Оптика.

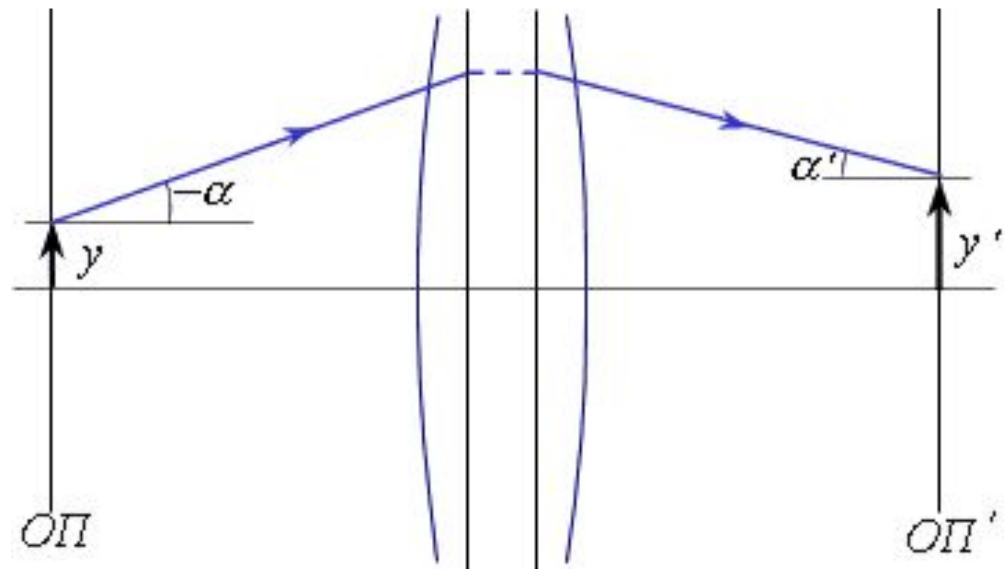
Лекция 6.

Матричная теория Гауссовой оптики

Преобразование координат лучей оптической системой

Основное действие оптической системы заключается в изменении хода лучей, которое описывается преобразованиями двух параметров – линейной и угловой координат луча. Эти преобразования наиболее удобно описывать при помощи аппарата **матричной оптики.** Матрица преобразованияполностью описывает распространение лучей через оптическую систему.

Параметры луча в пространстве предметов и изображений могут быть заданы только в том случае, если выбраны опорные плоскости. **Опорная плоскость** (ОП) – это некоторая произвольно выбранная плоскость, перпендикулярная оптической оси. Опорные плоскости в пространстве предметов и изображений выбираются из соображений удобства и могут быть либо сопряженными, либо нет.



Вместо угла α часто используют направляющий косинус оптического лучевого вектора:

$$Y = n\cos\beta_y = -n\cdot\sin\alpha = -n\cdot\alpha$$

$$\begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix} \longrightarrow \text{(ОС)} \longrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ Y' \end{pmatrix}$$

$$y' = a_0 + a_1 y + a_2 Y + a_3 y^2 + a_4 yY + a_5 Y^2 + \ldots$$

$$Y' = b_0 + b_1 y + b_2 Y + b_3 y^2 + b_4 yY + b_5 Y^2 + \ldots$$

Если оптическая система является центрированной, то $a_0=b_0=0$. Все члены ряда, начиная с a_3 и b_3, можно отбросить, так как они стремятся к нулю на порядок быстрее, чем предыдущие. Таким образом, для идеальной оптической системы:

$$y' = Ay + BY$$

$$Y' = Cy + DY$$

Матрица преобразования лучей

$$\begin{pmatrix} y' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix}$$

Все свойства идеальной оптической системы полностью описываются **матрицей преобразования лучей** , называемой также **гауссовой матрицей** или ABCD-матрицей

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Геометрический смысл элементов матрицы преобразования

