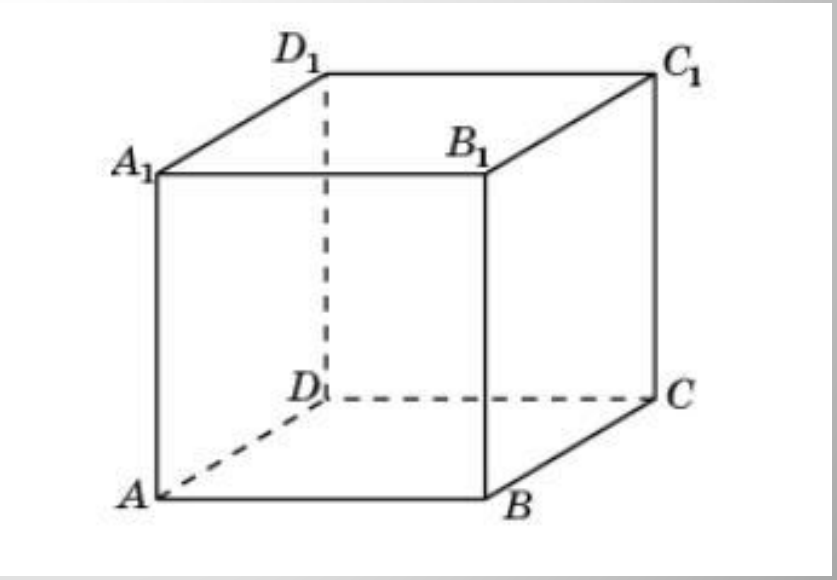
Решение заданий С2 при подготовке к ЕГЭ 2014 г.

Презентацию подготовила:
Учитель по математике
высшей категории
МАОУ «Лицей №3 им. А. С. Пушкина»
Попова Н.Ф.

г. Саратов,2014

Задача 1. Условие:

- Изобразите сечение единичного куба $A \ldots D_1$, проходящее через вершину D_1 и середины ребер AB; BC. Найти его $S_{сеч}$.



Решение:

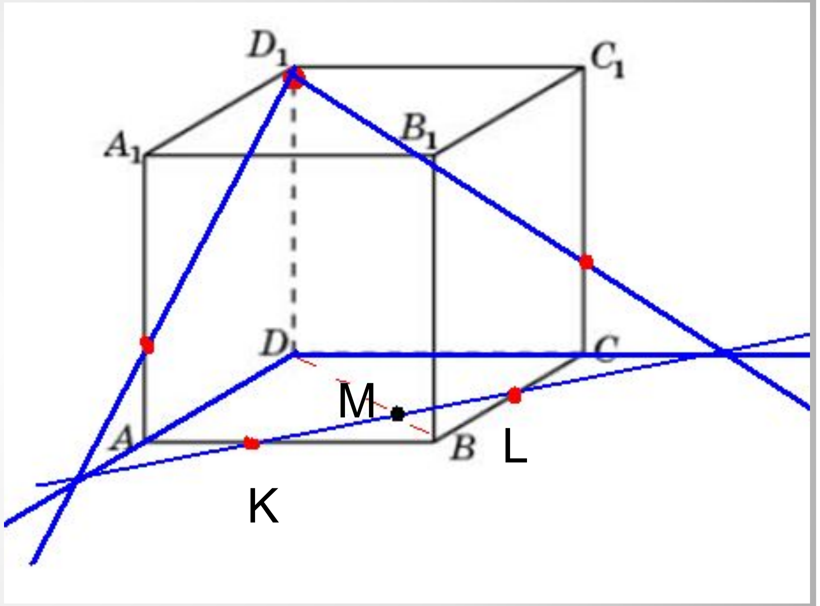
$$S\text{ проекции} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$DM = \frac{3}{4}DB = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

$$tg\varphi = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+tg^2\varphi}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{16}{18}}} = \sqrt{\frac{9}{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

