Презентация урока по алгебре в 9 классе.

- Носкова Н.М., учитель математики
- ГБОУ лицея № 344 Невского района
- Санкт - Петербурга

Тема: Применение свойств квадратичной функции при решении уравнений с параметром.

Цель урока:

- обобщить и систематизировать изученные свойства квадратичной функции;
- научить учащихся самостоятельно формулировать теоремы о корнях квадратного уравнения;
- научить применять полученные теоремы для решения задач с параметром;
- развивать мыслительную деятельность, умение анализировать, обобщать, делать выводы.

- **Функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ называется квадратичной.**

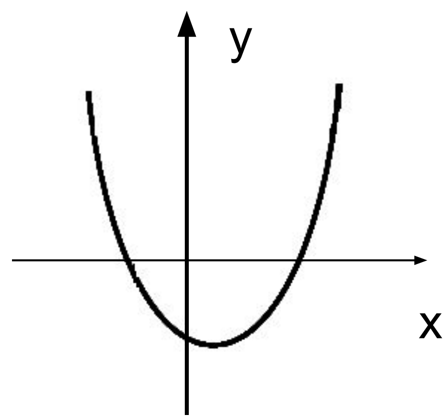
- **График квадратичной функции – парабола.**

- **Если старший коэффициент квадратного трехчлена больше нуля, то ветви параболы направлены вверх.**

- **Если старший коэффициент квадратного трехчлена меньше нуля, то ветви параболы направлены вниз.**

- **Если дискриминант больше нуля, то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках.**
- **Если дискриминант равен нулю, то парабола касается оси абсцисс.**
- **Если дискриминант меньше нуля, то парабола не имеет общих точек с осью абсцисс.**
- **Абсцисса вершины параболы равна** $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- **Парабола пересекает ось ординат в точке (0; с).**

1. На рисунке изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Какое из соотношений справедливо:



а) $ab > 0$; б) $ca > 0$; в) $ab < 0$; г) $bc < 0$?

2. При каких значениях a парабола $y = ax^2 - 2x + 25$ касается оси ОХ?

а) $a = 25$, б) $a = 0$ и $a = 0{,}04$; в) $a = 0{,}04$.

3. При каких значениях k уравнение $kx^2 - (k - 7)x + 9 = 0$ имеет два равных положительных корня?

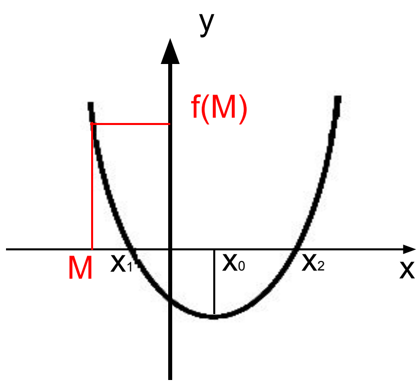
а) $k = 49$, $k = 1$; б) $k = 1$; в) $k = 49$.

4. При каких значениях a уравнение $ax^2 - 6x + a = 0$ имеет два различных корня?

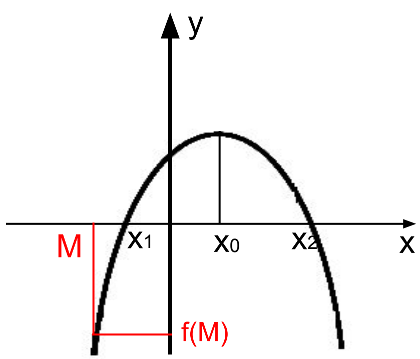
а) $(-3; 0) \cup (0; 3)$; б) $(-3; 3)$; в) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Правило 1.

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ больше заданного числа М, если имеет место система:



$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 > M, \\ f(M) > 0, \end{cases}$$



$$\begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 > M, \\ f(M) < 0; \end{cases}$$

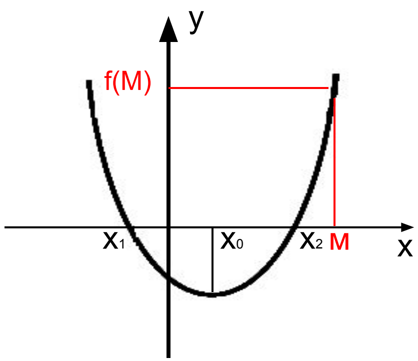
$$\begin{cases} a \cdot f(M) > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 > M. \end{cases}$$

Правило 1.

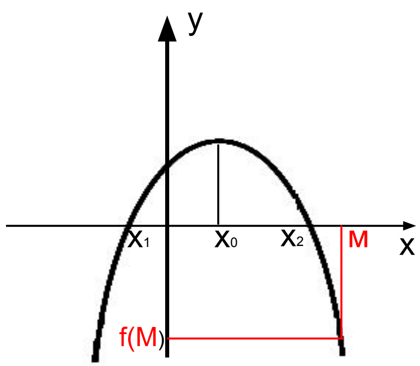
$$M < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ D \ge 0, \\ x_0 > M, \\ f(M) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ D \ge 0, \\ x_0 > M, \\ f(M) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(M) > 0, \\ D \ge 0, \\ x_0 > M. \end{cases}$$

Правило 2.