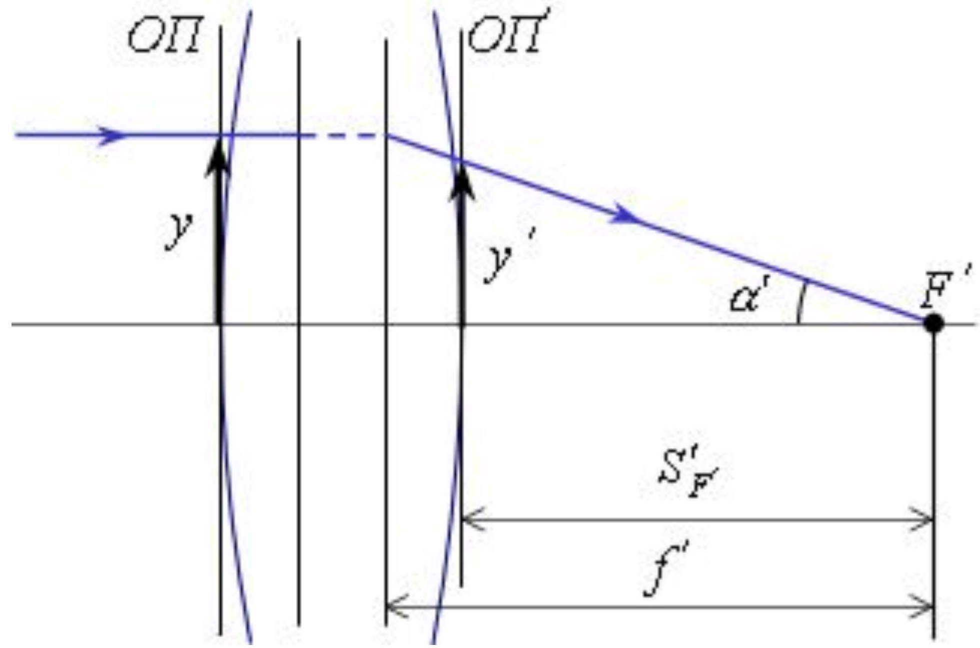
Рассмотрим луч с координатами , y=1, Y=0

$$y' = Ay + BY = A$$

$$Y' = Cy + DY = C$$

$$f' = \frac{y}{\alpha'}$$

$$S'_{F'} = \frac{y'}{\alpha'}$$



С учетом того, что , y=1 можно получить ,

$$y' = S'_{F'} \cdot \alpha' = \frac{S'_{F'}}{f'}$$

$$Y' = -n'\alpha' = -\frac{n'}{f'}$$

$$A = \frac{S'_{F'}}{f'}$$

$$C = -\frac{n'}{f'} = -\Phi$$

Геометрический смысл элементов матрицы преобразования

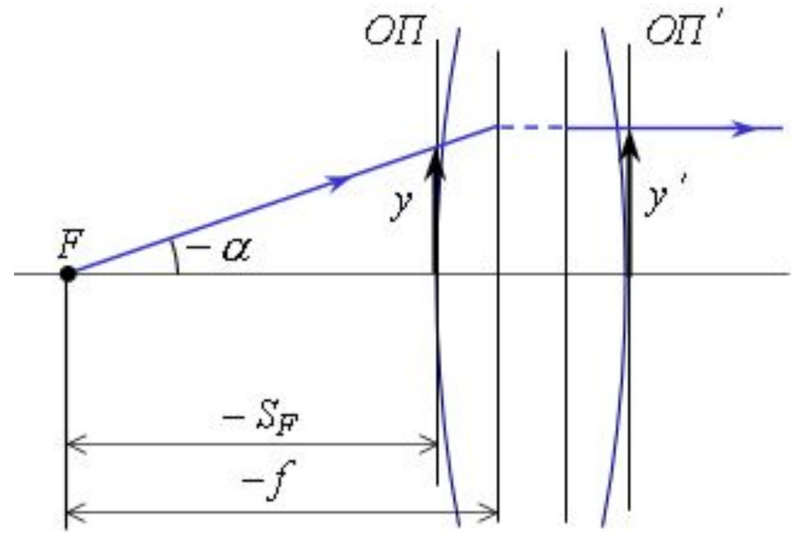
Рассмотрим луч с координатами , Y=1 (α=-1/n), Y′=0 (α′=0)

