Применение производной к исследованию функции

План урока

Пиши правильно

Схема исследования функции

Практикум

Пиши правильно

абсцисса

внутренние точки

вычисление

дробно-рациональная функция

исследование

критические точки

наибольшее и наименьшее значения

область определения

ордината

оси координат

периодичность

промежутки возрастания

производная

симметрия

точки пересечения

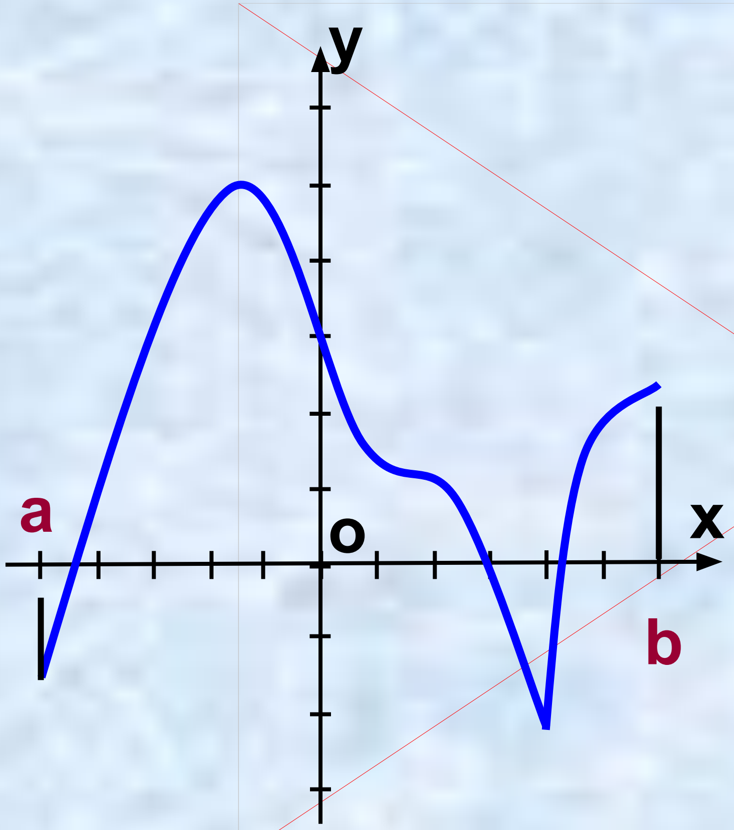
функция ни чётная, ни нечётная

экстремумы

Схема исследования функции

- Область определения функции
- Чётность, нечётность функции
- Периодичность функции
- Точки пересечения графика с осями координат
- Вычисление производной
- Критические точки
- Промежутки возрастания и убывания функции
- Точки экстремума функции
- Область значений функции

Область определения – множество значений x, на котором определена функция f (x).



$D\ (y) = (a;\ b)$

$$1)\ y = f(x), D(y) = R$$

$y = 2x^3 + 3x^2 - 5x$

$D(y) = R$

$$2)\ y = \frac{p(x)}{g(x)},$$

Область определения дробно-рациональных функций – это множество всех действительных чисел, кроме корней g (x), т.е.

$$g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq m, x \neq n.$$

$D(y) = R, кроме\ x = m, x = n$

или $D(y) = (-\infty; m) \cup (m; n) \cup (n; \infty).$

$$f(x) = \frac{1}{x(x-3)}$$

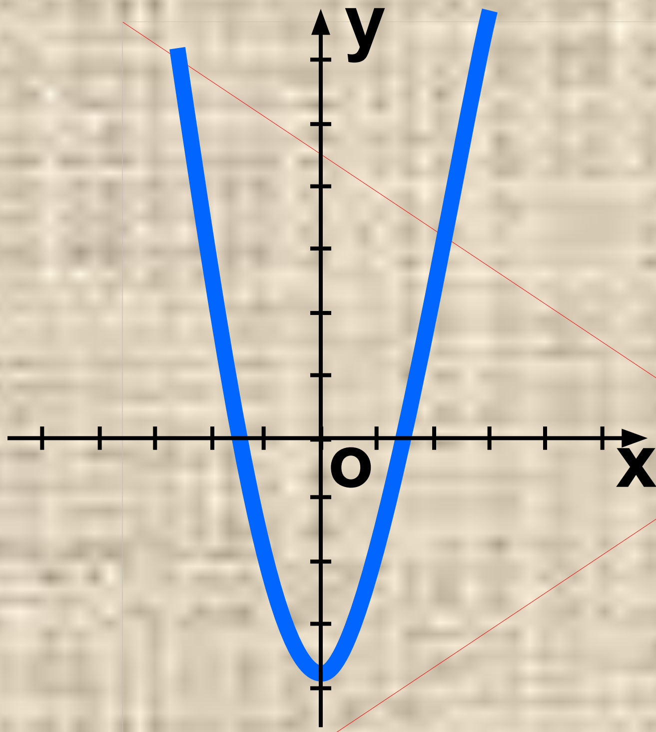
$x(x-3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, x \neq 3$

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; \infty)$

Чётность, нечётность функции

- чётная функция
- нечётная функция
- функция ни чётная, ни нечётная

Чётная функция



Функция называется <u>*чётной*</u>, если для любого х из её области определения выполняется равенство <u>*f (-x) = f (x).*</u>

