

Классическое определение вероятности

Теория вероятностей – это
раздел математики, изучающий
вероятно-статистические
закономерности



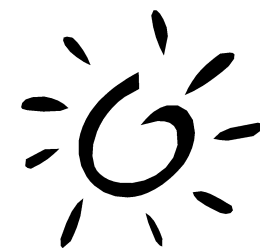
Теория вероятностей



Развитие теории вероятностей с момента зарождения этой науки и до настоящего времени было несколько своеобразным. На первом этапе истории этой науки она рассматривалась как занимательный “пустячок”, как собрание курьезных задач, связанных в первую очередь с азартными играми в кости и карты.



Основатели теории вероятностей



Основателями теории вероятностей были французские математики Б. Паскаль и П. Ферма, и голландский ученый Х. Гюйгенс

Основателями теории вероятностей были французские математики Б. Паскаль и П. Ферма, и голландский ученый Х. Гюйгенс



Б. Паскаль




П. Ферма



Х. Гюйгенс

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ.

СОБЫТИЕ

 Под **СОБЫТИЕМ** понимается явление, которое происходит в результате осуществления какого-либо определенного эксперимента.

ПРИМЕР. Бросаем шестигранный игральный кубик.

Определим события:

A {выпало четное число очков};

B {выпало число очков, кратное 3};

C {выпало более 4 очков}.

Эксперимент (опыт)



ЭКСПЕРИМЕНТ (или опыт)

закljučается в наблюдении за объектами или явлениями в строго определенных условиях и измерении значений заранее определенных признаков этих объектов (явлений).



ПРИМЕРЫ

- сдача экзамена,
- наблюдение за дорожно-транспортными происшествиями,
- выстрел из винтовки,
- бросание игрального кубика,
- химический эксперимент,
- и т.п.



СТАТИСТИЧЕСКИЙ



Эксперимент называют **СТАТИСТИЧЕСКИМ**, если он может быть повторен в практически неизменных условиях неограниченное число раз.

СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

- ✓ СЛУЧАЙНЫМ называют событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта). Обозначают заглавными буквами А, В, С, Д, ... (латинского алфавита).



Вопросы:

1. Является ли случайным событие «Меня завтра спросят на уроке»?
2. Является ли случайным событие «Летом у меня будут каникулы»?
3. Является ли случайным событие «Мне сегодня встретится черная кошка»?
4. Вообразите, что вы отправились на рыбалку. Какие случайные события могут произойти при этом?
5. Приведите примеры случайных событий из вашей школьной жизни.



Опыт 1:

Подбрасывание монеты.

Испытание – подбрасывание монеты; события – монета упала «орлом» или «решкой».



«решка» - лицевая
сторона монеты (аверс)



«орел» - обратная
сторона монеты (реверс)



Опыт 2:

Подбрасывание кубика.



Это следующий по популярности после монеты случайный эксперимент.

Испытание – подбрасывание кубика; события – выпало 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков (и другие).



Опыт 3:

Выбор перчаток. В коробке лежат 3 пары одинаковых перчаток. Из нее, не глядя, вынимаются две перчатки.