$$y' = Ay + BY = Ay + B$$

$$Y' = Cy + DY = Cy + D = 0$$

$$y' = -\alpha \cdot (-f) = -\frac{f}{n}$$

$$y = -\alpha \cdot (-S_F) = -\frac{S_F}{n}$$



С учетом того, что , y=1 можно получить

$$y' = S'_{F'} \cdot \alpha' = \frac{S'_{F'}}{f'}$$

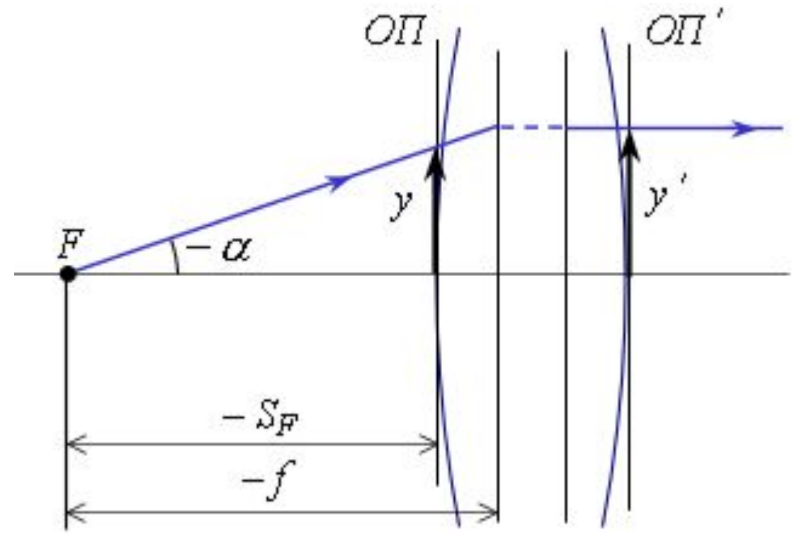
$$Y' = -n'\alpha' = -\frac{n'}{f'}$$

$$D = -Cy = -\left(-\frac{n'}{f'}\right) \cdot \left(-\frac{S_F}{n}\right) = \frac{n}{f} \cdot \frac{S_F}{n} = \frac{S_F}{f}$$

$$B = y' - Ay = -\frac{f}{n} - \frac{S'_{F'}}{f'} \cdot \left(\frac{S_F}{n}\right) = \frac{S_F \cdot S'_{F'}}{n \cdot f'} - \frac{f}{n} = \frac{S_F \cdot S'_{F'} - f \cdot f'}{n \cdot f'}$$

Геометрический смысл элементов матрицы преобразования

$$G = \begin{pmatrix} \dfrac{S'_{F'}}{f'} & \dfrac{S'_{F'} \cdot S_F - f \cdot f'}{n \cdot f'} \\ -\dfrac{n'}{f'} & \dfrac{S_F}{f} \end{pmatrix}$$



Элемент матрицы C зависит только от параметров оптической системы, а элементы A,B, D и зависят еще и от выбора опорных плоскостей.

Определитель матрицы преобразования

$$\det G = AD - BC = 1$$

Обратная матрица преобразования

$$G^{-1}G = GG^{-1} = I$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - единичная матрица

Обратная матрица преобразования описывает обратное преобразование (из выходных координат во входные)

$$b = G^{-1} \cdot b'$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$$

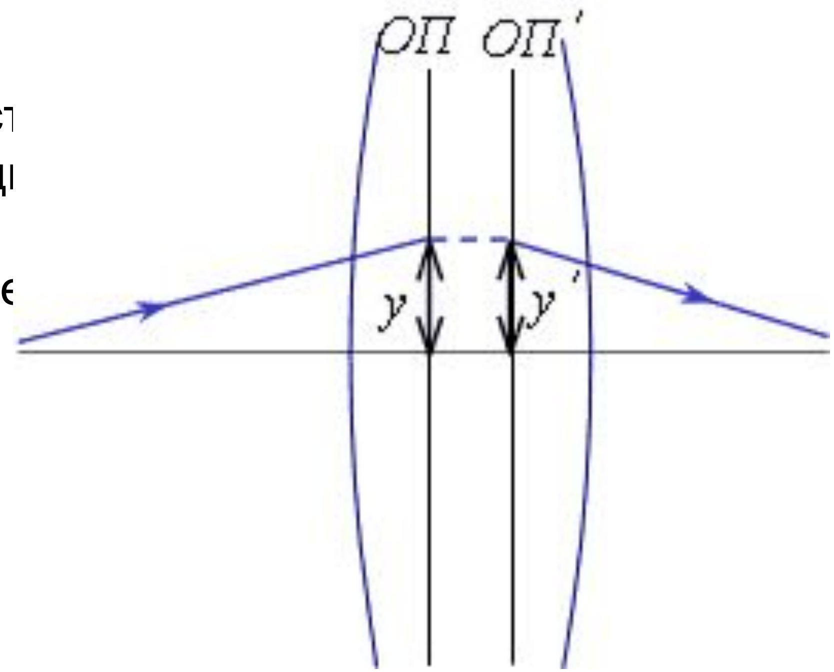
Условие сопряжения опорных плоскостей

В общем случае все элементы матрицы преобразования не равны нулю, но для случая сопряженных опорных плоскостей элемент B=0. Для сопряженных опорных плоскостей элемент A имеет значение линейного увеличения, а элемент D - величина обратная элементу A.

