# §2.4. Формула полной вероятности

Пусть требуется определить вероятность некоторого события А, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1$, $H_2$,…, $H_n$, образующих полную группу несовместных событий (известны вероятности этих событий и условные вероятности $P(A|H_1)$,…,$P(A|H_n)$). Ответ дает следующая теорема.

Теорема 2.7: *Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1$, $H_2$,…, $H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений, вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:*

$P(A)= \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A|H_i).$

Доказательство: $H_1, H_2, \ldots, H_n$

$H_1A, \ldots, H_iA, \ldots, H_nA$

$$P(A)=P(H_1A+ H_2A+\ldots+ H_nA). \qquad (1)$$

$$P(H_1A+ H_2A+\ldots+ H_nA)=$$

$$= P(H_1A)+P( H_2A)+\ldots+ P(H_nA). \qquad (2)$$

$$P(H_1A)= P(H_1)\, P(A|H_1), \ldots, P(H_nA)=$$

$$= P(H_n)\, P(A|H_n). \qquad (3)$$

Пример 1: 3 урны. В первой урне 2 белых и 1 черный; во второй – 3 белых и 1 черный; в третьей – 2 белых и 2 черных шара. Выбирается наугад одна из урн и вынимается из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение: А – появление белого шара; $H_1$ – выбор первой урны; $H_2$ – выбор второй урны; $H_3$ – выбор третьей урны. Т.к. $H_1 H_2 H_3$ образуют полную группу несовместных событий, то

$P(H_1+ H_2+ H_3)=P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1.$

Следовательно: $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3.$

Условные вероятности события А при осуществлении событий $H_i$ соответственно равны: $P(A|H_1)=2/3$, $P(A|H_2)=3/4$, $P(A|H_3)=2/4$.

По формуле полной вероятности $P(A)=P(H_1)P(A|H_1) +$
$+P(H_2) P(A|H_2)+P(H_3) P(A|H_3)=1/3\ 2/3+1/3\ 3/4+$
$+1/3\ 2/4=23/36.$

Пример 2: По самолету производятся 3 одиночных выстрела. Вероятность попадания при 1-ом выстреле – 0,4; при 2-ом – 0,5; при 3-ем – 0,7. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий: при одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,2; при двух – 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет выведен из строя.

Решение: 4 гипотезы

$H_0$ – в самолет не попало ни одного снаряда;

$H_1$ – попал 1 снаряд; $H_2$ – попало 2 снаряда;

$H_3$ –попало 3 снаряда.

По т.сложения и умножения

$P(H_0)=0,6\ 0,5\ 0,3=0,09$

$P(H_1)=0,4\ 0,5\ 0,3+0,6\ 0,5\ 0,3+0,6\ 0,5\ 0,7=0,36$

$P(H_2)=0,6\ 0,5\ 0,7+0,4\ 0,5\ 0,7+0,4\ 0,5\ 0,3=0,41$

$P(H_3)=0,4\ 0,5\ 0,7=0,14$

$P(A|H_0)=0$ $P(A|H_1)=0,2$ $P(A|H_2)=0,6$ $P(A|H_3)=1$

$P(A)=P(H_0)\ P(A|H_0)+P(H_1)\ P(A|H_1)+$

$+P(H_2)\ P(A|H_2)+P(H_3)\ P(A|H_3)=0,36\ 0,2+$

$+0,41\ 0,6+0,14\ 1=0,458$

# §2.5.Теорема гипотез. Формула Байеса

Имеется полная группа несовместных гипотез (событий) $H_1$, $H_2$,…, $H_n$. Известны вероятности этих гипотез до опыта $P(H_1)$, $P(H_2)$,…, $P(H_n)$.

Определить: $P(H_i|A)$ гипотезы $H_i$.

Теорема 2.8. *Пусть $H_1$, $H_2$, …, $H_n$, полная группа несовместных событий. Тогда, если произошло событие A, то*

$$P(H_i|A)=P(H_i)\,P(A|H_i)/\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A|H_i).$$

Доказательство: $P(A|H_i)$

$P(H_i|A)=P(H_i)\,P(A|H_i)/P(A)$

$P(A)= P(H_i)\,P(A|H_i)$

Пример: Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одному выстрелу по одной мишени. Вероятность попадания в мишень первого стрелка 0,8, второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку.

Решение: $H_1$ – оба стрелка промахиваются; $H_2$ – оба стрелка попадают; $H_3$ – первый стрелок попадает, второй не попадает; $H_4$ – второй стрелок попадает, первый не попадает. Вероятности этих гипотез равны: $P(H_1)=0,2\times0,6=0,12$; $P(H_2)=0,8\times0,4=0,32$; $P(H_3)=0,8\times0,6=0,48$; $P(H_4)=0,2\times0,4=0,08$. $P(A|H_1)=0$; $P(A|H_2)=0$; $P(A|H_3)=1$; $P(A|H_4)=1$.

$P(H_3|A)= P(H_3)\, P(A|H_3)/(P(H_3)P(A|H_3)+$
$+P(H_4)P(A|\, H_4))=(0,48\times1)/(0,48\times1+0,08\times1)=6/7$;

$P(H_4|A)= P(H_4)\, P(A|H_4)/(P(H_3)P(A|H_3)+$
$+ P(H_4)P(A|\, H_4))=(0,08\times1)/(0,48\times1+0,08\times1)=1/7$.

# §2.6. Частная теорема о повторении опытов. Теорема Я.Бернулли

При практическом применении теории вероятности приходится встречаться с задачами, в которых требуется определить вероятность любого заданного числа появлений событий в результате серии опытов.

В большинстве случаев эти задачи решаются, когда опыты являются *независимыми*.

Несколько опытов называются независимыми, если вероятность того или иного исхода каждого их опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты.

