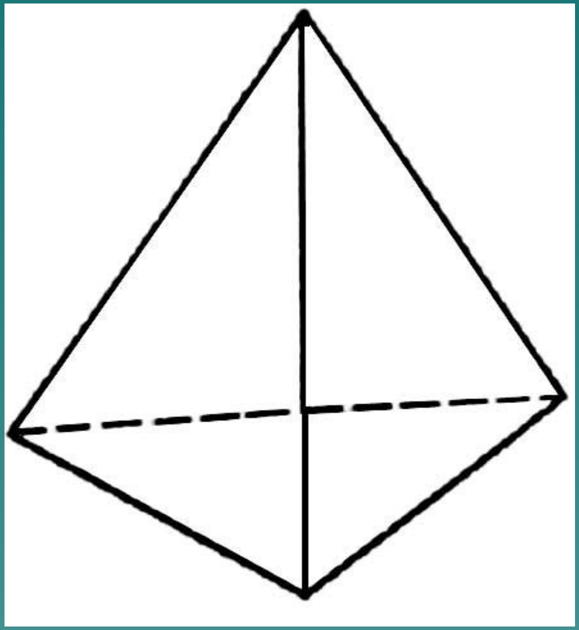
«додека» – *12.*

Доказательство существования всего пяти правильных многогранников



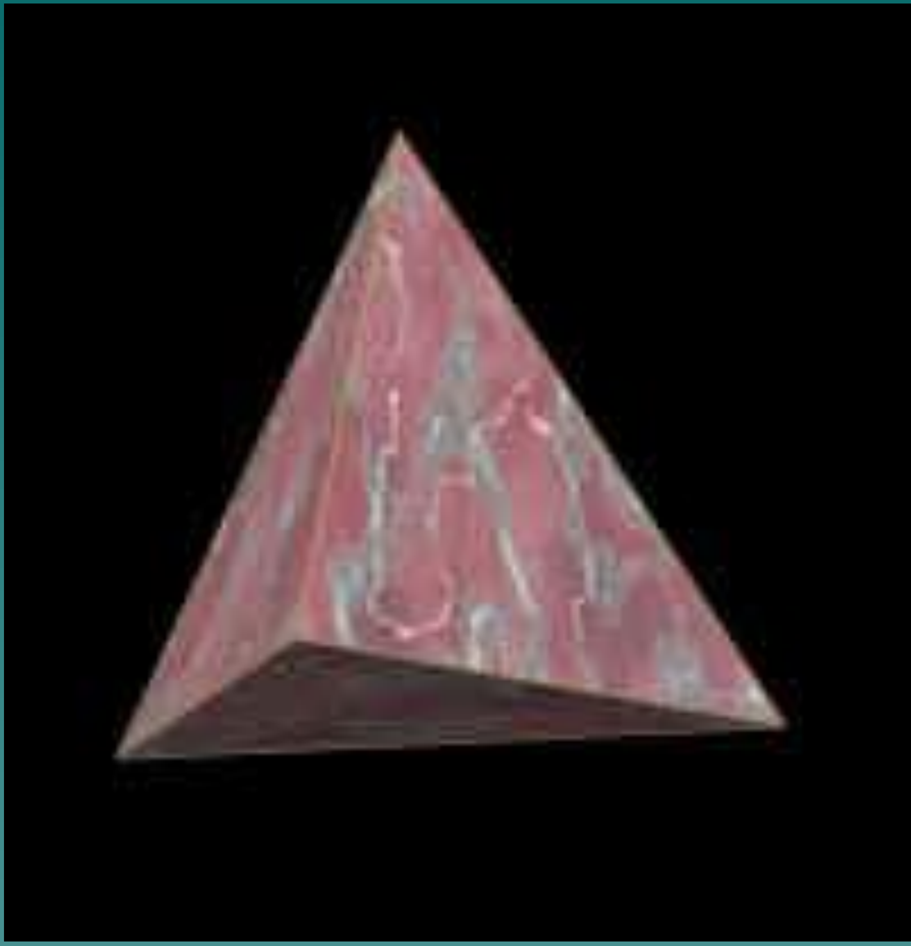
В правильном n-угольнике при n>=6 угол не меньше 120º. С другой стороны, при каждой вершине многогранника должно быть не менее 3 плоских углов. Поэтому если бы существовал правильный многогранник, у которого грани – правильные n-угольники при n>=6, то сумма плоских углов при каждой вершине такого многогранника была бы не меньше чем 120º * 3=360º . Но это невозможно, так как сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше 360º.

Правильный тетраэдр



Составлен из четырёх равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трёх треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна *180º.*

Правильный тетраэдр:



Характеристика:

Число граней – ***4***

Число сторон грани - ***3***

Число вершин – ***4***

Число ребер - ***6***

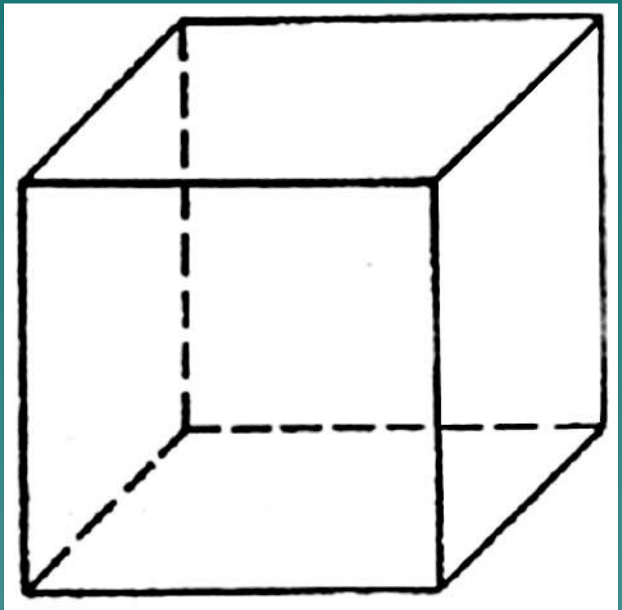
Элементы симметрии:

Центр симметрии – ***нет***

Осей симметрии - ***3***

Плоскостей симметрии - ***6***

Куб (гексаэдр)



Составлен из шести квадратов. Каждая вершина куба является вершиной трёх квадратов. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна *270º.*

Куб (или Гексаэдр):

Характеристика:

Число граней – ***6***

Число сторон грани – ***4***

Число вершин – ***8***

Число ребер - ***12***

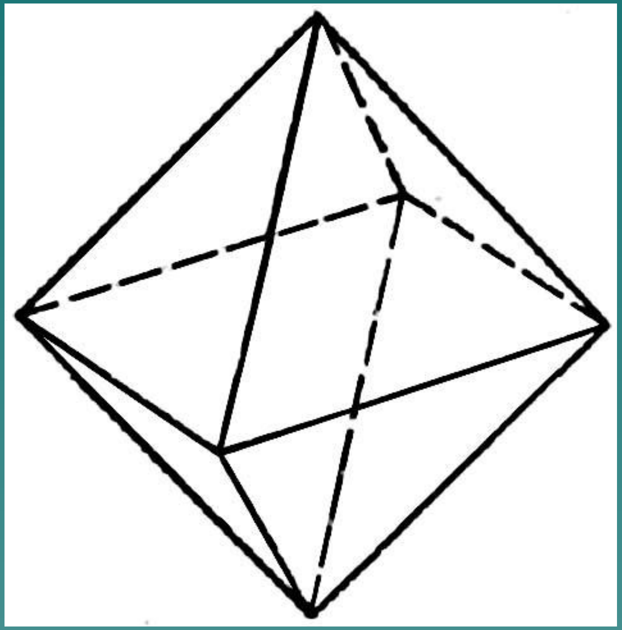
Элементы симметрии:

Центр симметрии – ***точка пересечения его диагоналей***

Осей симметрии - ***9***

Плоскостей симметрии - ***9***

Правильный октаэдр



Составлен из восьми равносторонних треугольников. Каждая вершина октаэдра является вершиной четырёх треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине *240º.*

Правильный октаэдр:

Характеристика:

Число граней – ***8***

Число сторон грани – ***3***

Число вершин – ***6***

Число ребер - ***12***

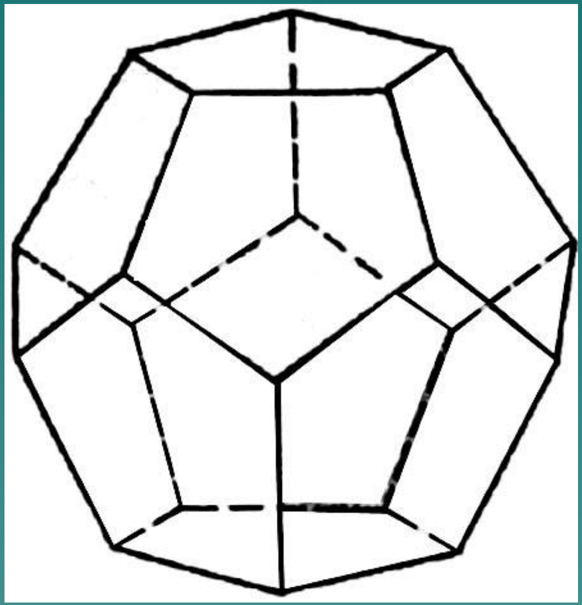
Элементы симметрии:

Центр симметрии – ***один***

Осей симметрии - ***9***

Плоскостей симметрии - ***9***

Правильный додекаэдр



Составлен из двенадцати правильных пятиугольников. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трёх правильных пятиугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна

324º

Правильный додекаэдр:

Характеристика:

Число граней – ***12***

Число сторон грани – ***5***

Число вершин – ***20***

Число ребер - ***30***

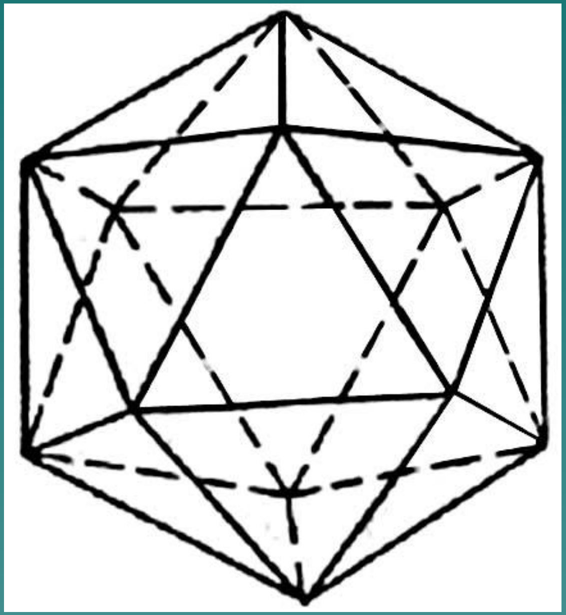
Элементы симметрии:

Центр симметрии – ***один***

Осей симметрии - ***15***

Плоскостей симметрии - ***15***

Правильный икосаэдр



Составлен из двадцати равносторонних треугольников. Каждая вершина икосаэдра является вершиной пяти треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна *300º.*

Правильный икосаэдр:

Характеристика:

Число граней – ***20***

Число сторон грани – 3

Число вершин – ***12***

Число ребер - ***30***

Элементы симметрии:

Центр симметрии – ***один***

Осей симметрии - ***15***

Плоскостей симметрии - ***15***

Платон

(около 429 – 347 гг. до н.э.)

Платон **(Настоящее имя – Аристокл) – греческий философ, мудрец и математик.**

В Афинах в 387 году Платон основал философскую школу – Академию, где большое внимание уделялось математике и, в частности, геометрии, как науке о самых прекрасных мысленных фигурах, а также астрономии. В течение всей жизни его душу волновали также высокие нравственные цели, одной из которых был идеал возрождения Греции.