Виды матриц преобразования

Матрица преломления

Существуют два основных вида [матриц преобразования](), описывающих два прост преобразования – перенос луча в свобод пространстве и преломление луча на преломляющей поверхности или в оптиче системе.



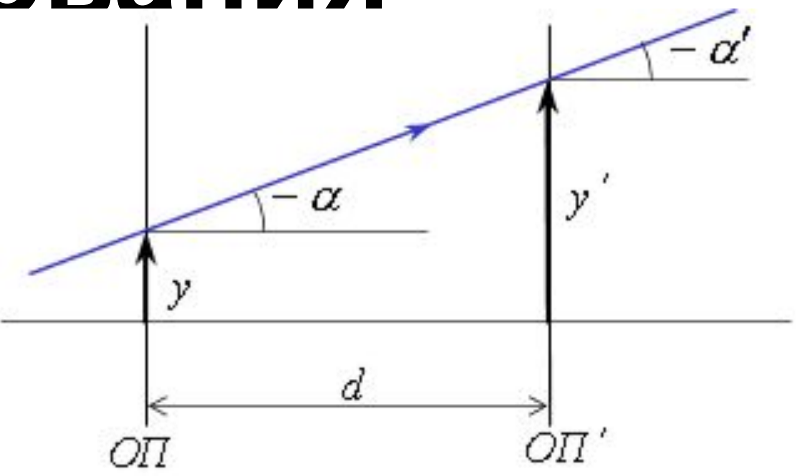
Для вывода матрицы преломления совместим опорные плоскости с главными плоскостями
Поскольку опорные плоскости сопряжены, то B=0 и y'=Ay. Тогда A=1, а поскольку определитель матрицы всегда равен единице , следовательно D=1.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}$$ **- матрица преломления**

Виды матриц преобразования

Матрица переноса

При переносе луча изменяется только линейная координата.



