



Дьердь По́йа

Задача, которую вы решаете, может быть очень скромной, но если она бросает вызов вашей любознательности и если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы.

Дьердь По́йа

- Американский математик. Родился в Венгрии в 1887 г.
- С 1914 по 1940 г. работал в Цюрихе (Швейцария).
- С 1953 г. работал в Принстонском университете (США)
- Основные труды относятся к функциональному анализу, математической статистике и комбинаторике.
- На русский язык вышли работы По́йа: «Задачи и теоремы анализа», «Математика и правдоподобные рассуждения», «Как решать задачу», «Математическое открытие».

Проверь свои знания

Дайте определение квадратного трехчлена.

Многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x – переменная, a, b, c – некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Как найти корни квадратного трехчлена?

Приравнять к нулю и решить квадратное уравнение.

Сформулируйте теорему Виета для полного квадратного уравнения.

Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Проверь свои знания

Что называют разложением многочлена на множители?

Представление многочлена в виде произведения многочленов.

Какие способы разложения многочлена на множители вам известны?

- 1. Вынесение множителя за скобку;*
- 2. Способ группировки;*
- 3. Использование формул сокращенного умножения.*

Решите уравнение

$$x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0. \text{ (ГИА 2012).}$$

Решение:

$$(x^3 - 6x^2) - (4x - 24) = 0;$$

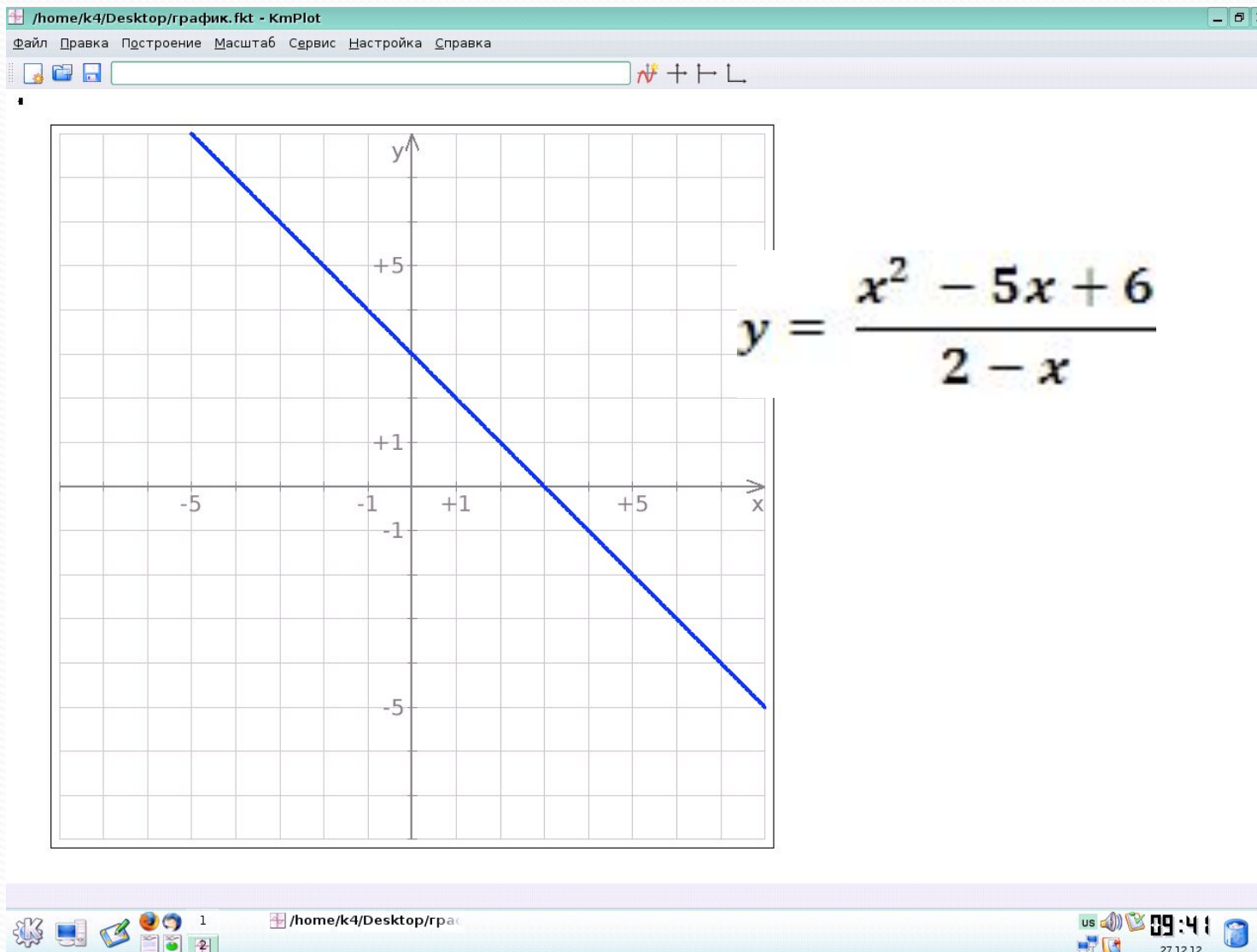
$$x^2(x - 6) - 4(x - 6) = 0;$$

$$(x^2 - 4)(x - 6) = 0;$$

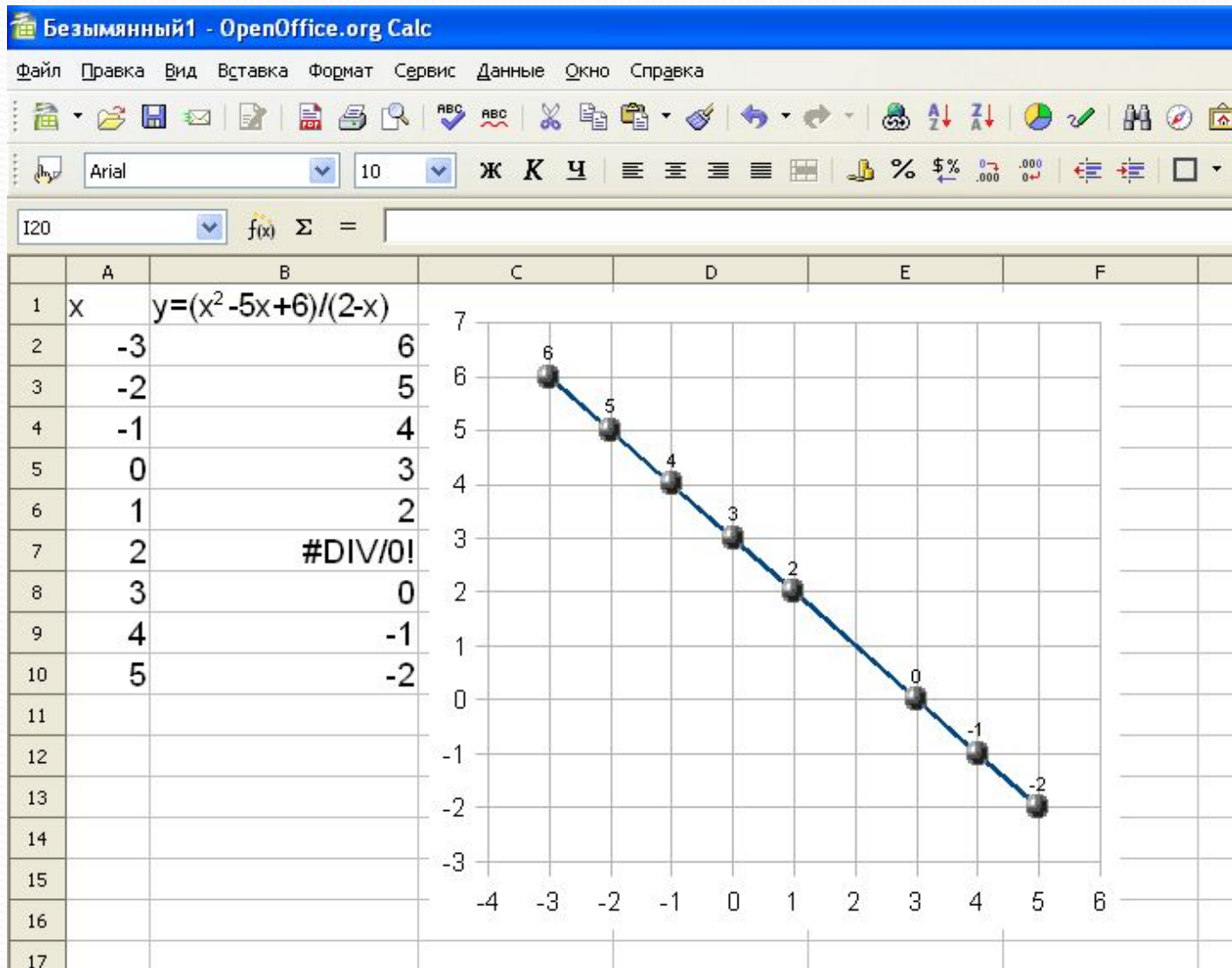
$$x^2 - 4 = 0 \text{ или } x - 6 = 0;$$

Ответ: -2; 2; 6

График функции



В электронной таблице



Постройте график функции

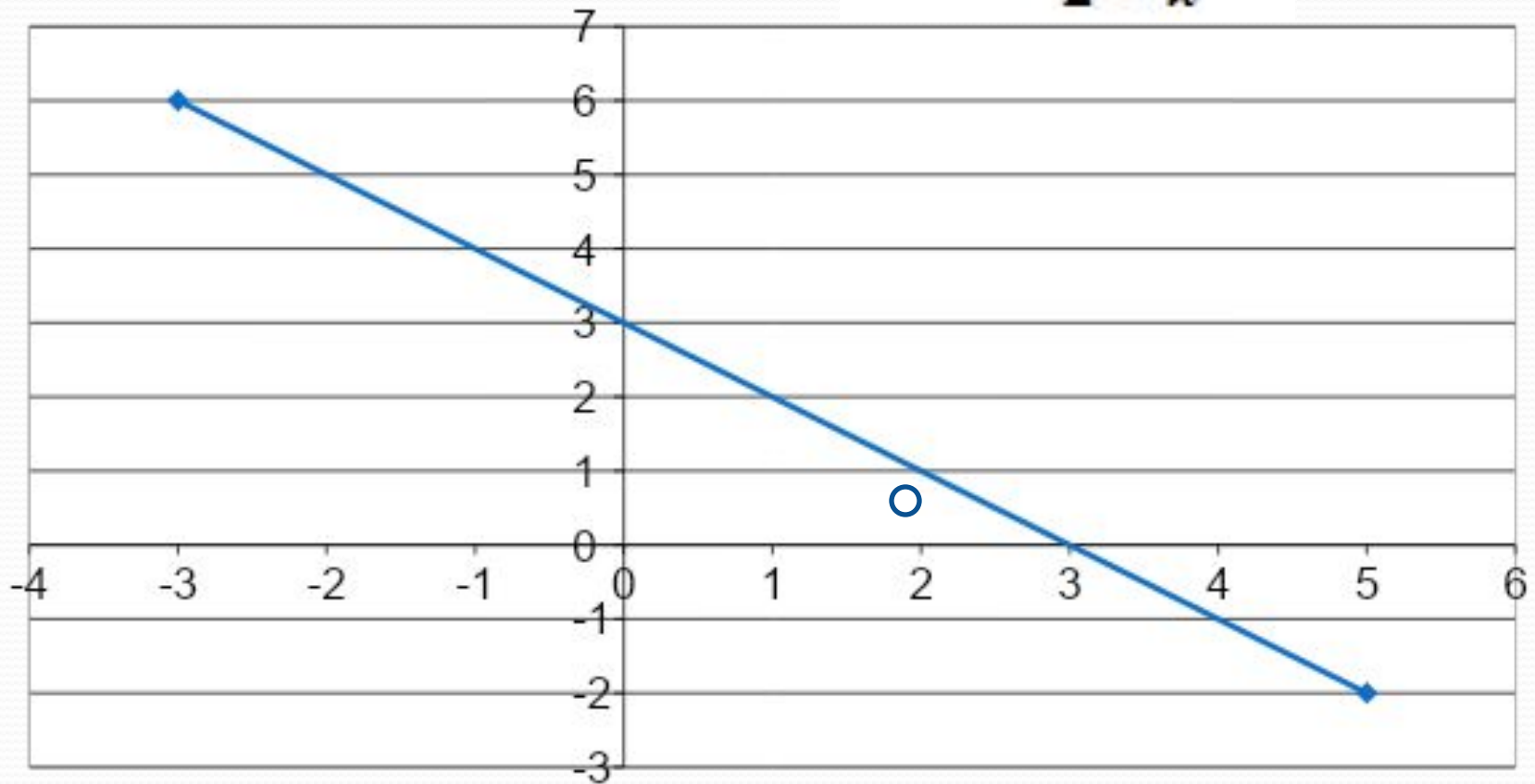
ГИА (2013 г.).

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{2 - x}$$

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{2 - x} = \frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)} = 3 - x.$$

$$x \neq 2$$

График функции $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{2 - x}$



Разложить на множители

$$3x^2 - 21x + 30$$

Решение:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 21x + 30 &= 3(x^2 - 7x + 10) = 3(x^2 - 2x - 5x + 10) = \\ &= 3((x^2 - 2x) - (5x - 10)) = 3(x(x - 2) - 5(x - 2)) = \\ &= 3(x - 2)(x - 5). \end{aligned}$$

Гипотеза:

$$\bullet \mathbf{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Теорема

Если x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Доказательство: $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.

Так как корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Отсюда $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$, $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$. Поэтому