Правильные многогранники в философской картине мира Платона

Правильные многогранники иногда называют Платоновыми телами, поскольку они занимают видное место в философской картине мира, разработанной великим мыслителем Древней Греции Платоном (ок. 428 – ок. 348 до н.э.).

Платон считал, что мир строится из четырёх «стихий» – огня, земли, воздуха и воды, а атомы этих «стихий» имеют форму четырёх правильных многогранников.

Тетраэдр олицетворял огонь, поскольку его вершина устремлена вверх, как у разгоревшегося пламени.

Икосаэдр – как самый обтекаемый – воду.

Куб – самая устойчивая из фигур – землю.

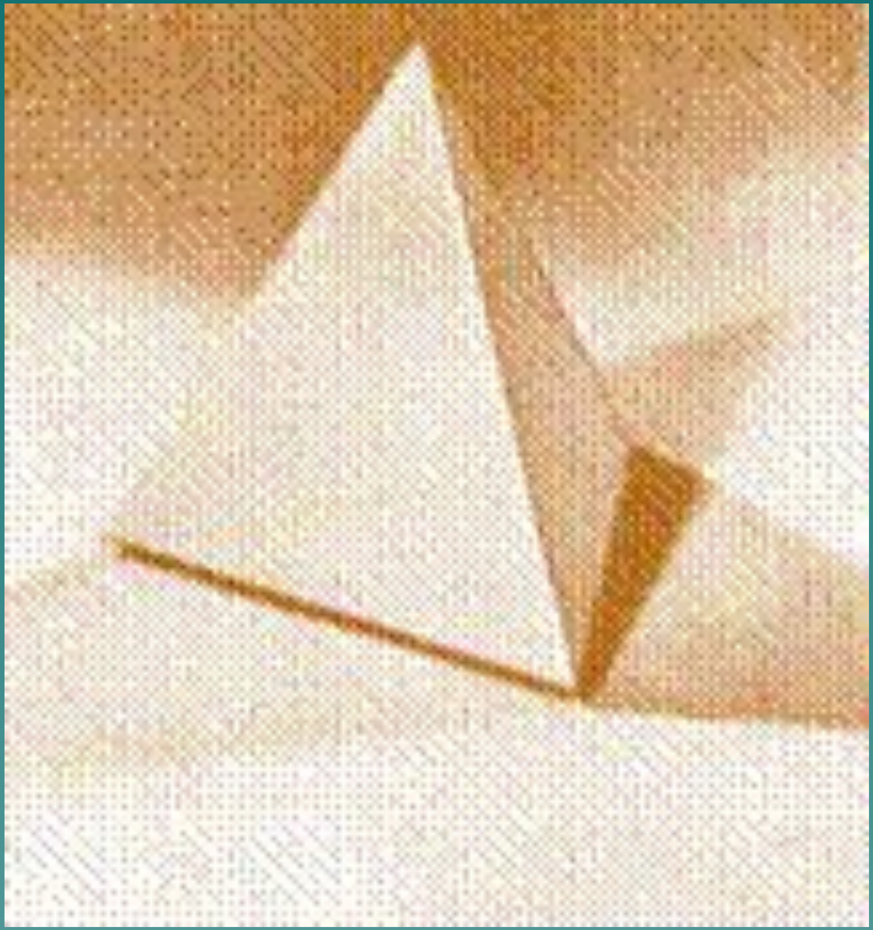
Октаэдр – воздух.

В наше время эту систему можно сравнить с четырьмя состояниями вещества – твёрдым, жидким, газообразным и плазменным.

Пятый многогранник – додекаэдр символизировал весь мир и почитался главнейшим.

Это была одна из первых попыток ввести в науку идею систематизации.