$$y' = y + (-\alpha)\cdot d = y + \frac{Y}{n}\cdot d$$

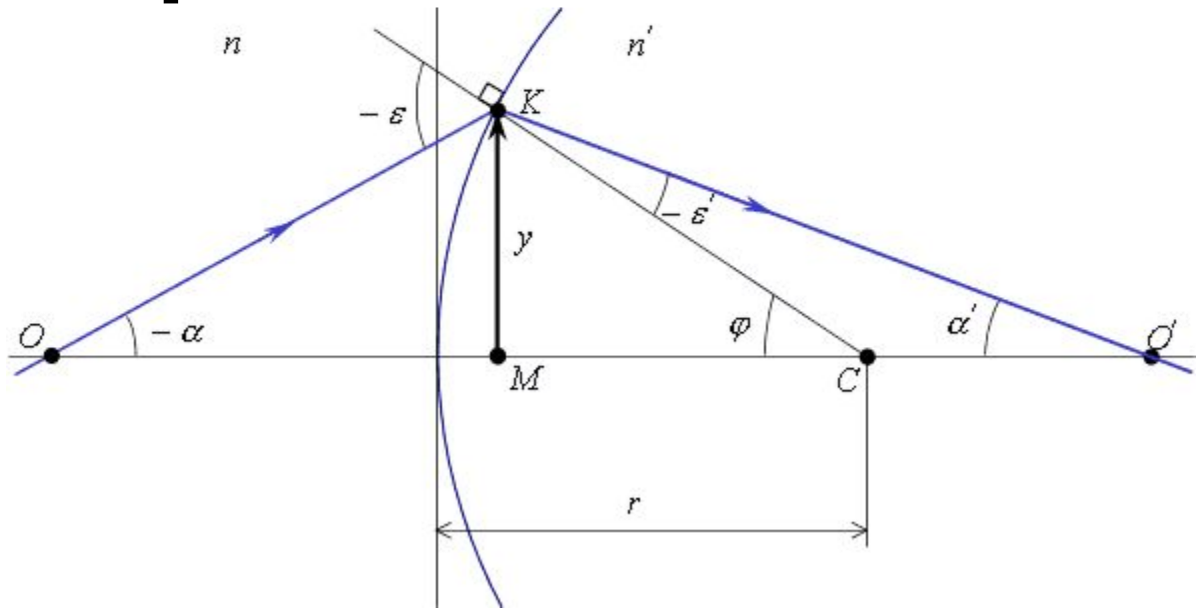
Угловая координата не изменяется

$$Y' = Y$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **- матрица переноса**

$\frac{d}{n}$ - приведенное расстояние между опорными плоскостями

Матрица одной преломляющей поверхности



Из треугольников ОКС и СКО' можно вывести

$$-\varepsilon = -\alpha + \varphi$$

$$-\varepsilon' = -\alpha' + \varphi$$

Домножим оба выражения на n и n' соответственно

$$-\varepsilon n = -n\alpha + n\varphi$$

$$-\varepsilon' n' = -n'\alpha' + n'\varphi$$

Из закона преломления следует, что

$$\varepsilon n = \varepsilon' n'$$

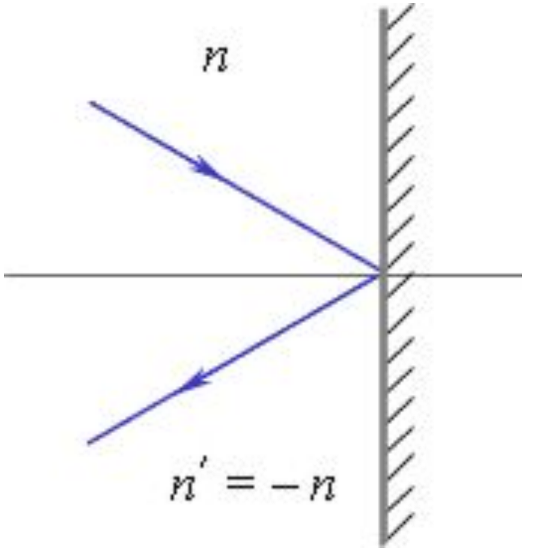
$$-n\alpha + n\varphi = -n'\alpha' + n'\varphi \qquad \varphi = \frac{y}{r}$$

$$Y' = Y - \frac{y}{r}(n' - n) \qquad Y' = Y - y \cdot \rho \cdot (n' - n) \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\rho(n' - n) & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица зеркальной (отражающей) поверхности

$$n' = -n$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\rho n & 1 \end{pmatrix}$$