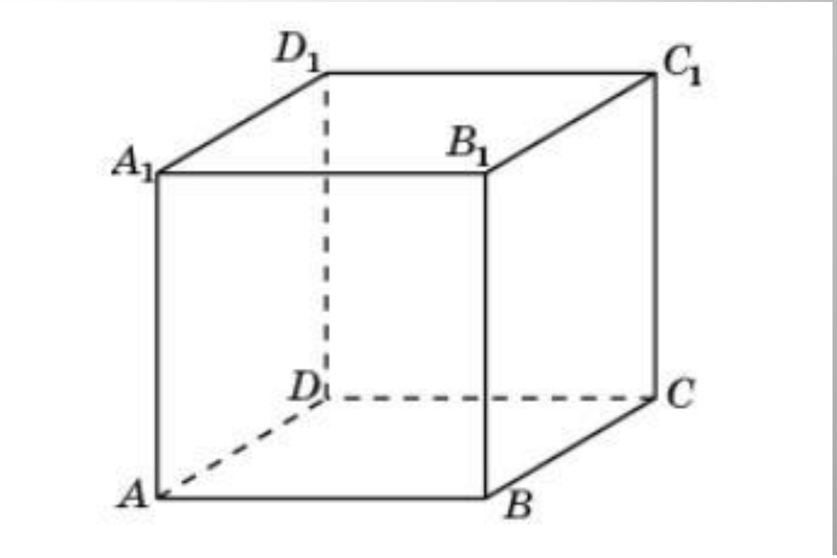
$$S\text{сеч} = \frac{7}{8} : \frac{3}{\sqrt{17}} = \frac{7\sqrt{17}}{24}$$



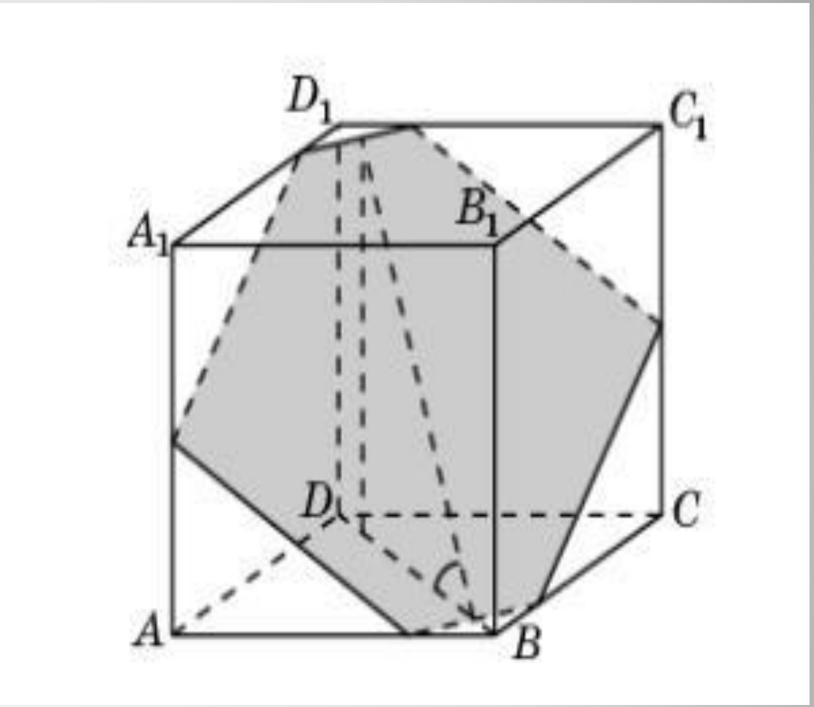
Ответ: $\frac{7\sqrt{17}}{24}$

Задача 2. Условие:

- Изобразите сечение единичного куба $A \ldots D_1$, проходящее через середины ребер AA_1, CC_1 и точку на ребре AB, отстоящую от вершины A на 0,75. Найдите его площадь.