$$f(x) = x^4 + x^2$$

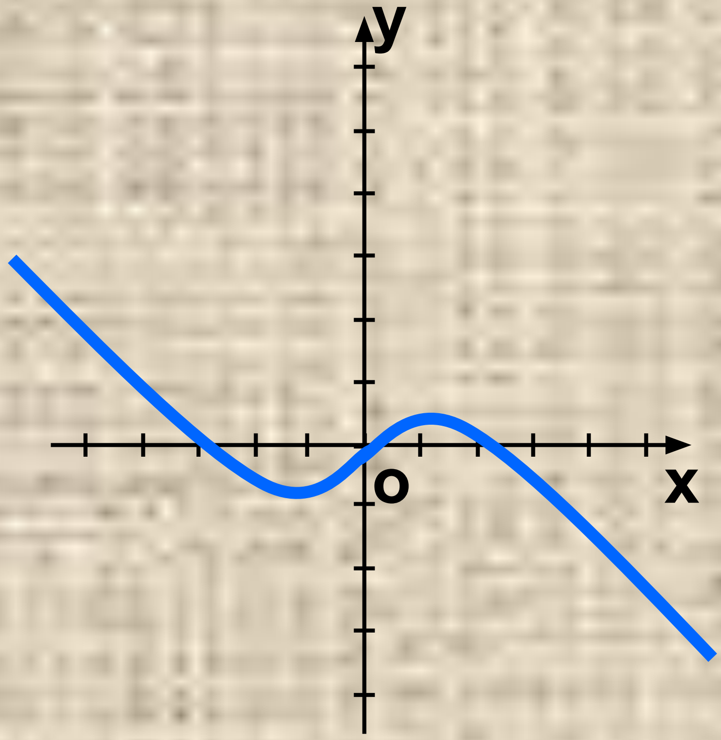
$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 =$$

$$= x^4 + x^2 = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x)$$

График <u>чётной </u>функции симметричен относительно оси ординат (оу).

нечётная функция



Функция называется **нечётной,** если для любого x из её области определения выполняется равенство **f (-x) = - f (x).**

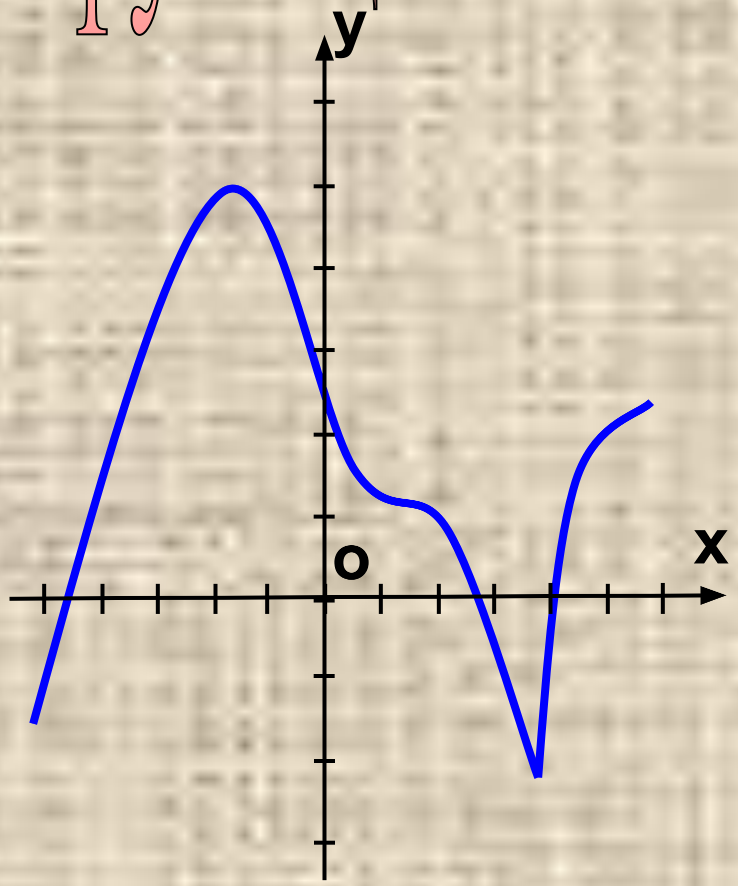
$$f(x) = x^3 + 2x$$

$$f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) =$$
$$= -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) =$$
$$= -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

График нечётной функции симметричен относительно начала координат (0;0).

функция ни чётная, ни нечётная



Равенства не выполняются

<u>$f(-x) = f(x)$,</u> <u>$f(-x) = -f(x)$.</u>

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 3$$

$$f(-x) = 3(-x)^2 + 2(-x) - 3 =$$
$$= 3x^2 - 2x - 3 \neq 3x^2 + 2x - 3 = f(x)$$
$$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$$
$$-f(x) = -(3x^2 + 2x - 3) =$$
$$= -3x^2 - 2x - 3 \neq 3x^2 - 2x - 3 = f(-x)$$
$$\Rightarrow f(x) \neq f(-x)$$

Симметрии нет.

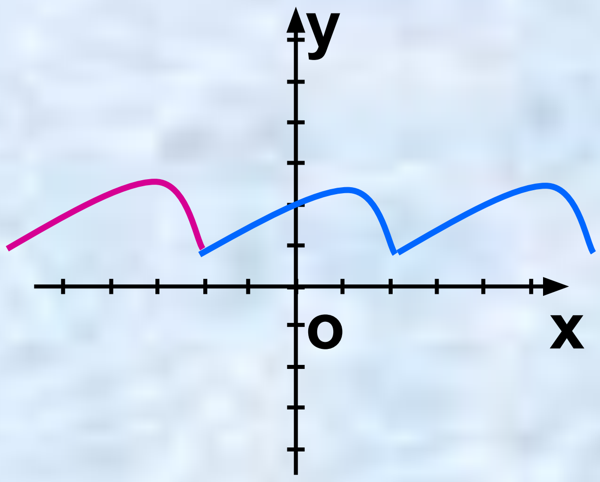
<u>Периодичность функции</u>

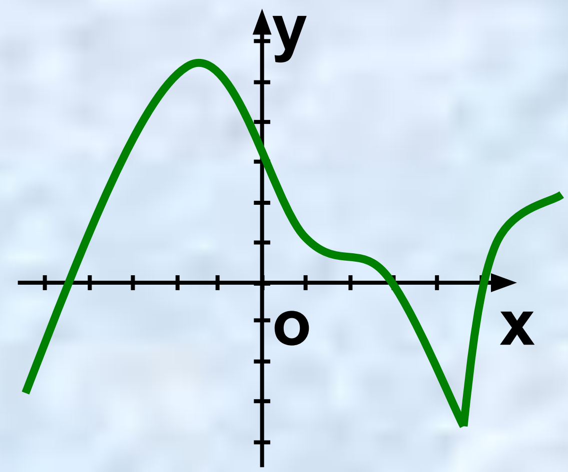
Функции, описывающие процессы и явления повторяющегося характера, называются <u>периодическими</u>.