Устройство мироздания по идее Платона

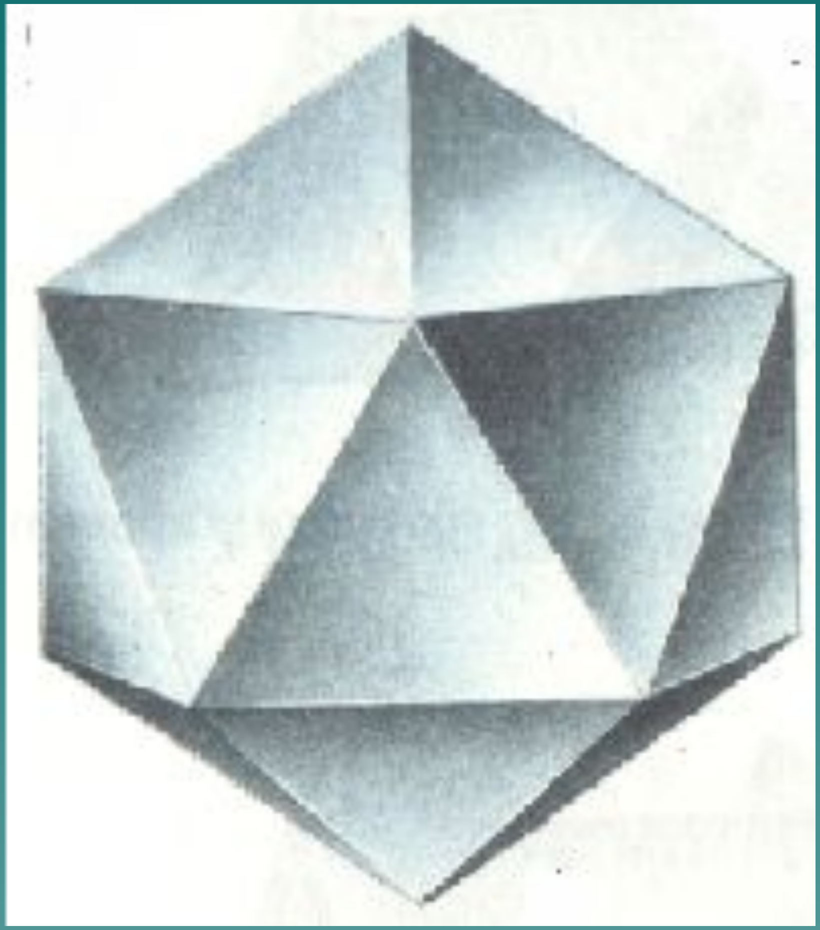


Тетраэдр

=

Огонь

Устройство мироздания по идее Платона

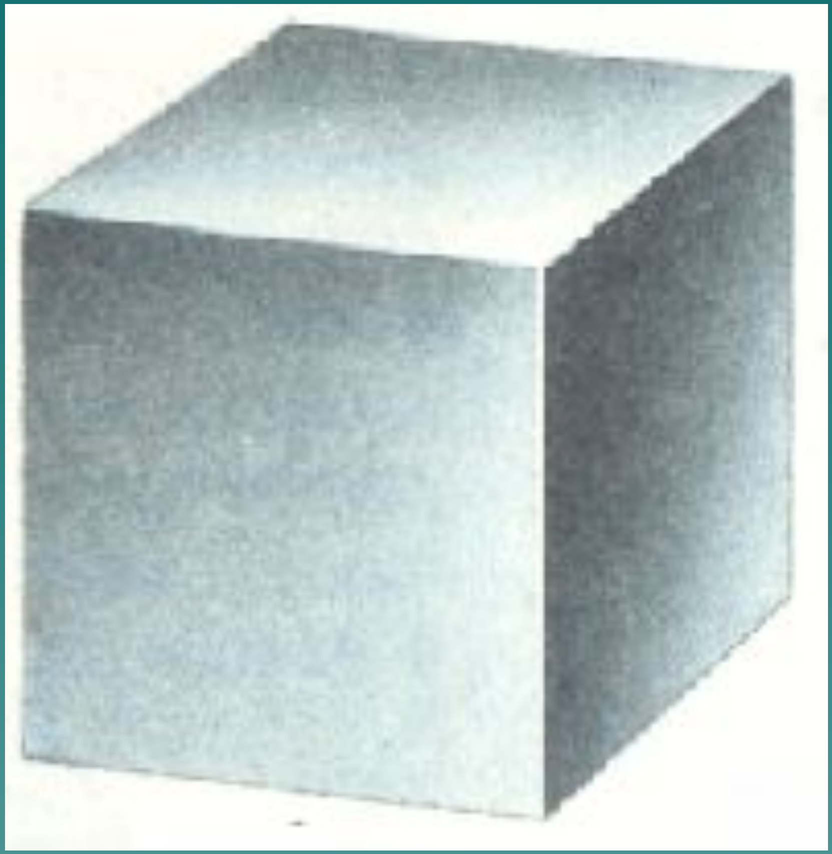


Икосаэдр

=

Вода

Устройство мироздания по идее Платона

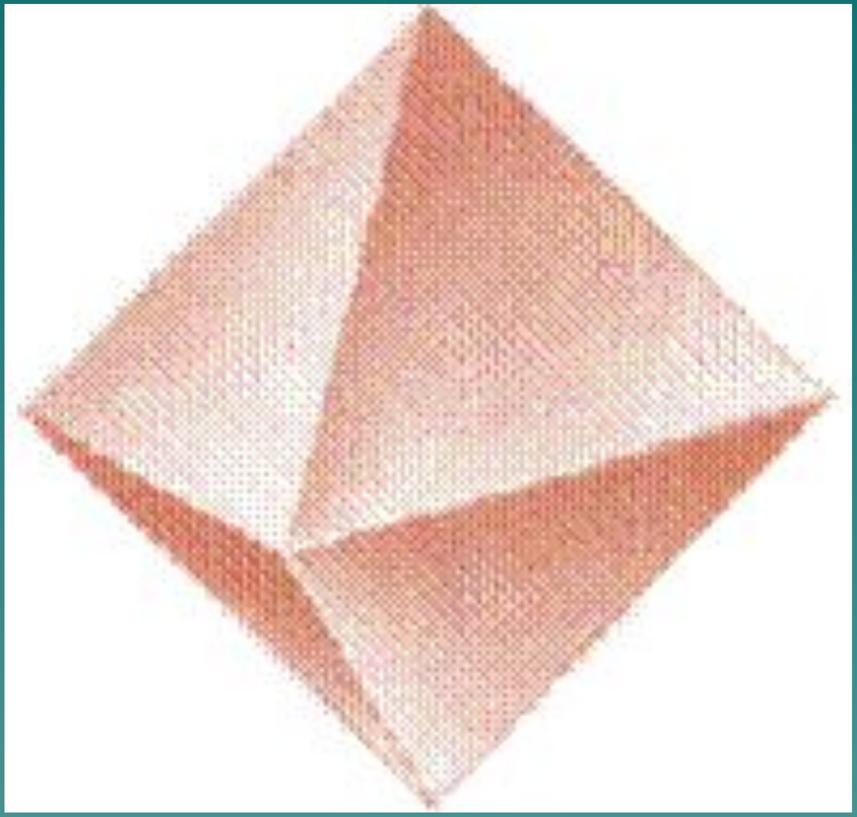


Куб (или Гексаэдр)