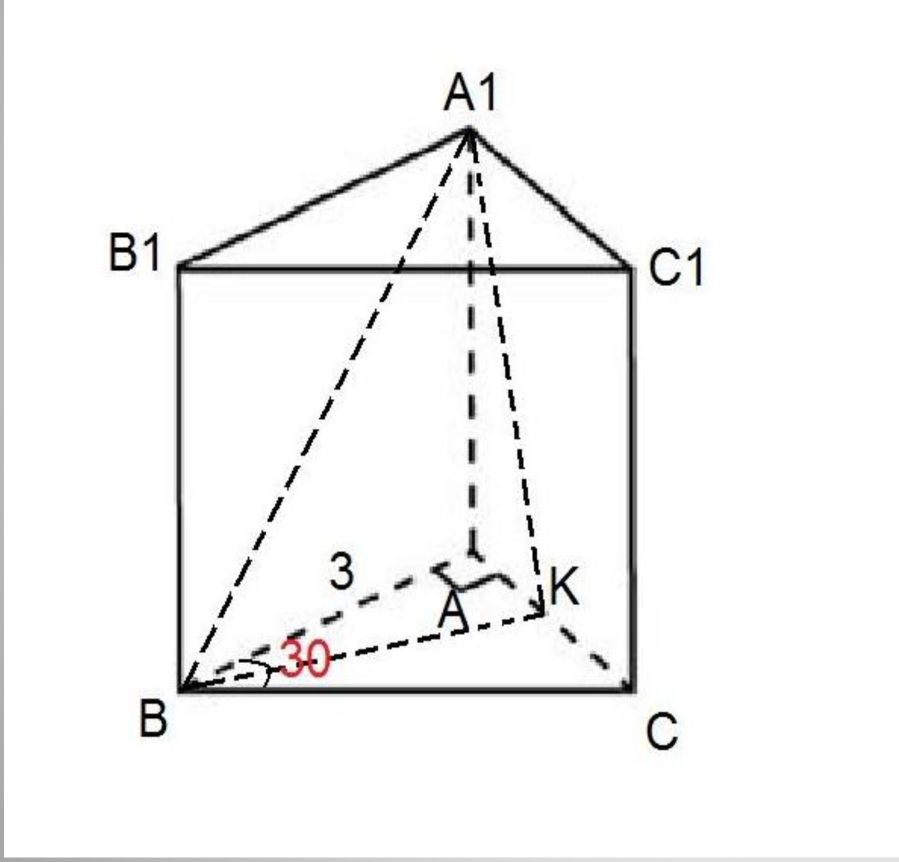


- Искомым сечением будет шестиугольник. Площадь его ортогональной проекции на плоскость ABC равна $\frac{15}{16}$,косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью ABC равен $\frac{3}{\sqrt{17}}$. Площадь сечения равна $\frac{5\cdot\sqrt{17}}{16}$.



Ответ: $S\text{сеч} = \frac{5\cdot\sqrt{17}}{16}$

Задача 3. Условие:



- В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ BK-биссектриса основания ABC. Через биссектрису и вершину A_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания 60°. Найти $S_{сеч.}$, если AB=3, BC=6, угол ABC=30°.

$$S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\varphi}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

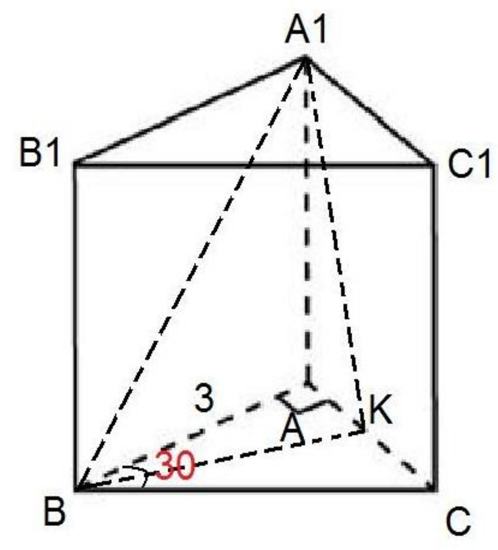
BK – биссектриса, по свойству биссектрис:

$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. AK=t; KC=2t.

$$S_{\Delta AKB} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_{сеч} = \frac{3}{2} : \frac{1}{2} = 3$$