<u>функции</u>

периодические

непериодические



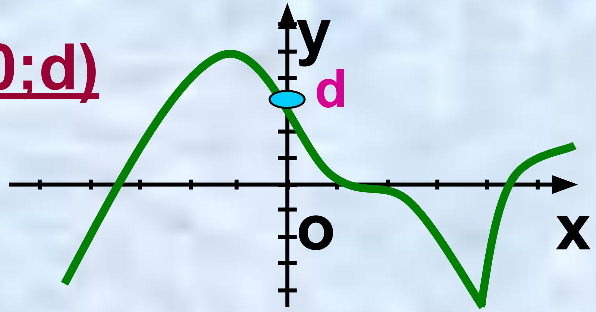


$$f(x) = f(x+T), T - \text{период}$$

Точки пересечения графика с осями координат

А). Точки пересечения графика с осью ординат (оу): х=0.

D(0;d)



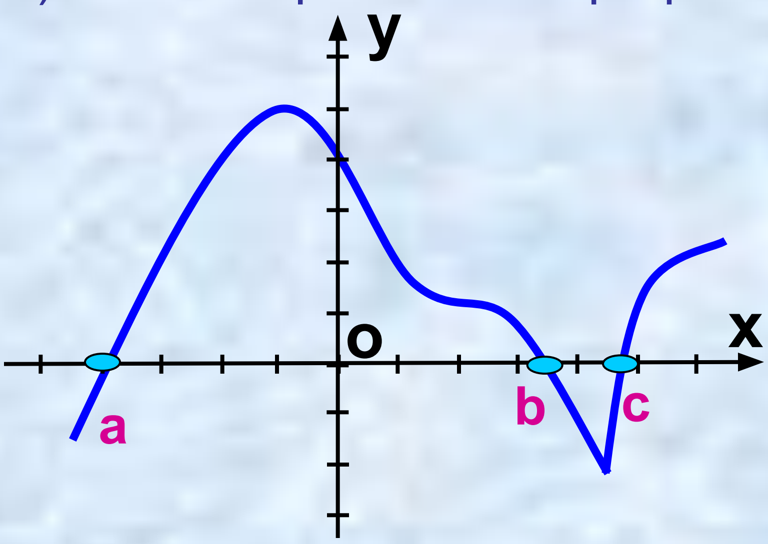
$$y = f(0)$$

$f(x) = 3x^2 + 8x - 7$

$f(0) = 3*0^2 + 8*0 - 7 = -7$

$\Rightarrow$ т.А(0;–7)

В). Точки пересечения графика с осью абсцисс (ох): у=0 – нули функции.



$f(x) = 0 \Rightarrow x = a, x = b, x = c$

$A(a;0), B(b;0), C(c;0)$

$f(x) = x^3 - 10x^2 + 9x, f(x) = 0$

$x(x^2 - 10x + 9) = 0$

$x = 0$ или $x^2 - 10x + 9 = 0$

$D = 10^2 - 4*1*9 = 64$

$x_1 = \frac{10-8}{2*1} = 1, x_2 = \frac{10+8}{2*1} = 9$

$A(0;0), B(1;0), C(9;0)$

A(a;0), B(b;0), C(c;0).

Вычисление производной

Производную вычисляем по формулам и правилам.

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(Cu)' = Cu'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(C)' = 0; \quad (kx)' = k; \quad (x^n)' = nx^{n-1};$$

$$(ax^n)' = anx^{n-1}; \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\frac{a}{bx^n}\right)' = \frac{-an}{bx^{n+1}}; \quad \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Критические точки

Это внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует.