=

Земля

Устройство мироздания по идее Платона

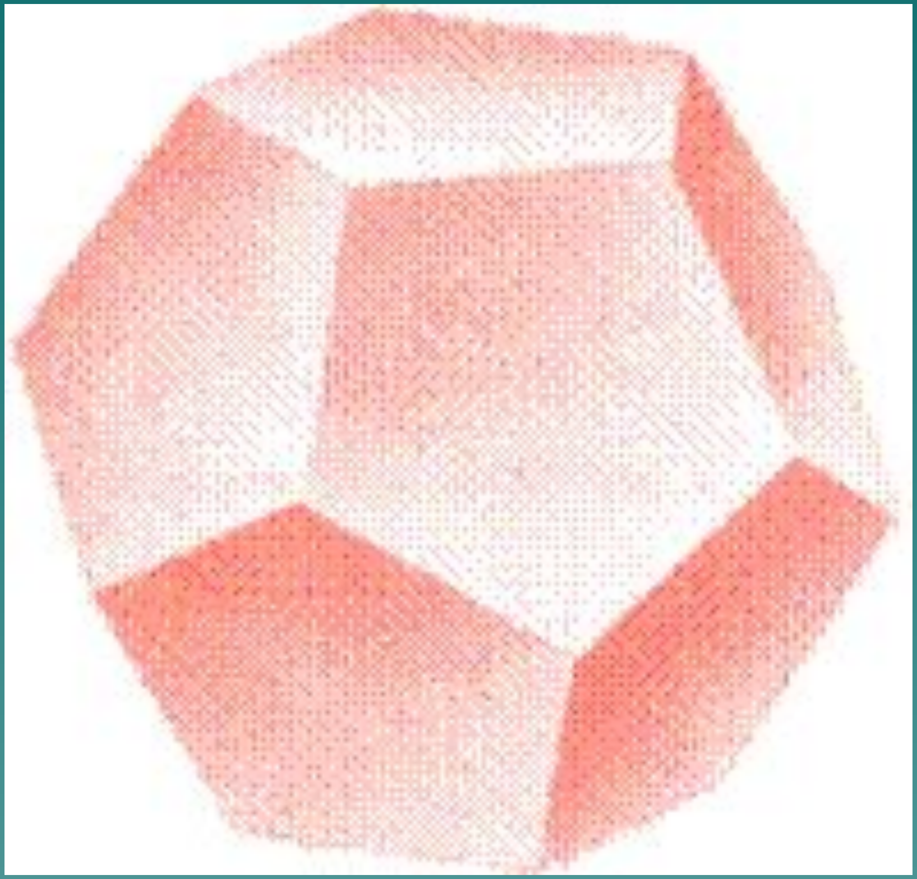


Октаэдр

=

Воздух

Устройство мироздания по идее Платона

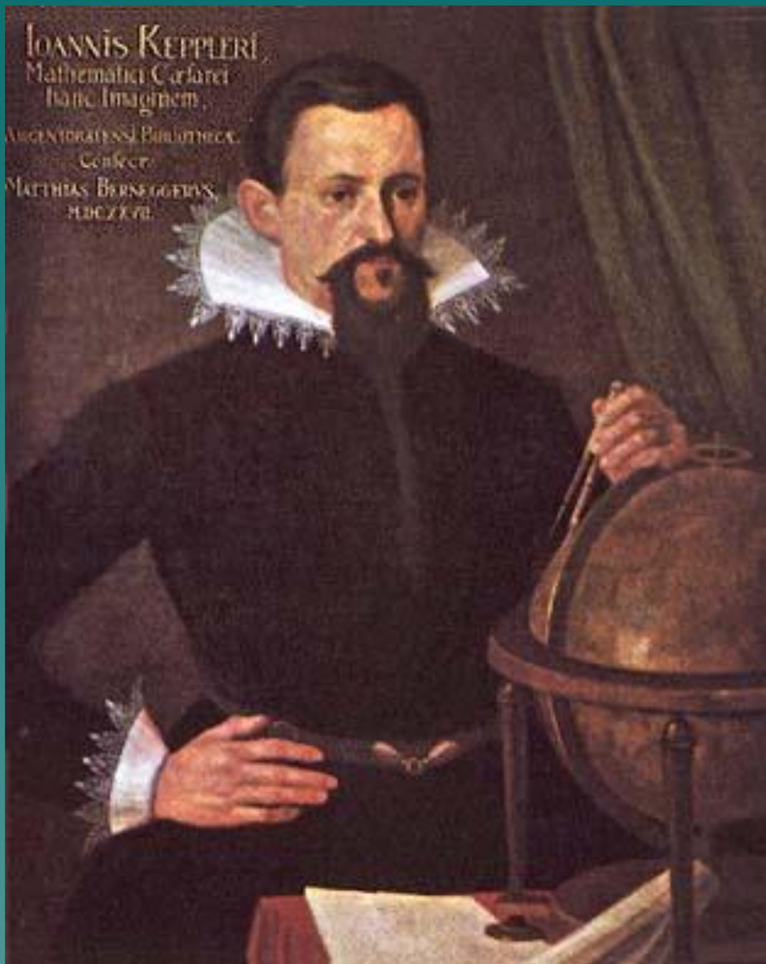


Додекаэдр

=

Вселенная

Иоганн Кеплер



Иоганн Кеплер **- немецкий астроном и математик. Один из создателей современной астрономии – открыл законы движения планет (законы Кеплера), заложил основы теории затмений, изобрел телескоп, в котором объектив и окуляр - двояковыпуклые линзы.**