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ меньше заданного числа М, если имеет место система:



$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 < M, \\ f(M) > 0, \end{cases}$$



$$\begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 < M, \\ f(M) < 0; \end{cases}$$

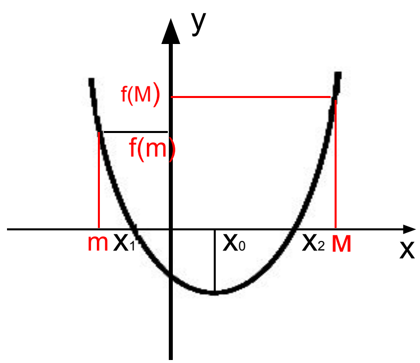
$$\begin{cases} a \cdot f(M) > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 < M. \end{cases}$$

Правило 2.

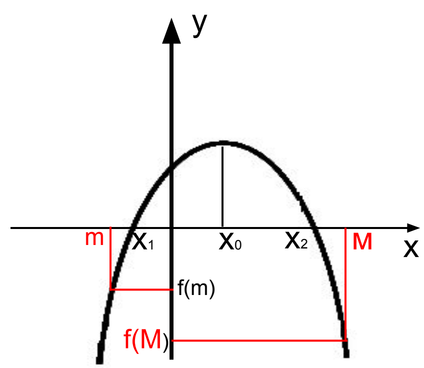
$$x_1 \le x_2 < M \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ D \ge 0, \\ x_0 < M, \\ f(M) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ D \ge 0, \\ x_0 < M, \\ f(M) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(M) > 0, \\ D \ge 0, \\ x_0 < M. \end{cases}$$

Правило 3.

Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ больше заданного числа m и меньше заданного числа M, если имеет место система:



$$\begin{cases} a>0, \\ D\geq 0, \\ m<x_0<M, \\ f(m)>0, \\ f(M)>0, \end{cases}$$



$$\begin{cases} a<0, \\ D\geq 0, \\ m<x_0<M, \\ f(m)<0, \\ f(M)<0; \end{cases}$$

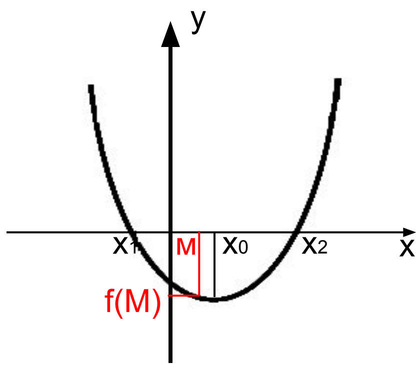
$$\begin{cases} a\cdot f(m)>0, \\ a\cdot f(M)>0, \\ D\geq 0, \\ m<x_0<M. \end{cases}$$

Правило 3.

$$m < x_1 \le x_2 < M \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ D \ge 0, \\ m < x_0 < M, \\ f(m) > 0, \\ f(M) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ D \ge 0, \\ m < x_0 < M, \\ f(m) < 0, \\ f(M) < 0; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(m) > 0, \\ a \cdot f(M) > 0, \\ D \ge 0, \\ m < x_0 < M. \end{cases}$$

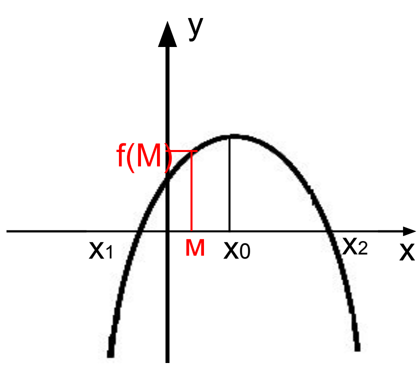
Правило 4.

Заданное число M лежит между корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$, если имеет место система:



$$\begin{cases} a>0, \\ f(M)<0; \end{cases}$$

$$a\cdot f(M)<0.$$



$$\begin{cases} a<0, \\ f(M)>0; \end{cases}$$

Правило 4.

$$x_1 < M < x_2 < \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ f(M) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ f(M) > 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow a \cdot f(M) < 0.$$

Задание 1 (№ 2.36(1)).