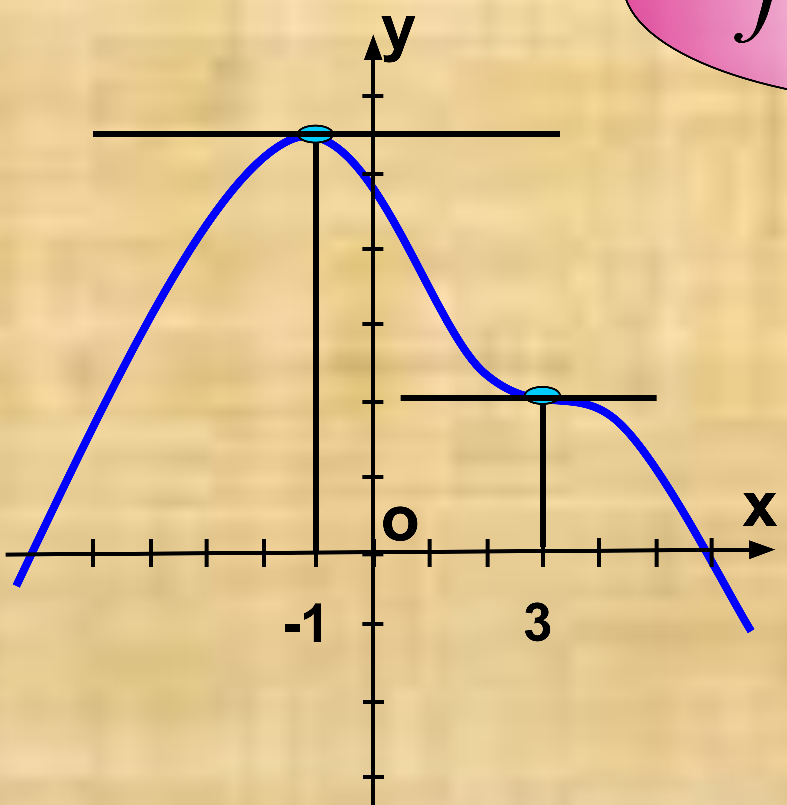
Критические точки

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) \text{ не существует}$$

Критические точки

$$f^{/}(x) = 0$$



$$f(x) = 4x^2 + 3x + 7$$

находим производную

$$f^{/}(x) = (4x^2 + 3x + 7)^{/} = 8x + 3$$

находим критические точки

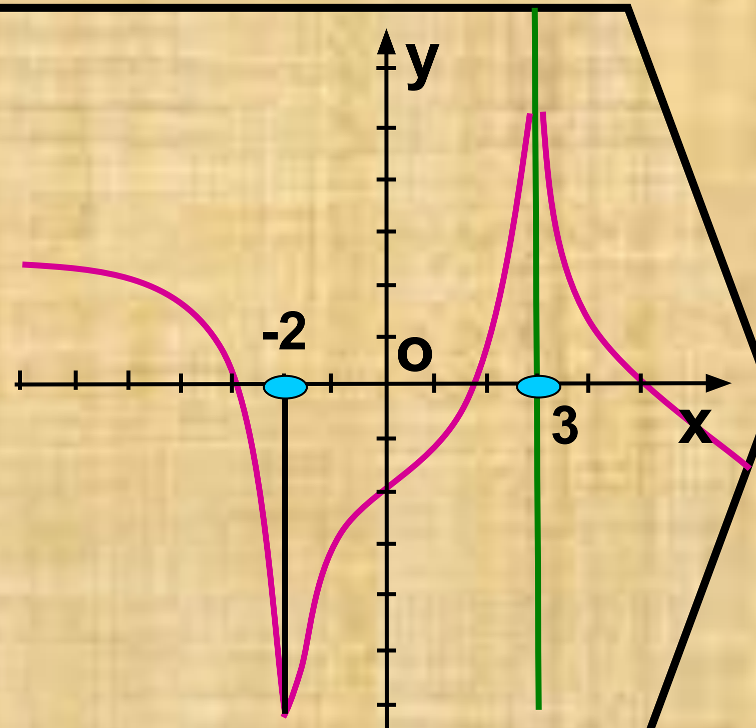
$$f^{/}(x) = 0 \Rightarrow 8x + 3 = 0 \Rightarrow 8x = -3$$

$$\boxed{x = -\frac{3}{8}} \Leftarrow$$ **критическая точка**

В критических точках касательная параллельна оси абсцисс (ох).

Критические точки

$f^{/}(x)$ не существует или $f^{/}(x) \neq 0$



$$f(x)=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x+5}$$

находим производную

$$f^{/}(x)=(\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x+5})^{/}=-\frac{1}{(x-4)^2}-\frac{1}{(x+5)^2}$$

находим критические точки

$$f^{/}(x)\neq 0 \Rightarrow x-4\neq 0 \text{ и } x+5\neq 0$$

$x\neq 4, x\neq -5$ **критические точки**

Промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=x^3+3x^2-9x+1$$

Находим производную.

$$f'(x)=(x^3+3x^2-9x+1)'=3x^2+6x-9$$

Находим критические точки.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+6x-9=0$$

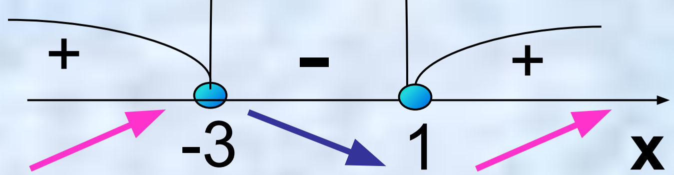
$$x^2+2x-3=0;\ D=2^2-4*1*(-3)=16$$

$$x_1=\frac{-2-\sqrt{16}}{2*1}=\frac{-2-4}{2}=-3$$

$$x_2=\frac{-2+4}{2}=1$$

$$x_1=-3,\ x_2=1$$

Разбиваем числовую ось критическими точками на промежутки.



Определяем знак производной (+или-) на каждом промежутке.