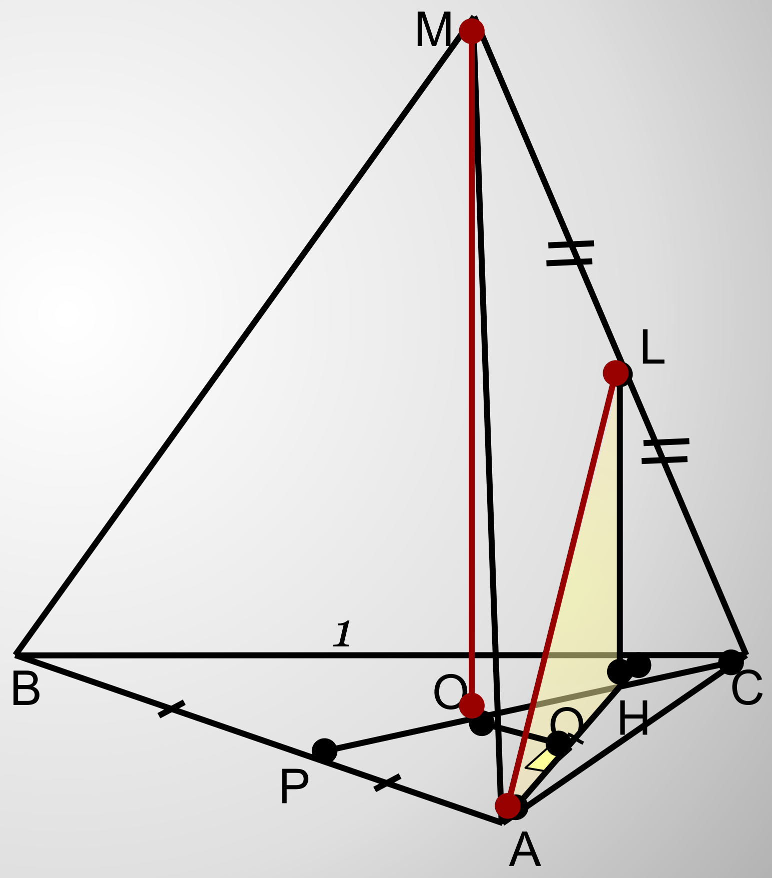
Ответ: 3.



- Если ортогональная проекция на плоскость α переводит прямую a в точку A, а прямую b в прямую b_1, то расстояние между скрещивающимися прямыми a и b равно расстоянию от A до прямой b_1.
- Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой.

Задача 4. Условие:

- Дан правильный тетраэдр MABC с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO, если L – середина MC, O – центр грани ABC.



Решение:

1. LH ⊥(ABC), ∈ H
CO

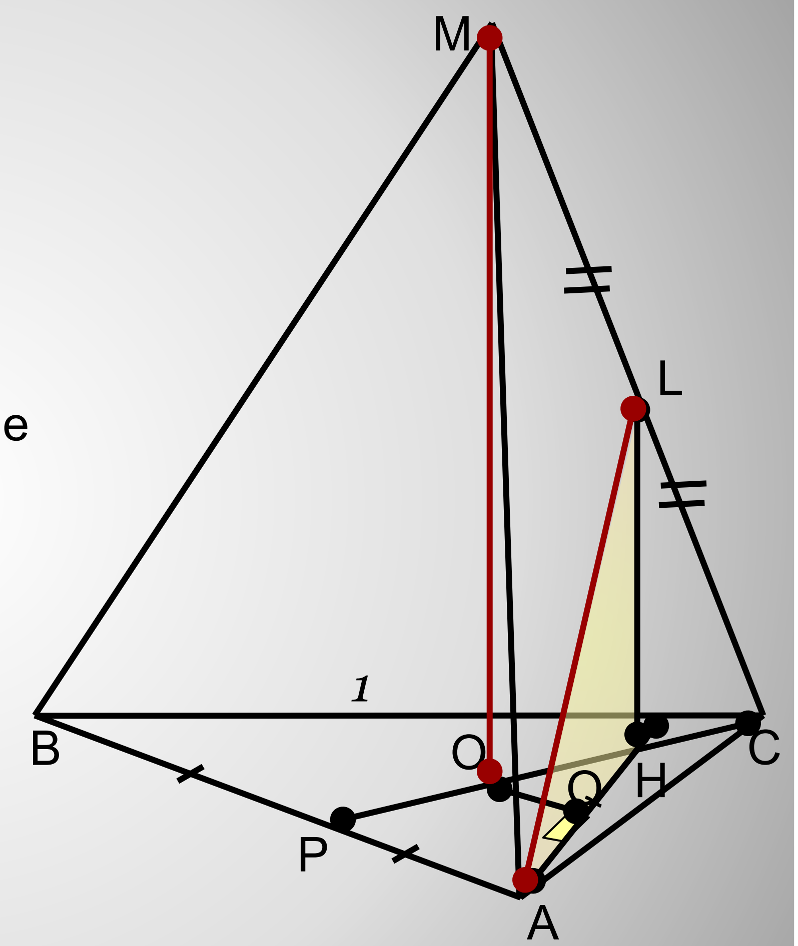
2. CH = HO.