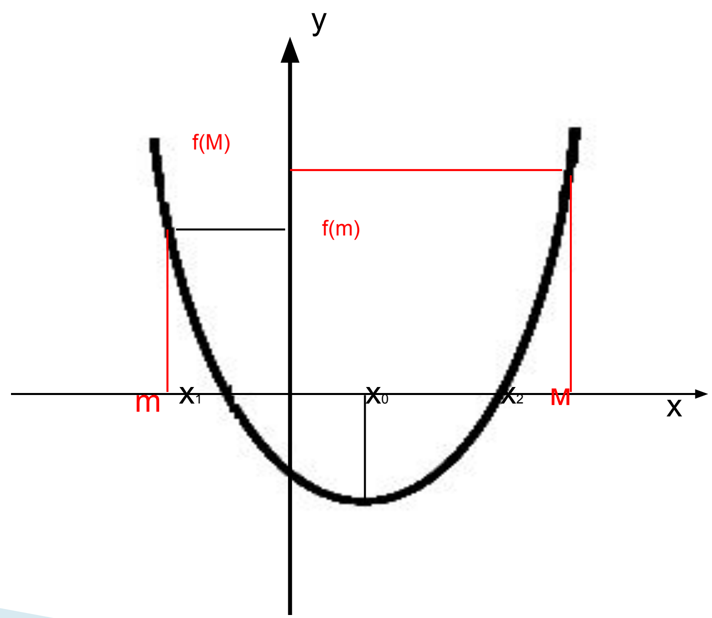
При каких значениях *a* корни уравнения

$$x^2 - 2ax + (a + 1)(a - 1) = 0$$

принадлежат промежутку [-5;5]?

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 2ax + (a + 1)(a - 1)$.



Условию задачи удовлетворяет система $\begin{cases} f(m) \ge 0, \\ f(M) \ge 0, \\ D \ge 0, \\ m < x_0 < M. \end{cases}$

Значит,

$$\begin{cases} 25 + 10a + (a+1)(a-1) \ge 0, \\ 25 - 10a + (a+1)(a-1) \ge 0, \\ a^2 - (a^2 - 1) \ge 0, \\ -5 < a < 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 10a + 24 \ge 0, \\ a^2 - 10a + 24 \ge 0, \\ -5 < a < 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \ge -4, \\ a \le -6, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a \ge 6, \\ a \le 4, \end{array}\right. \\ -5 < a < 5; \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le a \le 4.$$

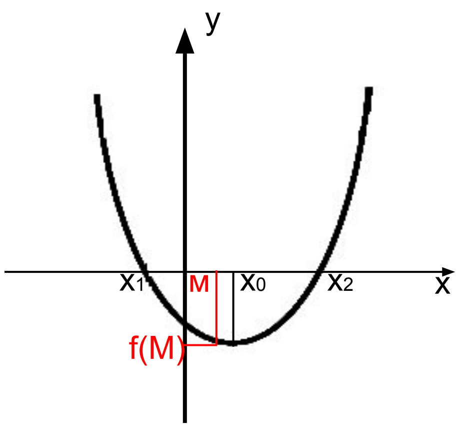
Ответ: [-4;4]

Задание 2 (№ 2.38(1)).

При каких значениях *a* число 1 находится между корнями квадратного трехчлена $x^2 + (a + 1)x - a^2$?

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + (a + 1)x - a^2$.



Условию задачи удовлетворяет неравенство f(M) < 0.

$$1 + a + 1 - a^2 < 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 2, \\ a < -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Задание 3.

При каких значениях а уравнение

$$x^4 + (1 - 2a)\,x^2 + a^2 - 1 = 0$$

имеет четыре разных решения?

Решение.

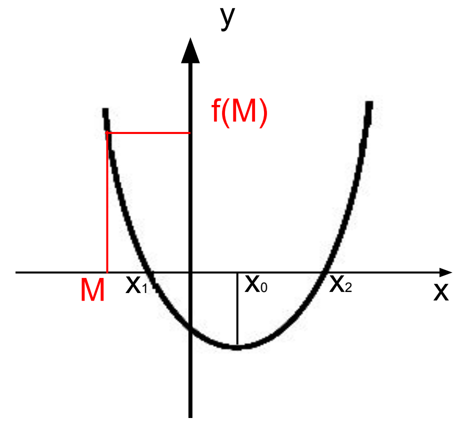
$$x^4 + (1 - 2a)\,x^2 + a^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Пусть $x^2 = t$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$t^2 + (1 - 2a)t + a^2 - 1 = 0.$$

Первоначальное уравнение имеет четыре решения тогда и только тогда, когда полученное квадратное уравнение имеет два разных положительных решения, то есть $0 < t_1 < t_2$.

Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 + (1 - 2a)t + a^2 - 1.$



Имеет место система: $\begin{cases} f(M) > 0, \\ D > 0, \\ t_0 > M. \end{cases}$

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ -4a + 5 > 0, \\ \dfrac{2a - 1}{2} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > 1, \\ a < -1, \end{array} \right. \\ a < 1{,}25, \\ a > 0{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a < 1{,}25.$$

Ответ: (1;1,25)

Домашнее задание:

№ 2.37(1),

№ 2.40(1),

№ 2.42(1).

Спасибо за урок.