$$f'(-4)=3*(-4)^2+6*(-4)-9=15>0$$

$$f'(0)=3*0^2+6*0-9=-9<0$$

$$f'(2)=3*2^2+6*2-9=15>0$$

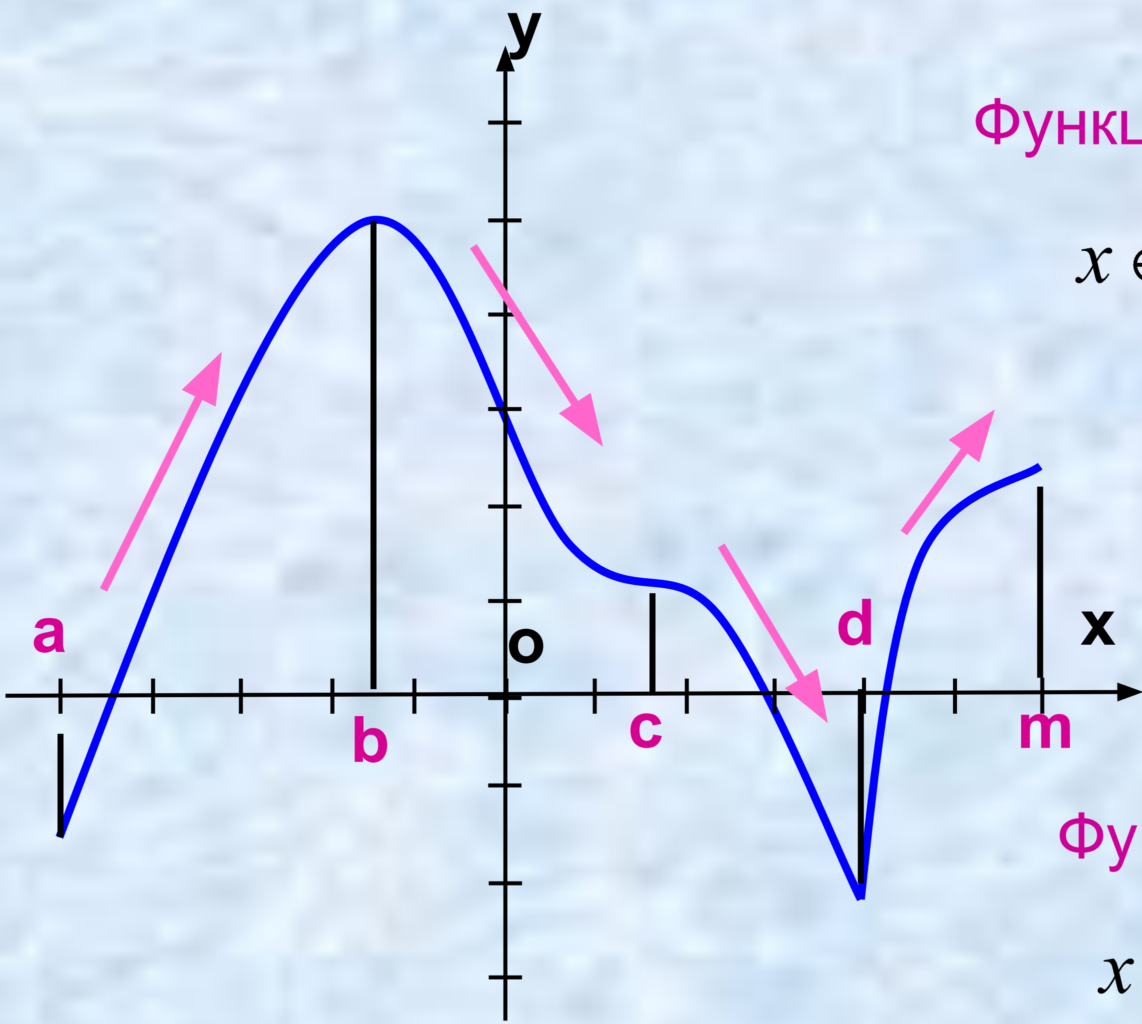
Если $f'(x)>0$ в каждой точке интервала I, то функция f (x) возрастает на I.

Если $f'(x)<0$ в каждой точке интервала I, то функция f (x) убывает на I.

Функция возрастает при $x\in(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$

Функция убывает при $x\in(-3;1)$

Промежутки возрастания и убывания функции



Функция возрастает при

$$x \in (a;b) \cup (d;m)$$

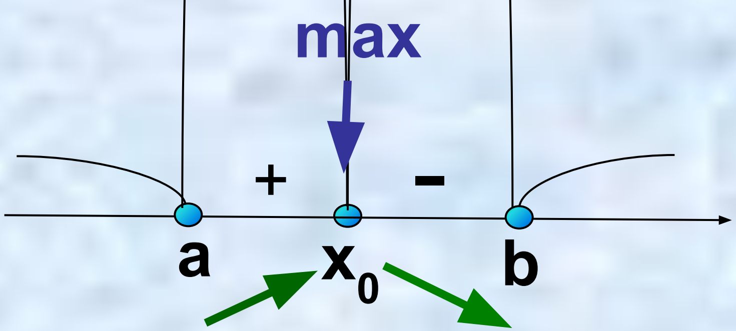
Функция убывает при

$$x \in (b;c) \cup (c;d)$$

Точки экстремума функции

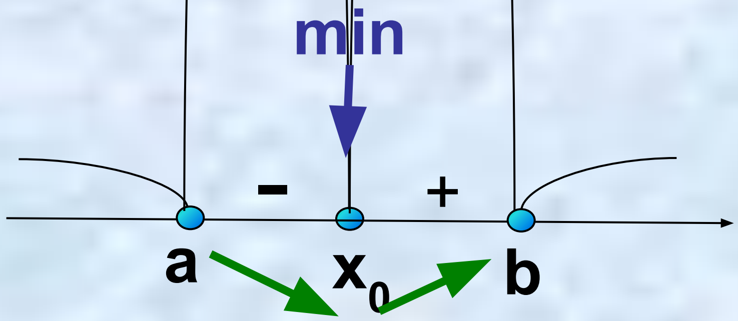
*Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x)>0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f'(x)<0$ на интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой **максимума** функции f.*

*Если в точке x_0 производная меняет знак с + на -, то x_0 точка **максимума** функции.*



*Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x)<0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f'(x)>0$ на интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой **минимума** функции f.*

