МОУ СОШ № 2

Электронный справочник

Тригонометрические формулы

Тригонометрические формулы

1. Тригонометрические тождества.
2. Формулы сложения.
3. Формулы двойного аргумента.
4. Формулы половинного аргумента.
5. Формулы приведения.
6. Формулы преобразования суммы и разности в произведение.
7. Формулы преобразования произведения в сумму.

Проверь себя!

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Примеры!

$$1)\ \cos 105^0 + \cos 75^0 = 2\cos\frac{105^0 + 75^0}{2}\cos\frac{105^0 - 75^0}{2} = 2\cos 90^0 \cos 15^0 = 0;$$

$$2)\ \cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12} = -2\sin\frac{\frac{11\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}}{2}\sin\frac{\frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}}{2} = -2\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$3)\ \sin 105^0 + \sin 165^0 = 2\sin\frac{105^0 + 165^0}{2}\cos\frac{105^0 - 165^0}{2} = 2\sin 135^0 \cos(-30)^0 =$$

$$= 2\cdot\sin(180^0 - 45^0)\cdot\cos 30^0 = 2\cdot\sin 45^0\cdot\cos 30^0 = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$4)\ tg\frac{5\pi}{12} + tg\frac{7\pi}{12} = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12}\right)}{\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sin\pi}{\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}} = 0.$$

1) *Вычислите без таблиц*: $\sin 15^0 + \sin 75^0$.

$А)\ \frac{\sqrt{2}}{2};\quad \boxed{Б)\ \frac{\sqrt{6}}{2};}\quad В)\ -\frac{\sqrt{6}}{2};\quad Г)\ -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

2) *Вычислите без таблиц*: $\sin 15^0 - \sin 75^0$.

$А)\ \frac{\sqrt{2}}{2};\quad Б)\ \frac{\sqrt{6}}{2};\quad В)\ -\frac{\sqrt{6}}{2};\quad \boxed{Г)\ -\frac{\sqrt{2}}{2}.}$

3) *Вычислите без таблиц*: $\cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}$.

$\boxed{А)\ 0;}\quad Б)\ -2\cos\frac{\pi}{5};\quad В)\ -2\sin\frac{\pi}{5};\quad Г)\ 2\sin\frac{\pi}{5}.$

4) *Вычислите без таблиц*: $\cos\frac{3\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}$.

$А)\ 0;\quad Б)\ -2\cos\frac{\pi}{5};\quad \boxed{В)\ -2\sin\frac{\pi}{10};}\quad Г)\ 2\sin\frac{\pi}{10}.$

Проверь себя!

$$\sin(a+\beta)=\sin a\cdot\cos\beta+\cos a\cdot\sin\beta$$

$$\sin(a-\beta)=\sin a\cdot\cos\beta-\cos a\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

Примеры

Прим

1) $\sin 210^0 = \sin(180^0 + 30^0) = \sin 180^0 \cos 30^0 + \cos 180^0 \sin 30^0 =$

$= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

2) $\cos 75^0 = \cos\left(45^0 - 30^0\right) = \cos 45^0 \cdot \cos 30^0 - \sin 45^0 \cdot \sin 30^0 =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

3) $tg 225^0 = tg\left(180^0 + 45^0\right) = \frac{tg 180^0 + tg 45^0}{1 - tg 180^0 \cdot tg 45^0} = \frac{0+1}{1 - 0 \cdot 1} = 1$

4) $ctg 135^0 = tg\left(90^0 + 45^0\right) = \frac{ctg 90^0 \cdot ctg 45^0 - 1}{ctg 90^0 + ctg 45^0} = \frac{0 \cdot 1 - 1}{0 + 1} = -1$

1) *Вычислите без таблиц*: $\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$.

А) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\boxed{Б)\ 0;}$ *В*) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; *Г*) -1.

2) *Вычислите без таблиц*: $\cos 15^0$.

$\boxed{А)\ \frac{\sqrt{2}}{2};}$ *Б*) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; *В*) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; *Г*) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) *Вычислите без таблиц*: $tg150^0$.

$\boxed{А)\ \sqrt{3};}$ *Б*) 1; *В*) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *Г*) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4) *Вычислите без таблиц*: $ctg\frac{\pi}{12}$.

А) $-4-\sqrt{3}$; *Б*) 0; $\boxed{В)\ 2+\sqrt{3};}$ *Г*) $2-\sqrt{3}$.

Проверь себя!

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

Примеры

Приме

$$1)\sin 120^0 = \sin\left(2\cdot 60^0\right) = 2\cdot\sin 60^0\cdot\cos 60^0 = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2)\cos 240^0 = \cos^2 120^0 - \sin^2 120^0 = \left(\cos^2 60^0 - \sin^2 60^0\right)^2 - \left(2\sin 60^0\cos 60^0\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$3) tg 120^0 = \frac{2\cdot tg 60^0}{1 - tg^2 60^0} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

$$4)\ \textit{если}\ ctg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \textit{то}\ ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{12}$$

1) *Вычислить* $\sin 2\alpha$, *если* $\sin\alpha = -0.6,\ \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

А) 1,92; $\boxed{\text{Б) } 0{,}96;}$ *В*) $-0{,}96$; *Г*) -1.