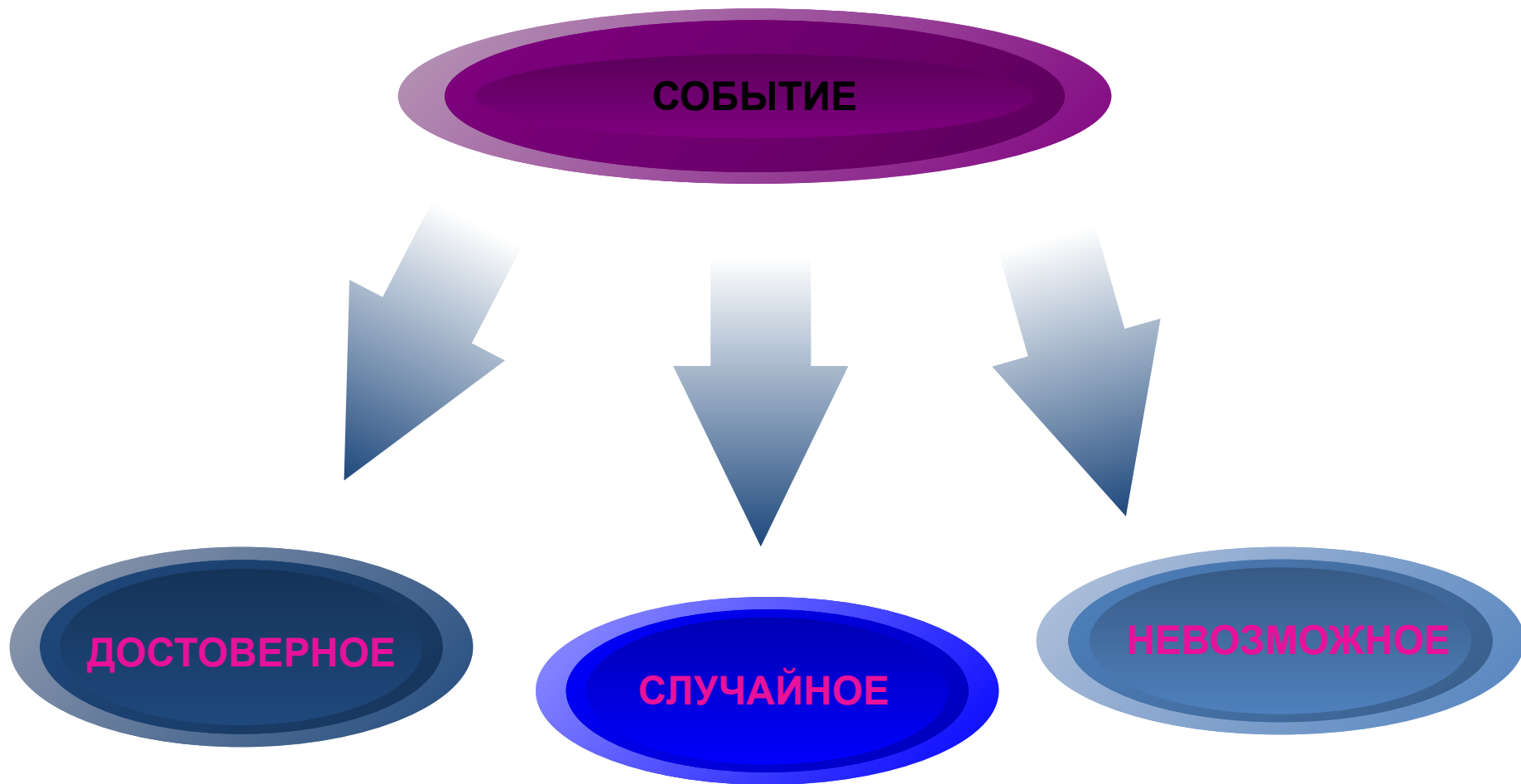


Опыт 4:

«Завтра днем – ясная погода».

Здесь наступление дня – испытание, ясная погода – событие.

Типы событий



Типы событий

**ДОСТОВЕРНО
Е**

Событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания.

СЛУЧАЙНОЕ

Случайным называют событие которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания.

НЕВОЗМОЖНОЕ

Событие называется **невозможным**, если оно не может произойти в результате данного испытания.

Примеры событий

досто-
верные

слу-
чайные

невоз-
можные

1. ПОСЛЕ ЗИМЫ
НАСТУПАЕТ
ВЕСНА.

2. ПОСЛЕ НОЧИ
ПРИХОДИТ
УТРО.

3. КАМЕНЬ
ПАДАЕТ ВНИЗ.

4. ВОДА
СТАНОВИТСЯ
ТЕПЛЕЕ ПРИ
НАГРЕВАНИИ.

1. НАЙТИ КЛАД.

2. БУТЕРБРОД
ПАДАЕТ
МАСЛОМ ВНИЗ.

3. В ШКОЛЕ
ОТМЕНИЛИ
ЗАНЯТИЯ.

4. ПОЭТ
ПОЛЬЗУЕТСЯ
ВЕЛОСИПЕДОМ.

5. В ДОМЕ
ЖИВЕТ КОШКА.

1. 30 ФЕВРАЛЯ ДЕНЬ
РОЖДЕНИЯ.

2. ПРИ
ПОДБРАСЫВАНИИ
КУБИКА ВЫПАДАЕТ
7 ОЧКОВ.

3. ЧЕЛОВЕК
РОЖДАЕТСЯ
СТАРЫМ И
СТАНОВИТСЯ С
КАЖДЫМ ДНЕМ
МОЛОЖЕ.