Независимые опыты могут проводиться при одинаковых или различных условиях Q. В первом случае вероятность события А во всех опытах одна и та же. Во втором случае вероятность события А от опыта к опыту меняется. К первому случаю относится частная теорема, а ко второму – общая теорема о повторении опытов.

Теорема 2.9 (теорема Я. Бернулли). *Если производится $n$ независимых опытов, в каждом из которых событие А появляется с вероятностью $p$, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие А появится ровно $m$ раз в $n$ опытах, выражается формулой:*

$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} p^m q^{n-m}$

где q=1-p.

Доказательство: n = 2; A; p; q=1-p. m=1?

$A_1 \square A_2$ и $\square A_1 A_2$ $B = A_1 \square A_2 + \square A_1 A_2$

$P(B) = p(1-p) + (1-p)p = pq + qp = 2pq = C^1{}_2 pq$.

n=3, m=2

$A_1\ A_2 \square A_3$ , $A_1 \square A_2\ A_3$ и $\square A_1 A_2\ A_3$

$B = A_1\ A_2 \square A_3 + A_1 \square A_2\ A_3 + \square A_1 A_2\ A_3$

P

(B)=pp(1-p)+p(1-p)p+(1-p)pp=pq+pq+pq=$C^2{}_3$pq=3 pq

$B = A_1\ A_2\ \ldots\ A_n \square A_{n+1} + A_1 \square A_2\ A_3\ \ldots\ \square A_{n-1}\ A_n +$
$+\ldots+ \square A_1 \square A_2\ \ldots \square A_{n-m}\ A_{n-m+1}\ \ldots A_n$,

Полученную формулу называют *формулой Бернулли*. Она описывает, как распределяются вероятности между возможными значениями некоторой случайной величины m – числа появления события A при n независимых опытах.

Пример: Оптовая база снабжает 10 магазинов. От каждого магазина независимо от других с вероятностью 0,4 может поступить на очередной день заявка. Найти вероятность получения от 10 магазинов четырех заявок.

Решение: В данном случае n=10 m=4 p=0,4. Вероятность получения 4 заявок из 10 согласно формуле Бернулли равна:

$P_{10,4}=C^4_{10}\times(0,4)^4\times(0,6)^6$.

# §2.7. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

В тех случаях, когда использование формулы Бернулли затруднено из-за большого значения $n$, можно использовать асимптотическую формулу из следующей теоремы.

**Локальная теорема**. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p (0 < p < 1), событие наступит ровно m раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

Здесь

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

- $$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x).$$

- $$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x).$$

- $$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

- $$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x).$$

- $$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

**Пример.** Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 раз и не более 90 раз.

**Решение.** По условию задачи

$n = 100;\ m_1 = 75;\ m_2 = 90;\ p = 0{,}8;$

$q = 1 - p = 0{,}2.$

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа,

- $$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

Так как функция Лапласа нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, получим

$P_{100}(75 \leq 90) = \Phi(2{,}25) - \Phi(-1{,}25) = = \Phi(2{,}25) + \Phi(1{,}25)$.

По справочным таблицам найдём:

$\Phi(2{,}25) = 0{,}4938$; $\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$.

Искомая вероятность

$P_{100}(75 \leq m \leq 90) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = = 0{,}8882$.

# §2.8. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Число $m_0$ (наступление события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях $m_0$ раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число $m_0$ определяют из двойного неравенства

$$np - q \le m_0 \le np + p,$$

причем:

а) если число $(np - q)$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число $m_0$;

б) если число $(np - q)$ – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно $m_0$ и $m_0+1$;

в) если число $np$ – целое, то наивероятнейшее число $m_0 = np$.

**Пример.** В урне 10 белых и 40 чёрных шаров. Вынимают подряд 14 шаров, причём цвет вынутого шара регистрируют, а затем шар возвращают в урну. Определить наивероятнейшее число появлений белого шара.

**Решение.** Здесь $n = 14$, $p = 10/50 = 1/5$,

$q = 1 – p = 4/5$. Используя двойное неравенство $np – q \le m_0 \le np + p$ при указанных значениях $n$, $p$ и $q$, получим $14/5–4/5 \le m_0 \le 14/5 + 1/5$ т.е. $2 \le m_0 \le 3$.

Таким образом, задача имеет два решения:

$m_0 = 2$, $m_0 = 3$.

# §2.9. Формула Пуассона

- $$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

Здесь $\lambda = np$. Имеются таблицы для вычисления $P_n(m)$ , для различных $\lambda$ и $m$.

**Пример.** Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.

**Решение.** Так как вероятность $p = 0,004$ очень мала, применение локальной теоремы Лапласа приведет к значительному отклонению от точного значения $P_n(m)$.

Поэтому при p ≤ 0,1 применяют формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

где λ = np.

По условию задачи n = 1000; m = 5;

p = 0,004.

Тогда λ = 1000 * 0,004 = 4.

Подставляя данные задачи, получим

$$P_{1000}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0{,}1562$$

Замечание. Формулы Бернулли, Пуассона и формула, следующая из локальной теоремы Лапласа, служат для нахождения вероятности, что в $n$ испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, «успех» наступит ровно $m$ раз.

Для удобства сведём их в одну таблицу.

| **Название формулы** | **Формула** | **Когда даёт хорошее приближение** |
| --- | --- | --- |
| **Формула Бернулли** | $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ | Для всех n и p точная формула |
| **Формула, следующая из локальной теоремы Лапласа** | $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$<br>$x = \frac{m-np}{\sqrt{\phantom{npq}}}$<br>$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ | При p > 0,1<br>или np > 9 |
| **Формула Пуассона** | $P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$<br>$\lambda = np$ | $p \leq 0{,}1$ и $np \leq 9$ |