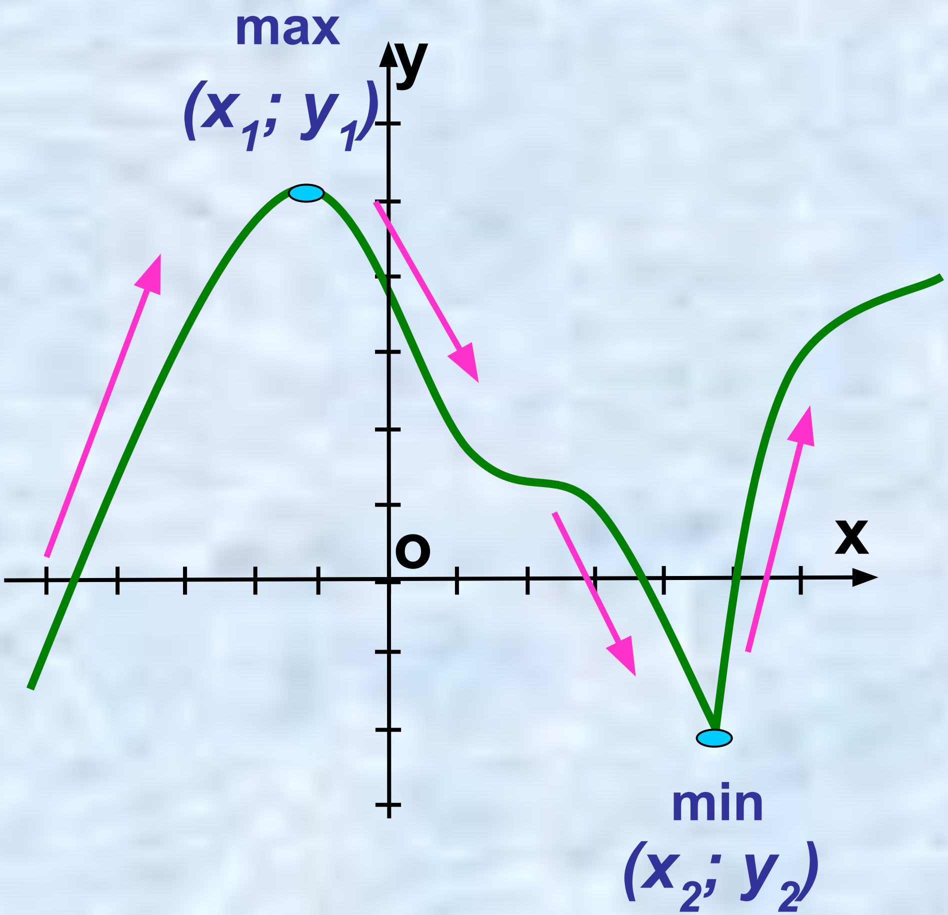
*Если в точке x_0 производная меняет знак с - на +, то x_0 точка **минимума** функции.*



Находим значение функции в точке x_0.

$$y = f(x_0) = \ldots$$

Точки экстремума функции



По графику определяем координаты точек <u>min</u> и <u>max</u>.

Точки экстремума функции

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-16x+2$$

Находим производную.

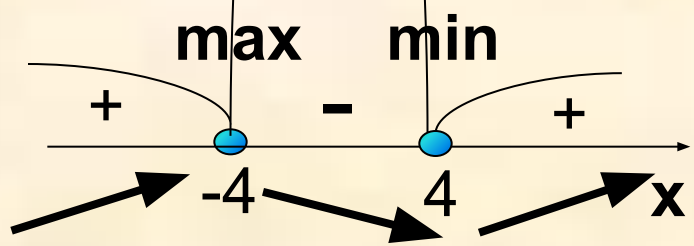
$$f^{/}(x)=(\frac{x^3}{3}-16x+2)^{/}=\frac{3x^2}{3}-16=x^2-16$$

Находим критические точки.

$$f^{/}(x)=0\Rightarrow x^2-16=0$$

$$x^2=16\Rightarrow x=\pm\sqrt{16}\Rightarrow x_1=4,\ x_2=-4$$

Разбиваем числовую ось критическими точками на промежутки.



Определяем знак производной (+или-) на каждом промежутке.

$$f^{/}(-5)=(-5)^2-16=9>0$$

$$f^{/}(0)=0^2-16=-16<0$$

$$f^{/}(5)=5^2-16=9>0$$

Функция возрастает при $x\in(-\infty;-4)\cup(4;\infty)$ **Функция убывает при** $x\in(-4;4)$

Находим значение функции в точке x_0.

$$f(-5)=\frac{(-5)^3}{3}-16*(-5)+2=40\frac{1}{3}\approx 40{,}3$$

$$f(5)=\frac{5^3}{3}-16*5+2=-36\frac{1}{3}\approx -36{,}3$$

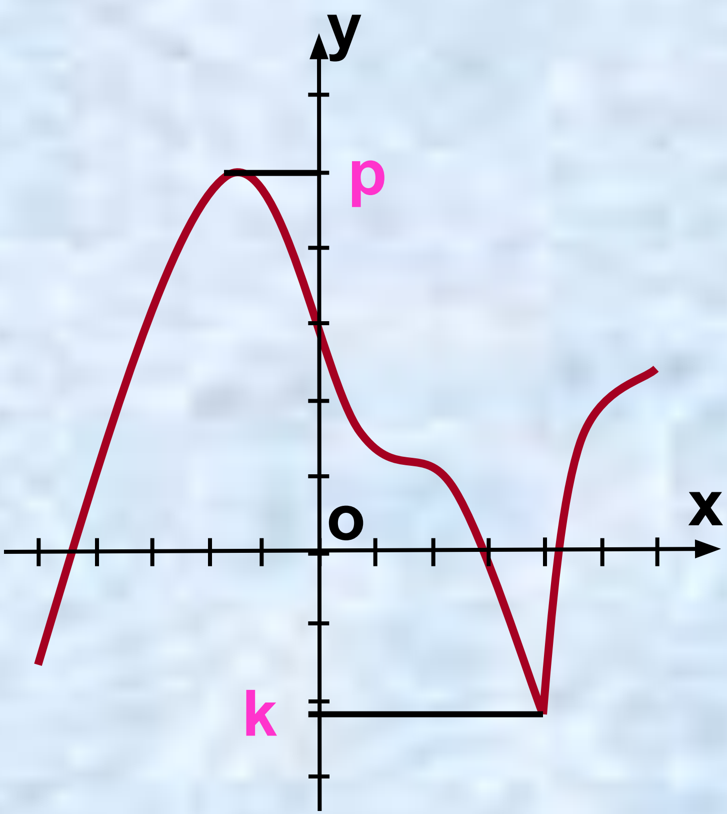
max $A(-4;40{,}3)$

экстремумы

min $B(4;-36{,}3)$

Область значений функции

Область значений функции -это множество, состоящее из всех чисел f (x), таких, что x принадлежит области определения функции f.



Область значений функции –
это множество значений у.

E (y) = (k;p)

k - y наименьшее

p - y наибольшее

План исследования функции

1. Область определения.