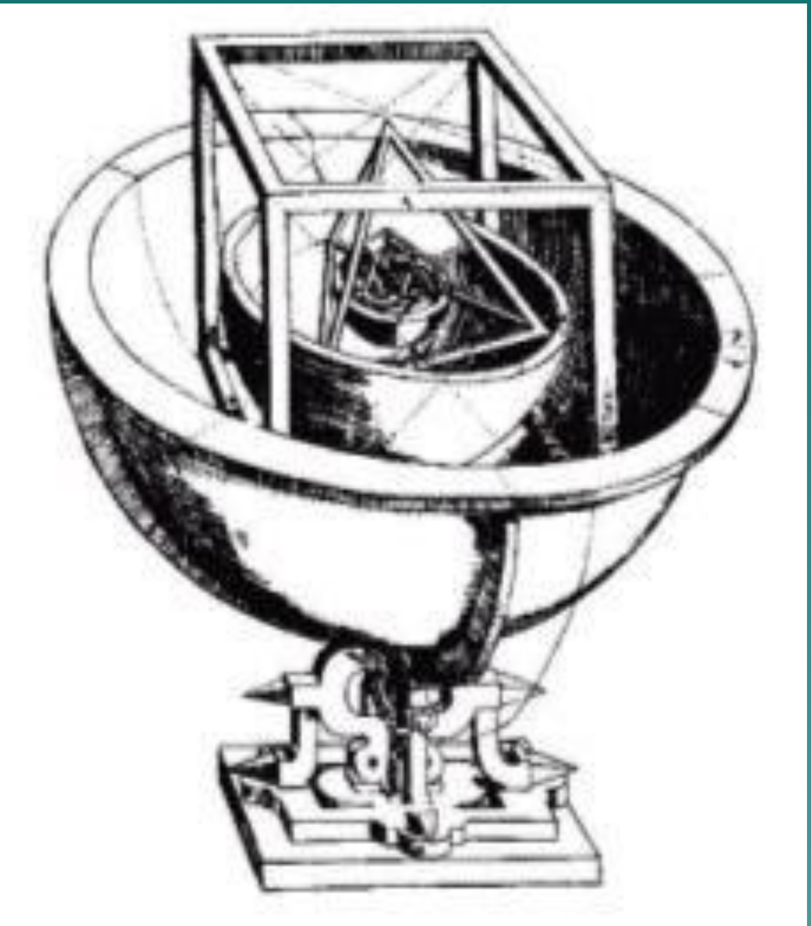
(1571-1630)

Космологическая гипотеза Кеплера

Попытка связать некоторые свойства Солнечной системы со свойствами правильных многогранников.

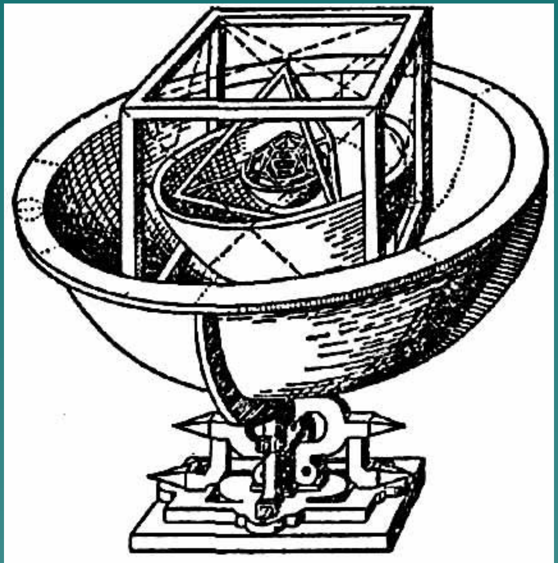
Кеплер предположил, что расстояния между шестью известными тогда планетами выражаются через размеры пяти правильных выпуклых многогранников (Платоновых тел). Между каждой парой "небесных сфер", по которым, согласно этой гипотезе, вращаются планеты, Кеплер вписал одно из Платоновых тел.

Космологическая гипотеза Кеплера



Вокруг сферы Меркурия, ближайшей к Солнцу планеты, описан октаэдр. Этот октаэдр вписан в сферу Венеры, вокруг которой описан икосаэдр. Вокруг икосаэдра описана сфера Земли, вокруг этой сферы - додекаэдр. Додекаэдр вписан в сферу Марса, вокруг которой описан тетраэдр. Вокруг тетраэдра описана сфера Юпитера, вписанная в куб. Наконец, вокруг куба описана сфера Сатурна.

«Космический кубок» Кеплера



Модель Солнечной системы И. Кеплера

Кеплер предположил, что существует связь между пятью правильными многогранниками и шестью открытыми к тому времени планетами Солнечной системы.

Согласно этому предположению, в сферу орбиты Сатурна можно вписать куб, в который вписывается сфера орбиты Юпитера. В неё, в свою очередь, вписывается тетраэдр, описанный около сферы орбиты Марса. В сферу орбиты Марса вписывается додекаэдр, к который вписывается сфера орбиты Земли. А она описана около икосаэдра, в который вписана сфера орбиты Венеры. Сфера этой планеты описана около октаэдра, в который вписывается сфера Меркурия.

Такая модель Солнечной системы (рис. 6) получила название «Космического кубка» Кеплера. Результаты своих вычислений учёный опубликовал в книге «Тайна мироздания». Он считал, что тайна Вселенной раскрыта.

Год за годом учёный уточнял свои наблюдения, перепроверял данные коллег, но, наконец, нашёл в себе силы отказаться от заманчивой гипотезы. Однако её следы просматриваются в третьем законе Кеплера, где говориться о кубах средних расстояний от Солнца.

Икосаэдро-додекаэдровая структура Земли

Икосаэдро-додекаэдровая структура Земли

Идеи Платона и Кеплера о связи правильных многогранников с гармоничным устройством мира и в наше время нашли своё продолжение в интересной научной гипотезе, которую в начале 80-х гг. высказали московские инженеры В. Макаров и В. Морозов. Они считают, что ядро Земли имеет форму и свойства растущего кристалла, оказывающего воздействие на развитие всех природных процессов, идущих на планете. Лучи этого кристалла, а точнее, его силовое поле, обуславливают икосаэдро-додекаэдровую структуру Земли (рис. 7). Она проявляется в том, что в земной коре как бы проступают проекции вписанных в земной шар правильных многогранников: икосаэдра и додекаэдра.

Многие залежи полезных ископаемых тянутся вдоль икосаэдро-додекаэдровой сетки; 62 вершины и середины рёбер многогранников, называемых авторами узлами, обладают рядом специфических свойств, позволяющих объяснить некоторые непонятные явления. Здесь располагаются очаги древнейших культур и цивилизаций: Перу, Северная Монголия, Гаити, Обская культура и другие. В этих точках наблюдаются максимумы и минимумы атмосферного давления, гигантские завихрения Мирового океана. В этих узлах находятся озеро Лох-Несс, Бермудский треугольник.