3. Точка O и прямая AH – ортогональные проекции соответственно прямых MO и AL на (ABC).

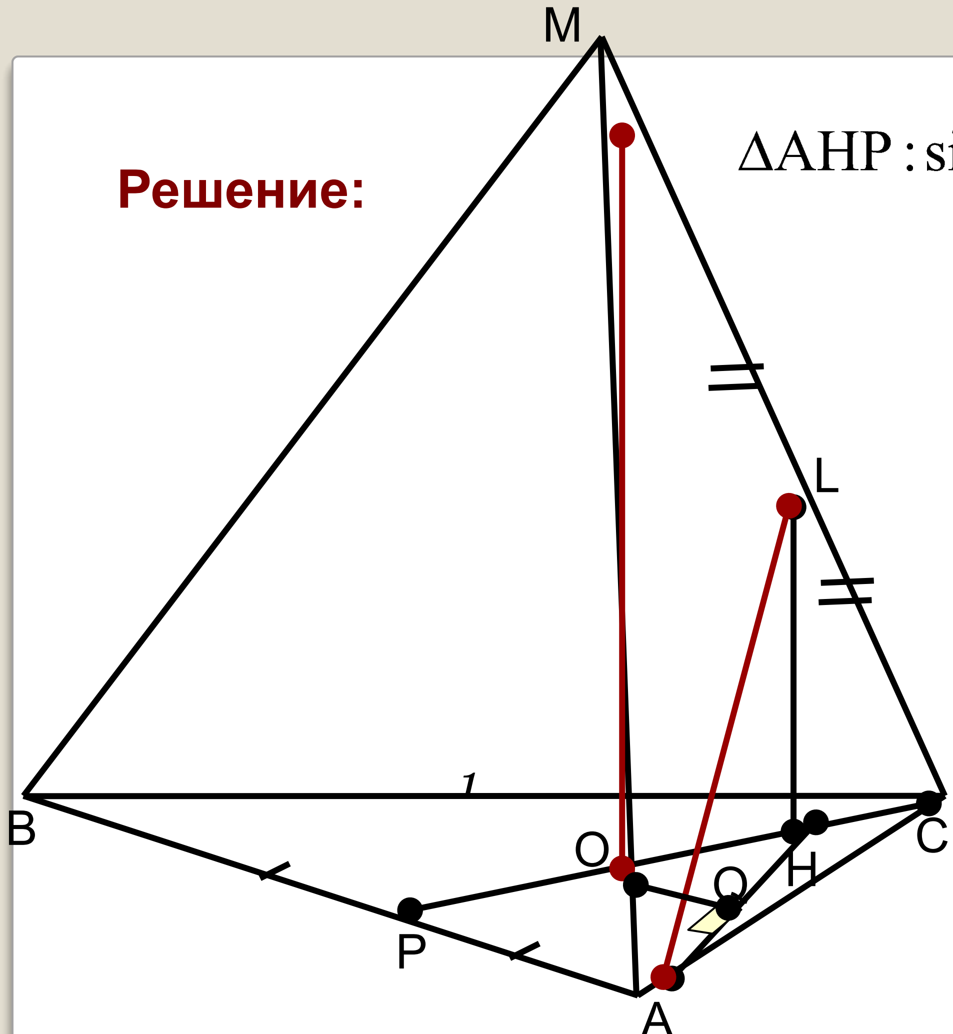
Расстояние между скрещивающимися прямыми MO и AL равно расстоянию от точки O до прямой AH.