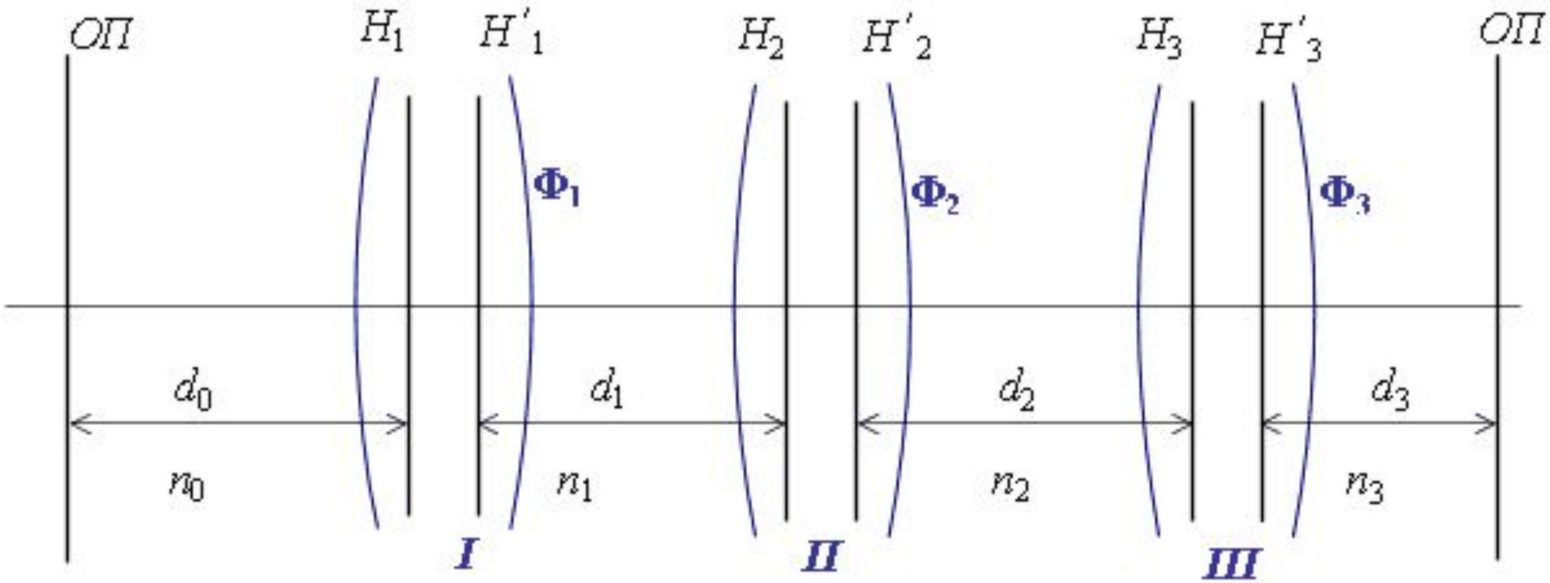


Для плоского зеркала

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, плоское зеркало не меняет хода луча (геометрический косинус изменяется, а оптический преломленный (отраженный) косинус остается прежним).

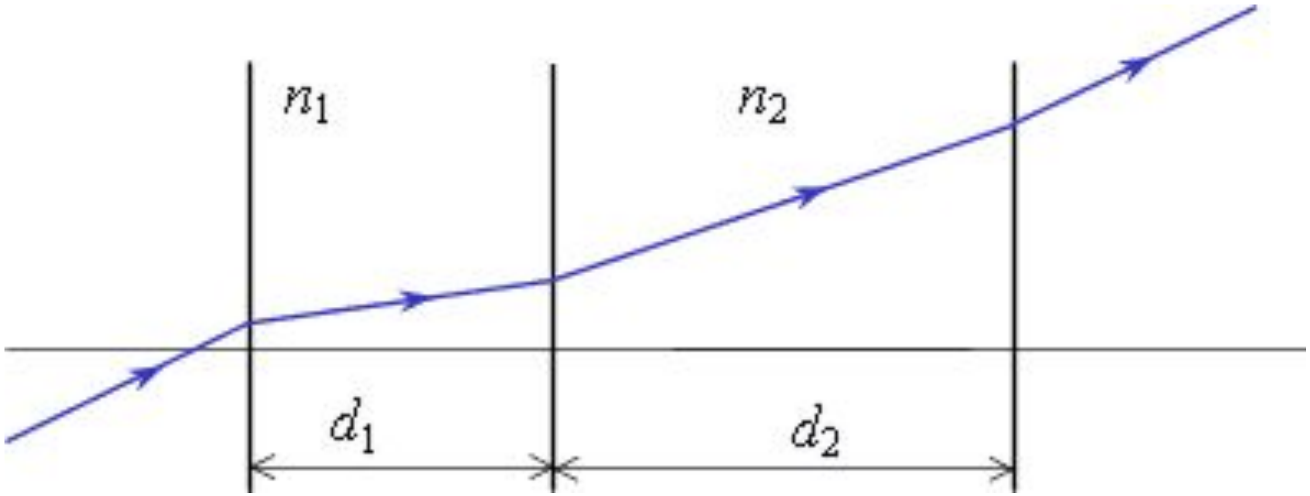
Матрицы оптической системы, состоящей из нескольких компонентов



Любую оптическую систему можно представить как совокупность нескольких компонентов, разделенных промежутками. Пусть дана некоторая произвольная система, в которой для каждого компонента известно положение главных плоскостей и оптическая сила, а также известны расстояния между компонентами и показатели преломления

$$G = T_3 R_3 T_2 R_2 T_1 T_0 = T_n R_n \ldots T_1 R_1 T_0 \qquad R_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}, T_n = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{d_n}{n_n} \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}$$

Пакет из плоскопараллельных слоев



$$G = T_2 T_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{d_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{d_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{d_1}{n_1} + \dfrac{d_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t = t_1 + t_2 + \ldots + t_n = \frac{d_1}{n_1} + \frac{d_2}{n_2} + \ldots + \frac{d_n}{n_n} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Оптическая система с нулевыми расстояниями между компонентами

$$G = R_2 R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\Phi_1 + \Phi_2) & 1 \end{pmatrix}$$

то есть оптические силы таких компонент складываются

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n$$

Двухкомпонентная оптическая система

$$G = R_2 D R_1$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1 \Phi_2 \frac{d}{n}$$

Рассмотрим частные случаи двухкомпонентной системы.