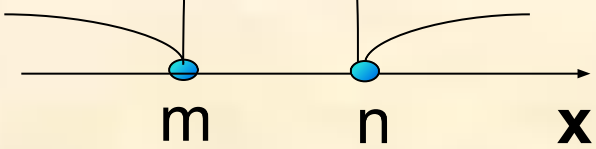
2. Чётность, нечётность функции.

3. Периодичность.

4. Точки пересечения графика с координатными осями:
а).x=0, f(0)=… → (0;y), б).
f (x)=0 → x=a, x=b …→ A(a;0), B(b;0) …

5. $f^{/}$ (x)=…

6. Критические точки:
$f^{/}$ (x) =0 или $f^{/}(x) \neq 0$ →
x=m, x=n или $x \neq m, x \neq n$



7. Промежутки возрастания и убывания функции. Определяем знак $f^{/}$ (x) на промежутках: если $f^{/}$ (x) > 0, то функция возрастает, если $f^{/}$ (x) < 0, то функция убывает.

8. Экстремумы.

Находим значения функции в точках min и max.

9. Строим график.

10. По графику определяем область значений функции, наибольшее и наименьшее значения функции.

Практикум

Исследуй функцию и построй график.

$a).f(x) = 4x^2 - x^4$

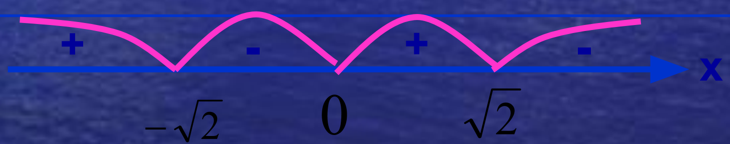
$б).f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$

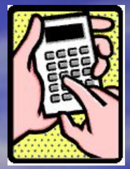
$в).f(x) = 3x^2 - x^3$

$г).f(x) = 27x - x^3$

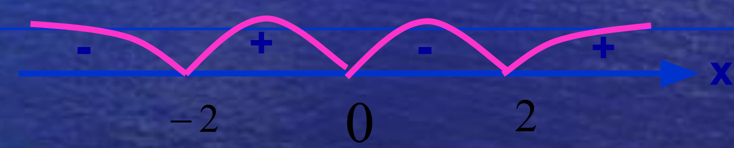
$д).f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

$a).f(x)=4x^2-x^4$

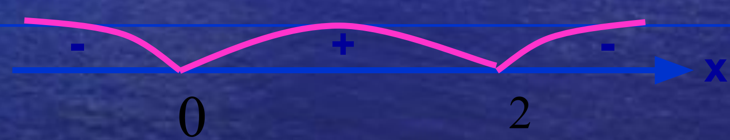
1. Область определения.		$D(y)=(-\infty;\infty)$
2. Чётность, нечётность.		чётная
3. Периодичность.		не периодичная
4. Точки пересечения а) x = 0		(0;0)
б) f (x) = 0		(0;0), (-2;0), (2;0)
5. $f'(x)$ = …		$f'(x)=8x-4x^3$
6. Критические точки $f'(x)=0$		$x=0, x=\sqrt{2}, x=-\sqrt{2}$
7. Промежутки возрастания и убывания функции		
функция возрастает		$x\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(0;\sqrt{2})$
функция убывает		$x\in(-\sqrt{2};0)\cup(\sqrt{2};\infty)$
8. Экстремумы:	max	$(\sqrt{2};4)$ $(-\sqrt{2};4)$
	min	$(0;0)$
9. Область значений.		$E(y)=(-\infty;4)$
у - наибольшее		у = 4
у - наименьшее		



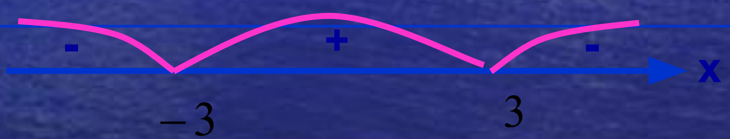
б). $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$

1. Область определения.	$D(y) = (-\infty; \infty)$
2. Чётность, нечётность.	чётная
3. Периодичность.	не периодичная
4. Точки пересечения а) x = 0	(0;-9)
б) f (x) = 0	(-3;0), (3;0)
5. $f'(x)$ = …	$f'(x) = 4x^3 - 16x$
6. Критические точки $f'(x) = 0$	$x = 0, x = 2, x = -2$
7. Промежутки возрастания и убывания функции	
функция возрастает	$x \in (-2;0) \cup (2;\infty)$
функция убывает	$x \in (-\infty;-2) \cup (0;2)$
8. Экстремумы: max	$(0;-9)$
min	$(2;-25)$ $(-2;-25)$
9. Область значений.	$E(y) = (-25;\infty)$
y - наибольшее	
y - наименьшее	y = - 25