2) *Вычислить* $\cos 2\alpha$, *если* $\cos\alpha = 0{,}3$.

$\boxed{\text{А) } -0{,}82;}$ *Б*) 1; *В*) 0,82; *Г*) 1,64.

3) *Вычислить* $ctg 2\alpha$, *если* $ctg\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

А) $-\dfrac{1}{8\sqrt{3}}$; *Б*) $\dfrac{3}{16}$; *В*) $\dfrac{3\sqrt{3}}{25}$; $\boxed{\text{Г) } -\dfrac{\sqrt{3}}{12}.}$

4) *Вычислить* $tg 2\alpha$, *если* $tg\alpha = \dfrac{1}{2}$.

А) $\dfrac{3}{4}$; *Б*) $-\dfrac{3}{8}$; $\boxed{\text{В) } \dfrac{4}{3};}$ *Г*) $\dfrac{2}{3}$.

Проверь себя!

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

Примеры

$$1)\ \sin^2 15^0=\frac{1-\cos 30^0}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$2)\ 2\cos^2\frac{\pi}{8}-1=2\cdot\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}-1=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3)\ \textit{если}\ \ \cos\alpha=0{,}6\ \ \textit{и}\ \ 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ \ \textit{то}\ tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{0{,}4}{1{,}6}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$4)\ \textit{если}\ \ \cos\alpha=-0{,}02\ \ \textit{и}\ \ 0<\alpha<\pi,\ \ \textit{то}\ \ \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-0{,}02}{2}}=0{,}7$$

1) *Вычислить* $\sin\frac{\alpha}{2}$, *если* $\sin\alpha = \frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

А) $\sqrt{0,1}$; *Б*) $2\sqrt{0,1}$; $\boxed{\textit{В})\ 3\sqrt{0,1};}$ *Г*) $-\sqrt{0,1}$.

2) *Вычислить* $\cos\frac{\alpha}{2}$, *если* $\sin\alpha = \frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$\boxed{\textit{А})\ \sqrt{0,1};}$ *Б*) $\frac{\sqrt{0,1}}{2}$; *В*) $\frac{\sqrt{0,1}}{3}$; *Г*) $-\sqrt{0,1}$.

3) *Вычислить* $tg\frac{\alpha}{2}$, *если* $\sin\alpha = \frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

А) $\frac{1}{3}$; *Б*) $\frac{3}{16}$; *В*) $\frac{3\sqrt{3}}{25}$; $\boxed{\textit{Г})\ 3.}$

4) *Вычислить* $ctg\frac{\alpha}{2}$, *если* $\sin\alpha = \frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

А) $\frac{3}{4}$; *Б*) -3; $\boxed{\textit{В})\ \frac{1}{3};}$ *Г*) $\frac{2}{3}$.

Провер
ь
себя!

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\sin a = \pm\sqrt{1-\cos^2 a}$$

$$\cos a = \pm\sqrt{1-\sin^2 a}$$

$$\boxed{tga \cdot ctga = 1}$$

$$tga = \frac{1}{ctga}$$

$$1 + tg^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$ctga = \frac{1}{tga}$$

$$1 + ctg^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

П
р
и
м
е
р
ы

1) *Вычислите* $\cos a$, *если* $\sin a = -\frac{2}{5}$ *и* $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

$A)\ \frac{5}{\sqrt{21}};\quad \boxed{Б)\ -\frac{\sqrt{21}}{5};}\quad В)\ -\frac{\sqrt{5}}{21};\quad Г)\ -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

2) *Вычислите* tga, *если* $\sin a = -\frac{2}{5}$ *и* $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

$A)\ \frac{\sqrt{2}}{2};\quad Б)\ -\frac{2}{\sqrt{21}};\quad В)\ -\frac{\sqrt{21}}{2};\quad \boxed{Г)\ \frac{2}{\sqrt{21}}}.$

3) *Вычислите* $ctga$, *если* $\sin a = -\frac{2}{5}$ *и* $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

$\boxed{A)\ \frac{\sqrt{21}}{2};}\quad Б)\ -\frac{2}{\sqrt{21}};\quad В)\ \frac{2}{\sqrt{21}};\quad Г)\ -\frac{\sqrt{21}}{2}.$

4) *Вычислите* tga, *если* $\cos a = -\frac{3}{5}$ *и* $\frac{\pi}{2} < a < \pi$

$A)\ \frac{4}{3};\quad Б)\ \frac{3}{4};\quad \boxed{В)\ -\frac{4}{3};}\quad Г)\ \frac{\sqrt{3}}{4}.$

1) *Доказать, что при* $a \neq \pi k, k \in Z$ *справедливо равенство* $1 + ctg^2 a = \dfrac{1}{\sin^2 a}$

$$1 + ctg^2 a = 1 + \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{1}{\sin^2 a}$$