Если d=0, тогда $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$.
Если $t=d/n=1/\Phi_1$, это значит, что второй компонент (его главная плоскость) находится в заднем фокусе первого компонента. Тогда $\Phi=\Phi_1$, то есть второй компонент может иметь какую угодно оптическую силу.
Если $t=d/n=1/\Phi_1$, то первый компонент находится в переднем фокусе второго компонента, тогда $\Phi=\Phi_2$.

Если $t = \frac{d}{n} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_1 \Phi_2} = \frac{1}{\Phi_1} + \frac{1}{\Phi_2}$ то $\Phi = 0$

Афокальные (телескопические) системы

Афокальные или телескопические системы – это системы из двух или более компонентов, оптическая сила которых равна нулю. Такие системы предназначены для наблюдения удаленных объектов.
У афокальных систем оптическая сила равна нулю, то есть C=-Ф=0, следовательно, определитель матрицы detG=AD-BC. Отсюда $D=A^{-1}$. Тогда матрица будет выглядеть следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$$

Если опорные плоскости сопряжены, то B=0 , и следовательно:

$$G = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$$

$$y' = Ay + BY = Ay$$

$$Y' = Cy + DY = A^{-1}Y$$

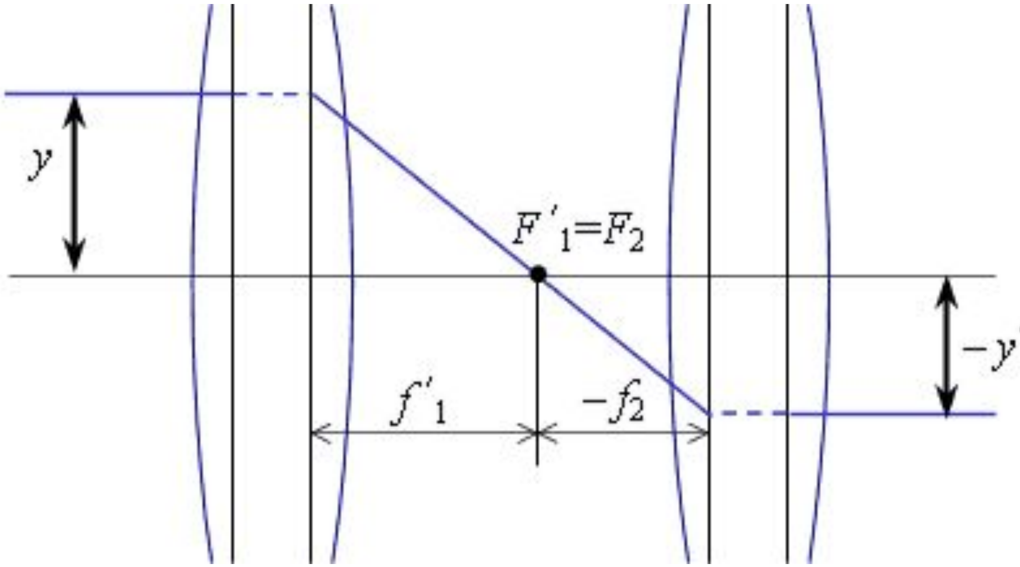
Для афокальной системы элемент матрицы равен линейному (поперечному) увеличению, а его обратная величина имеет смысл углового увеличения:

В телескопических системах линейное и угловое увеличение не зависят от положения сопряженных опорных плоскостей и, следовательно, не зависят от положения предмета и изображения:

$$\frac{y'}{y} = const = A$$

$$\frac{Y'}{Y} = const = A^{-1}$$

Двухкомпонентная оптическая система телескопическая, если задний фокус первого компонента совпадает с передним фокусом второго



$$t = \frac{d}{n} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_1 \Phi_2} = \frac{1}{\Phi_1} + \frac{1}{\Phi_2}$$