$ax^2 + bx + c = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) = a(x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2)$
 $= a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = a((x - x_1)(x - x_2))$, ч.т.д.

Можно ли разложить квадратный трехчлен на множители, если он не имеет корней?

Предположим, что квадратный трехчлен можно представить в виде произведения многочленов первой степени:

$ax^2 + bx + c = (kx + m)(px + q)$, где k, m, p, q – некоторые числа, причем $k \neq 0$ и $p \neq 0$.

Найдите, при каких x произведение $(kx + m)(px + q) = 0$?

При $x = -\frac{m}{k}$ и $x = -\frac{q}{p}$.

Следовательно, при этих значениях x обращается в нуль и трехчлен $ax^2 + bx + c$, то есть числа $-\frac{m}{k}$ и $-\frac{q}{p}$ являются его корнями.

Мы пришли к противоречию, так как по условию этот трехчлен корней не имеет.

- **Вывод: если квадратный трехчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на множители**

Применение теоремы:

- № 76(а). Разложите на множители квадратный трехчлен:
 $3x^2 - 24x + 21$.

- № 84(б). Сократите дробь:

$$\frac{2y^2 + 9y - 5}{4y^2 - 1}$$

- № 86. Чем различаются графики функции

$$y = x - 4 \quad \text{и} \quad y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$$

Домашнее задание:

- Пункт 4 (прочитать примеры 1, 2, 3). Решить № 77(а, б) и № 84 (а).