2) *Вычислить* $\sin a$, *если* $\cos a = -\dfrac{3}{5}$ *и* $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2}$

Воспользуемся формулойм $\sin a = \pm\sqrt{1 - \cos^2 a}$

Т.к. $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2}$ – *III квадрант, то* $\sin a < 0$

$$\sin a = -\sqrt{1 - \cos^2 a} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

3) *Вычислить* $ctga$, *если* $tga = 13$

По формуле $ctga = \dfrac{1}{tga}$ *находим*:

$$ctga = \frac{1}{tga} = \frac{1}{13}$$

Проверь себя!

$$\sin(a+2\pi k)=\sin a \qquad \cos(a+2\pi k)=\cos a \qquad k\in Z$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos a$$

$$\sin(\pi-a)=\sin a \qquad \sin(\pi+a)=-\sin a$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=-\cos a \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\cos a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\sin a$$

$$\cos(\pi-a)=-\cos a \qquad \cos(\pi+a)=-\cos a$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=-\sin a \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=\sin a$$

$$tg(a+\pi k)=tga \qquad ctg(a+\pi k)=ctga \qquad k\in Z$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=ctga \qquad tg\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-ctga$$

$$ctg\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=tga \qquad ctg\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-tga$$

Примеры

Приме

1) *Вычислите без таблиц* $\sin 135^0$

$A)\ \frac{2\sqrt{2}}{2};\quad \boxed{Б)\ \frac{\sqrt{2}}{2};}\quad В)\ \sqrt{3};\quad Г)\ -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

2) *Вычислите без таблиц* $\cos 120^0$

$A)\ \frac{1}{2};\quad Б)\ \frac{1}{2\sqrt{2}};\quad В)\ -\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \boxed{Г)\ -\frac{1}{2}.}$

3) *Вычислите без таблиц* $\sin\frac{7\pi}{6}$

$\boxed{A)\ -\frac{1}{2};}\quad Б)\ -\frac{2}{\sqrt{21}};\quad В)\ \frac{1}{2};\quad Г)\ -\frac{\sqrt{21}}{2}.$

4) *Вычислите без таблиц* $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$

$A)\ \frac{4}{3};\quad Б)\ -\frac{1}{2};\quad \boxed{В)\ \frac{1}{2};}\quad Г)\ \frac{\sqrt{3}}{4}.$

1) *Вычислить* $\sin 930^0$

$$\sin 930^0 = \sin(3\cdot 360^0 - 150^0) = -\sin 150^0 = -\sin(180^0 - 30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2}$$

2) *Вычислить* $tg\,\frac{11\pi}{3}$

$$tg\,\frac{11\pi}{3} = tg\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -tg\,\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

3) *Вычислить* $tg\,\frac{13\pi}{4}$

$$tg\,\frac{13\pi}{4} = tg\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = tg\,\frac{\pi}{4} = 1$$

4) *Вычислить* $\cos\frac{15\pi}{4}$

$$\cos\frac{15\pi}{4} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Проверь себя!

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

Примеры

Приме

1) $4\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}=2\left(\cos\frac{6\pi}{12}+\cos\frac{4\pi}{12}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}\right)=1$

2) Доказать тождество: $4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin 3\alpha.$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos 2\alpha-\cos\frac{2\pi}{3}=\cos 2\alpha+\frac{1}{2}$$

$$2\sin\alpha\cos 2\alpha+\sin\alpha$$

$$2\sin\alpha\cos 2\alpha=\sin 3\alpha-\sin\alpha$$

$$\sin 3\alpha-\sin\alpha+\sin a=\sin 3a$$

Правая часть равна левой части

1) *Представить произведение в виде суммы* $\sin 11^0 \sin 13^0$

$A)\ \dfrac{\cos 24^0 + \cos 2^0}{2};\quad Б)\ \dfrac{\cos 2^0 - \cos 24^0}{2};\quad В)\ 0;\quad Г)\ \dfrac{2}{\cos 24^0 + 1}.$

2) *Представить произведение в виде суммы* $\cos 15^0 \cos 3^0$

$A)\ 0;\quad Б)\ \dfrac{\cos 12^0 - \cos 18^0}{2};\quad В)\ \dfrac{\sin 12^0 + 1}{2};\quad Г)\ \dfrac{\cos 18^0 + \cos 12^0}{2}.$

3) *Представить произведение в виде суммы*

$$\cos(a - \beta)\cos(a + \beta)$$

$A)\ \dfrac{\cos 2a + \cos 2\beta}{2};\quad Б)\ \dfrac{\cos 2a - \cos 2\beta}{2};\quad В)\ 0;\quad Г)\ \dfrac{\cos 2a - \sin \beta}{2}.$

4) *Представить произведение в виде суммы*

$$\cos(a + \beta)\sin(a - \beta)$$

$A)\ \dfrac{\sin 2a + \sin 2\beta}{2};\quad Б)\ 0;\quad В)\ \dfrac{\sin 2a - \sin 2\beta}{2};\quad Г)\ \dfrac{1 - \sin 2\beta}{2}.$