Достоверные, невозможные и случайные события

Во многих играх используют кубик, у которого на каждой грани отмечено различное количество точек – от 1 до 6. Бросание кубика будем считать опытом, а полученный результат событием. Какие предсказания можно сделать бросая игральный кубик?

1) Выпадет одна из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (да, выпадет). Событие, которое в данном опыте обязательно наступит, называют достоверным событием.

2) Выпадет цифра 7 (нет, не выпадет). Событие, которое в данном опыте наступить не может, называют невозможным событием.

3) Выпадет цифра 1 (да или нет, выпадет или не выпадет). Событие, которое в данном опыте может наступить, а может и не наступить, называют случайным событием.


Вопросы:

- 1. Укажите какие из перечисленных событий по вашему мнению являются достоверными, а какие невозможными:**
 - ❖ монета, брошенная на гладкую жесткую поверхность встала на ребро
 - ❖ на игральном кубике кости выпало 7 очков
 - ❖ на игральном кубике кости выпало от 1 до 6 очков
 - ❖ номер открытой странице в книге дробное число
 - ❖ Номер открытой страницы в книге не меньше 1
 - ❖ 1 января в школе не будет уроков

Какие из следующих событий – случайные, достоверные, невозможные?

- Черепаха научится говорить;
- вода в чайнике, стоящим на горячей плите, закипит;
- ваш день рождения – 19 октября
- вы выигрываете, участвуя в лотерее;
- вы не выигрываете, участвуя в беспроигрышной лотерее;
- вы проиграете партию в шахматы;
- на следующей неделе испортится погода;
- после четверга будет пятница;
- после пятницы будет воскресенье.

ИСХОД

 **ИСХОДОМ** (или элементарным исходом, элементарным событием) называется один из взаимоисключающих друг друга вариантов, которым может завершиться случайный эксперимент.

Число возможных исходов в каждом из рассмотренных выше опытах.



Опыт 1. – 2 исхода: «орел», «решка».



Опыт 2. – 6 исходов: 1, 2, 3, 4, 5, 6.



Опыт 3. – 3 исхода: «обе перчатки на левую руку», «обе перчатки на правую руку», «перчатки на разные руки».

- Однозначные
исходы
предполагают
единственный
результат того или
иного события:
смена дня и ночи,
смена времени года
и т.д.

Неоднозначные исходы предполагают несколько различных результатов того или иного события:



при подбрасывании кубика выпадают разные грани; выигрыш в Спортлото; результаты спортивных игр.

Благоприятный исход:

Исход испытания
называется
благоприятным событием
 A , если его наступление в
результате опыта
приводит к наступлению
события A

Вероятность события

Вероятность **достоверного** события считается равной **1**.

Вероятность **невозможного** события считается равной **0**.

Вероятность **случайного** события равна дроби, в знаменателе которой содержится число всех равновероятных возможностей (число всех исходов), из которых состоит достоверное событие, а в числителе число тех возможностей, при которых рассматриваемое событие происходит (число всех благоприятных исходов).

$$P = \frac{\text{число всех благоприятных исходов}}{\text{число всех исходов}}$$

Принято вероятность события обозначать буквой **P**.

Вероятность часто записывают в процентах (%).

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение числа исходов, в результате которых наступает событие A , к общему числу всех равновозможных между собой исходов этого испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m – число исходов, благоприятствующих событию

n – число всех возможных исходов

Вероятность случайного события

Пример. Бросают игральный кубик. Какова вероятность, что выпадет 1) 1, 2) чётное число очков.

1) Всего имеется 6 равновероятных возможностей выпадения на кубике 1, 2, 3, 4, 5, 6 (достоверное событие). Вероятность достоверного события равна 1, значит, вероятность каждого из шести равновероятных событий равна $\frac{1}{6}$.

$$P = \frac{1}{6}.$$

2) Этот случай состоит из трёх равновероятных возможностей - выпадения 2, выпадения 4, выпадения 6. Значит

$$P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ (или 50\%).}$$

Элементарные события

В результате случайного опыта могут произойти различные случайные события. Например, в результате бросания игральной кости может выпасть четвёрка, может выпасть чётное число очков.