Дальнейшие исследования Земли, возможно, определят отношение к этой научной гипотезе, в которой, как видно, правильные многогранники занимают важное место.

Таблица № 1

Правильный многогранник	Число		
	граней	вершин	рёбер
Тетраэдр	4	4	6
Куб	6	8	12
Октаэдр	8	6	12
Додекаэдр	12	20	30
Икосаэдр	20	12	30

Таблица № 2

Правильный многогранник	Число	
	граней и вершин (Г + В)	рёбер (Р)
Тетраэдр	4 + 4 = 8	6
Куб	6 + 8 = 14	12
Октаэдр	8 + 6 = 14	12
Додекаэдр	12 + 20 = 32	30
Икосаэдр	20 + 12 = 32	30

Формула Эйлера

Сумма числа граней и вершин любого многогранника

равна числу рёбер, увеличенному на 2.

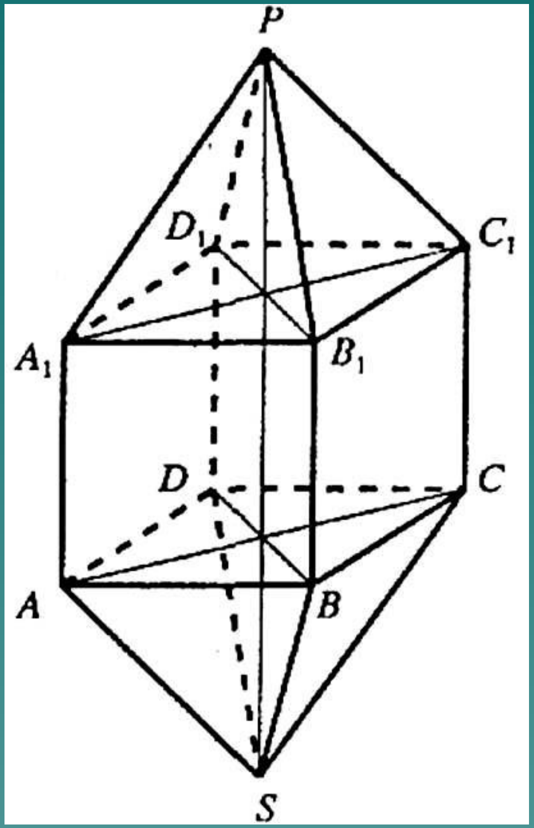
$$Г + В = Р + 2$$

Число граней плюс число вершин минус число рёбер

в любом многограннике равно 2.

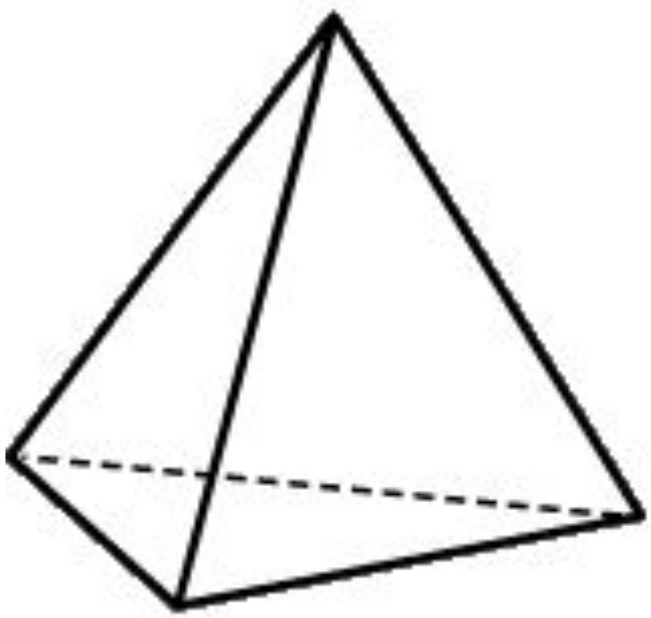
$$Г + В - Р = 2$$

Задача



Определите количество граней, вершин и рёбер многогранника, изображённого на рисунке 9. Проверьте выполнимость формулы Эйлера для данного многогранника.

Формулы для Тетраэдра



a - ребро,
V - объем, S - площадь поверхности, R - радиус описанной сферы,
r - радиус вписанной сферы,
H - высота.

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

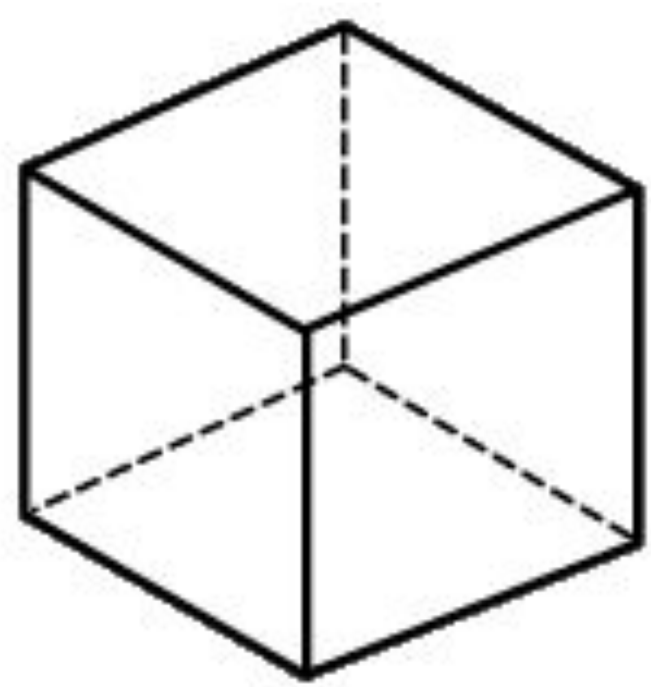
$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$S = a^2\sqrt{3}$$

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

Формулы для Куба



a - ребро,
V - объем, S - площадь поверхности, R - радиус описанной сферы,
r - радиус вписанной сферы,
H - высота.