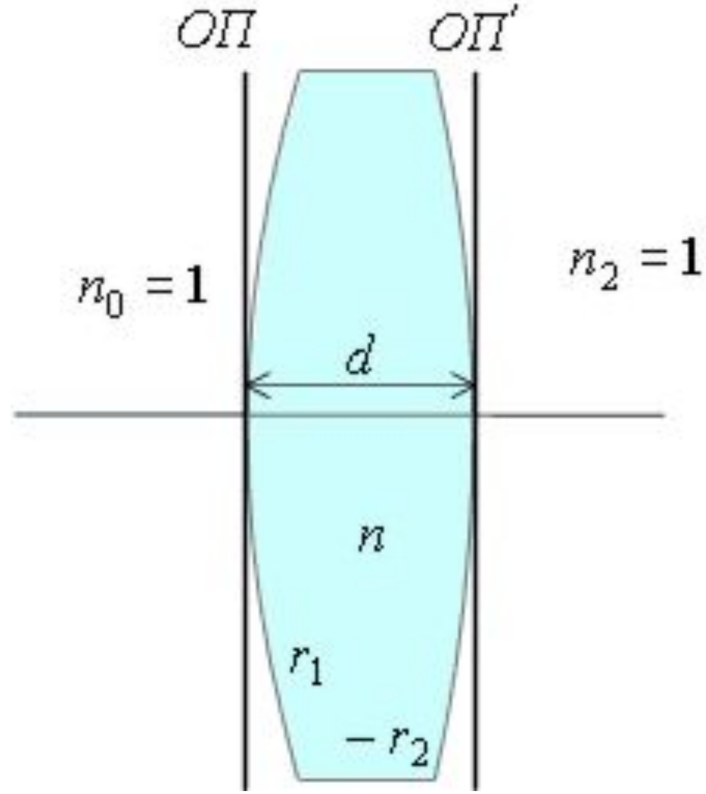
Линейное увеличение такой системы:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f_2}{f_1}$$

Матрица тонкой линзы

$$G = R_2 T_1 R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\rho_2(n-1) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\rho_1(n-1) & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = R_2 T_1 R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\rho_1 - \rho_2)(n-1) & 1 \end{pmatrix}$$



Расчет параксиальных (нулевых) лучей через оптическую систему

Нулевые лучи – это лучи, которые преломляются по законам параксиальной оптики, но имеют произвольно большие координаты.
Расчет нулевых лучей через оптическую систему состоит из операций переноса луча между компонентами и преломления луча на компонентах, которые можно описывать либо в матричной форме, либо в виде рекуррентных соотношений:

$$y = y + \frac{d}{n} Y$$

$$Y = Y - \Phi y$$

Вычисления выполняются столько раз, сколько компонентов имеется в оптической системе. Однако, для полного расчета лучей через оптическую систему вначале нужно определить координаты лучей в пространстве предметов, а после завершения расчетов определить координаты лучей в пространстве изображений. Таким образом, расчет нулевых (параксиальных) лучей включает в себя три этапа:
определение входных координат луча,
вычисление хода луча (последовательное определение его координат на всех компонентах),
определение выходных координат луча.

Название	Выражение
Общий вид матрицы преобразований лучей	$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$
Геометрический смысл элементов матрицы	$G = \begin{pmatrix} \frac{S'_{F'}}{f'} & \frac{S_F \cdot S'_{F'} - f \cdot f'}{n' \cdot f'} \\ -\Phi & \frac{S_F}{f} \end{pmatrix}$
Уравнение преобразования лучей	$y' = Ay + BY$ $Y' = Cy + DY$
Определитель матрицы	$\det G = AD - BC = 1$
Обратная матрица	$G^{-1} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$
Матрица переноса	$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Матрица преломления	$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}$
Оптическая сила преломляющей поверхности	$\Phi = \rho \cdot (n' - n)$
Оптическая сила отражающей поверхности	$\Phi = 2\rho \cdot n$
Матрица сложной оптической системы	$G = T_K R_K \ldots R_3 T_2 R_2 T_1 R_1 T_0$
Матрица пакета из плоскопараллельных слоев	$G = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \frac{d_1}{n_1} + \ldots + \frac{d_n}{n_n}$
Матрица двухкомпонентной оптической системы	$G = R_2 D R_1$
Матрица тонкой линзы	$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}$