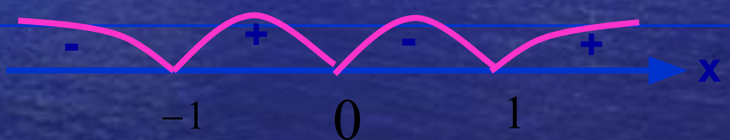
$в).f(x)=3x^2-x^3$

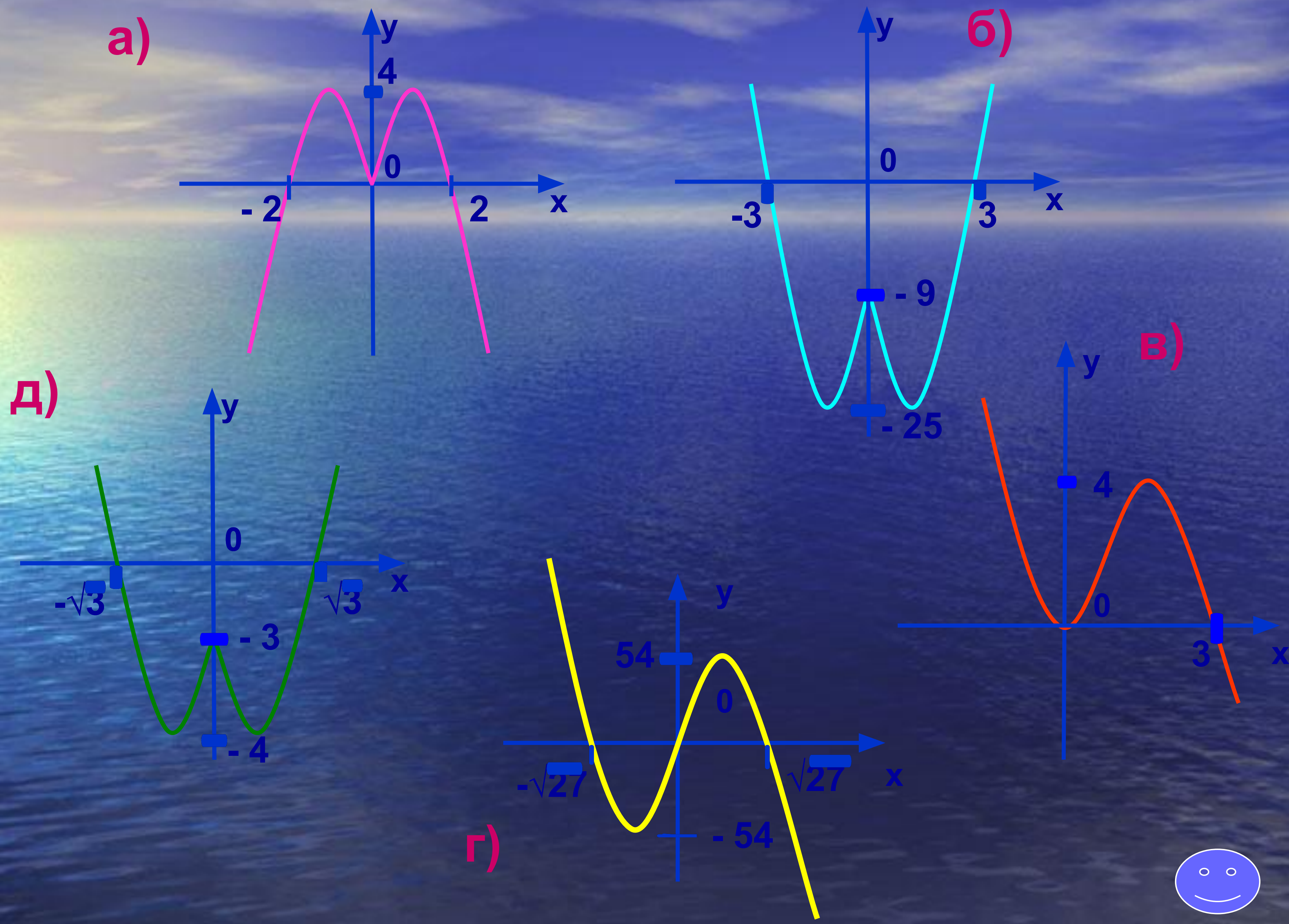
1. Область определения.		$D(y)=(-\infty;\infty)$
2. Чётность, нечётность.		ни чётная, ни нечётная
3. Периодичность.		не периодичная
4. Точки пересечения а) x = 0		(0;0)
б) f (x) = 0		(0;0), (3;0)
5. $f^{/}$ (x) = …		$f^{/}(x)=6x-3x^2$
6. Критические точки $f^{/}$ (x) = 0		$x=0, x=2$
7. Промежутки возрастания и убывания функции		
функция возрастает		$x\in(0;2)$
функция убывает		$x\in(-\infty;0)\cup(2;\infty)$
8. Экстремумы:	max	(2;4)
	min	(0;0)
9. Область значений.		$E(y)=(-\infty;\infty)$
y - наибольшее		
y - наименьшее		

г). $f(x) = 27x - x^3$

1. Область определения.		$D(y) = (-\infty; \infty)$
2. Чётность, нечётность.		нечётная
3. Периодичность.		не периодичная
4. Точки пересечения а) x = 0		(0;0)
б) f (x) = 0		$x = 0, x = \sqrt{27}, x = -\sqrt{27}$
5. $f^{/}(x) = \ldots$		$f^{/}(x) = 27 - 3x^2$
6. Критические точки $f^{/}(x) = 0$		$x = 3, x = -3$
7. Промежутки возрастания и убывания функции		
функция возрастает		$x \in (-3;3)$
функция убывает		$x \in (-\infty;-3) \cup (3;\infty)$
8. Экстремумы:	max	(3;54)
	min	(−3;−54)
9. Область значений.		$E(y) = (-\infty; \infty)$
у - наибольшее		
у - наименьшее		

$д).\ f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

1. Область определения.		$D(y) = (-\infty; \infty)$
2. Чётность, нечётность.		чётная
3. Периодичность.		не периодичная
4. Точки пересечения а) x = 0		(0;-3)
б) f (x) = 0		$x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$
5. $f'(x)$ = …		$f'(x) = 4x^3 - 4x$
6. Критические точки $f'(x) = 0$		$x = 0, x = 1, x = -1$
7. Промежутки возрастания и убывания функции		
функция возрастает		$x \in (-1;0) \cup (1;\infty)$
функция убывает		$x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$
8. Экстремумы:	max	$(0;-3)$
	min	$(1;-4)$ $(-1;-4)$
9. Область значений.		$E(y) = (-4;\infty)$
y - наибольшее		
y - наименьшее		y = - 4


а)
y
4
0
- 2
2
x
б)
y
0
x
-3
3
- 9
- 25
в)
y
4
0
3
x
д)
y
0
x
-√3
√3
- 3
- 4
г)
y
54
0
x
-√27
√27
- 54