$$V = a^3$$

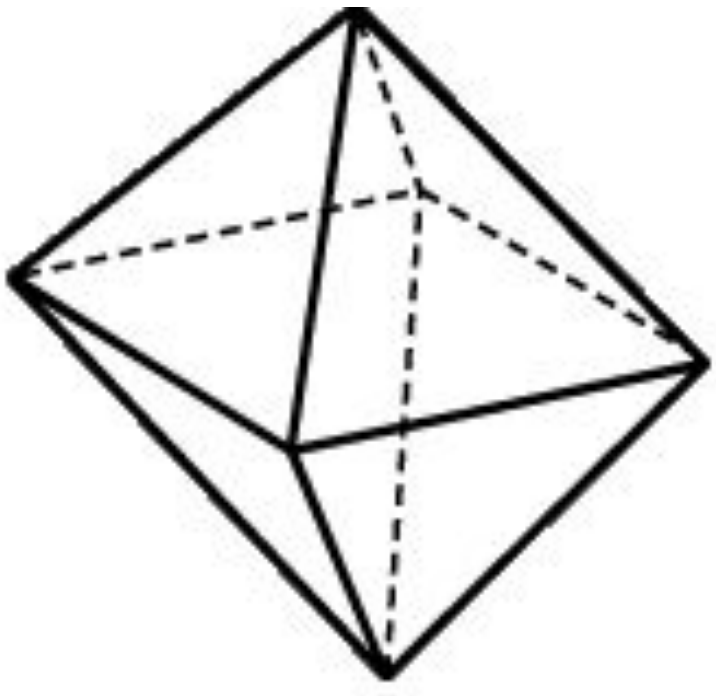
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$H = a$$

$$S = 6a^2$$

$$r = \frac{a}{2}$$

Формулы для Октаэдра



a - ребро,
V - объем, S - площадь поверхности, R - радиус описанной сферы,
r - радиус вписанной сферы,

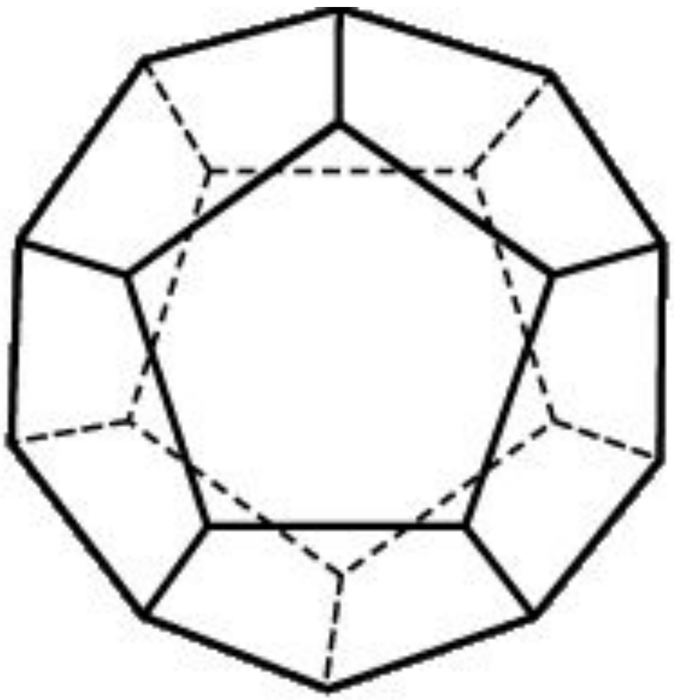
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$S = 2a^2\sqrt{3}$$

Формулы для Додекаэдра



a - ребро,
V - объем, S - площадь поверхности, R - радиус описанной сферы,
r - радиус вписанной сферы,

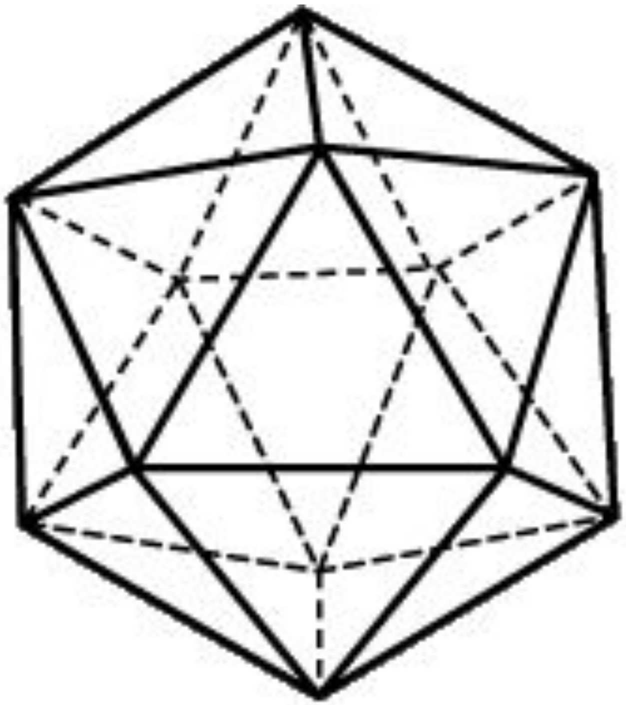
$$V = \frac{a^3\left(15 + 7\sqrt{5}\right)}{4}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{5}\right)}{4}$$

$$S = 3a^2\sqrt{5\left(5 + 2\sqrt{5}\right)}$$

$$r = \frac{a\sqrt{10\left(25 + 11\sqrt{5}\right)}}{20}$$

Формулы для Икосаэдра



a - ребро,
V - объем, S - площадь поверхности, R - радиус описанной сферы,
r - радиус вписанной сферы,

$$V = \frac{5a^3\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$$

$$R = \frac{a\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{4}$$

$$S = 5a^2\sqrt{3}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3\left(3+\sqrt{5}\right)}}{12}$$

«Тайная вечеря»

Сальвадор Дали