Заметим, что событие «выпало чётное число очков» при бросании игральной кости состоит из трёх элементарных событий: «выпало два очка», «выпало четыре очка» и «выпало шесть очков». А событие «выпала четвёрка» на более простые события не разделяется.

События, которые нельзя разделить на более простые, называются элементарными событиями.

В результате случайного опыта обязательно наступает только одно элементарное событие.

Равновозможные элементарные события

Элементарные события при одном бросании игральной кости нам известны: это 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Если кость правильная, то шансы этих элементарных событий одинаковы.

Элементарные события, шансы которых одинаковы, будем называть **равновозможными**.

При бросании двух игральных костей элементарных событий уже 36, а все они тоже равновозможны.

Случайные опыты, в которых все элементарные события равновозможны, часто возникают при бросании костей, раздаче игральных карт, при розыгрыше лотереи и т. п.

Задача

Сколько элементарных событий в опыте,
если вероятность осуществления одного
из них равна $1/7$?

Ответ:

7.

Благоприятствующие элементарные события

Каждое событие состоит из элементарных событий. Например, событие «выпало чётное число очков» при бросании игральной кости состоит из трёх элементарных событий: «выпало два очка», «выпало четыре очка» и «выпало шесть очков».

Элементарные события, при которых наступает событие A , называются элементарными событиями, благоприятствующими событию A .

Случайное событие может иметь несколько благоприятствующих элементарных событий. Два различных события могут произойти одновременно. Это не относится к элементарным событиям.

Элементарное событие всегда наступает только одно.

Вероятности событий

Вероятности элементарных событий обычно обозначают буквой **P** латинского алфавита. Вероятность случайного события будем обозначать так же.

Например, вероятность события **A** обозначаем **P(A)**, вероятность события **B** – это **P(B)**, и т. д.

Правило вычисления вероятностей: Вероятность события равна сумме вероятностей элементарных событий, благоприятствующих этому событию.

Запишем это правило вычисления вероятностей в виде формулы. Пусть событию **A** благоприятствуют элементарные события **a, b, c, d**. Тогда его вероятность равна сумме вероятностей этих элементарных событий:

$$P(A) = P(a) + P(b) + P(c) + P(d).$$

Противоположное событие

Событием, противоположным событию A , называют событие, которому благоприятствуют все элементарные события, не благоприятствующие событию A .

Событие, противоположное событию A , обозначают \bar{A} . Если событие B противоположно событию A , то $B = \bar{A}$.

События A и \bar{A} называют взаимно противоположными или дополнениями друг для друга.

Взаимно противоположные события одновременно произойти не могут, но какое-либо из них происходит обязательно. Поэтому $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Иными словами, сумма вероятностей взаимно противоположных событий равна единице. Следовательно,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \text{ и } P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

№1. В сборнике билетов по биологии 25 билетов, в двух из них задачи о грибах. На экзамене школьнику достается 1 билет. Найти вероятность того, что этот вопрос не о грибах.

№2. Из 25 билетов по геометрии ученик успел подготовить 11 первых и 8 последних билетов. Какова вероятность того, что на экзамене ему достанется билет, который он не подготовил?

№3. В доме 100 квартир, в котором 3 на первом этаже и 6 на последнем. Какова вероятность того, что жильцу не достанется квартира на первом и последнем этажах?

№4. Карточки с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 перемешивают и выкладывают в ряд. Какова вероятность того, что получится четное число?

№5. Подбрасывают два игральных кубика. Какова вероятность того, что оба числа окажутся меньше 5?

№6. Два пассажира садятся в электричку, состоящую из 8 вагонов. А) С какой вероятностью они окажутся в разных вагонах, если каждый из них выбирает вагон случайным образом? Б) Какова вероятность того, что они окажутся в одном вагоне?

№7. Бросают три игральных кубика. Найти вероятность того, что в сумме выпадет не более четырех очков.

№8. В урне 10 шаров черного и белого цвета. Вероятность того, что 2 шара, вынутых одновременно, будут черными равна $1/15$. Сколько в урне белых шаров?

Задачи.

Пример 2. Найти вероятность того, что при одном бросании игрального кубика выпадет: а) 4; б) 5; в) четное число очков; г) число очков, большее 4; д) число очков, не кратное трем.

Пример 3. Найти вероятность того, что при двукратном бросании игрального кубика произведение выпавших очков будет: а) кратно 5; б) кратно 6.