4. OQ ⊥ AH. OQ- искомое расстояние.

5. Вычислим OQ.



Решение:



$$\Delta AHP : \sin \angle AHP = \frac{AP}{AH} = \frac{AP}{\sqrt{AP^2 + PH^2}}.$$

$$OH = \frac{1}{3} CP$$

$$PH = \frac{2}{3} CP$$

$$CP = AC \cdot \sin 60^\circ$$

$$OQ = \frac{OH \cdot AP}{\sqrt{AP^2 + PH^2}}$$

$$CP = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$OH = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$PH = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

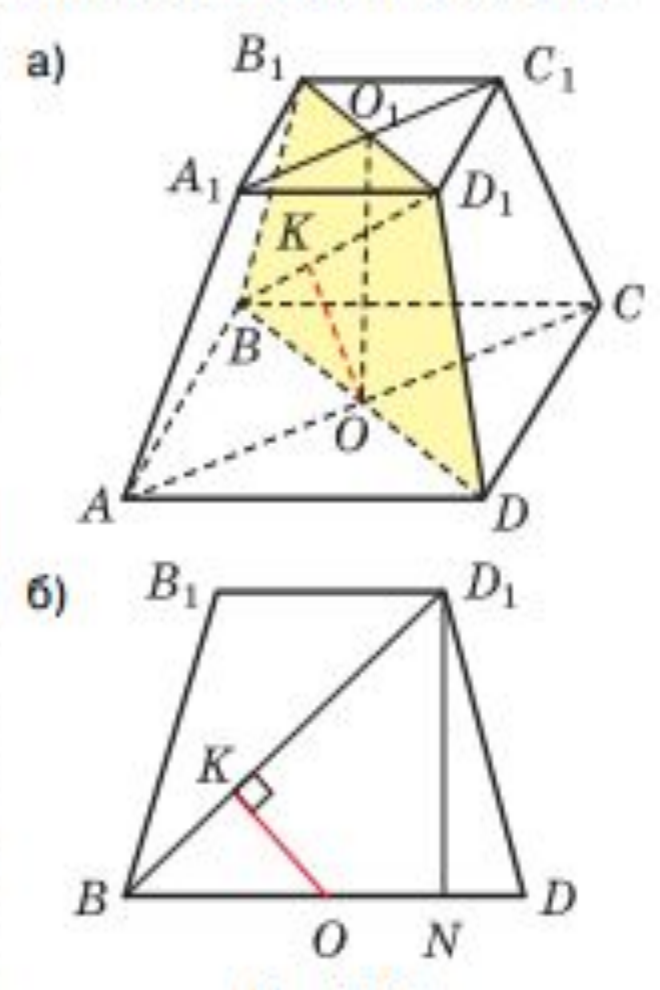
$$\Delta OQH : \sin \angle OHQ = \frac{OQ}{OH} \Rightarrow OQ = OH \cdot \sin \angle OQH$$

$$OQ = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

Задача 5. Условие:

В правильной усеченной четырехугольной пирамиде A…D_1 со сторонами оснований a и b (a>b) и высотой h найти расстояние между диагональю BD_1 и диагональю большего основания AC.



$$D_1N = h,$$

$$BN = BD - ND = a\sqrt{2} - \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2},$$

$$BD_1 = \sqrt{D_1N^2 + BN^2} = \sqrt{h^2 + \frac{(a+b)^2}{2}}.$$

В треугольнике BKO

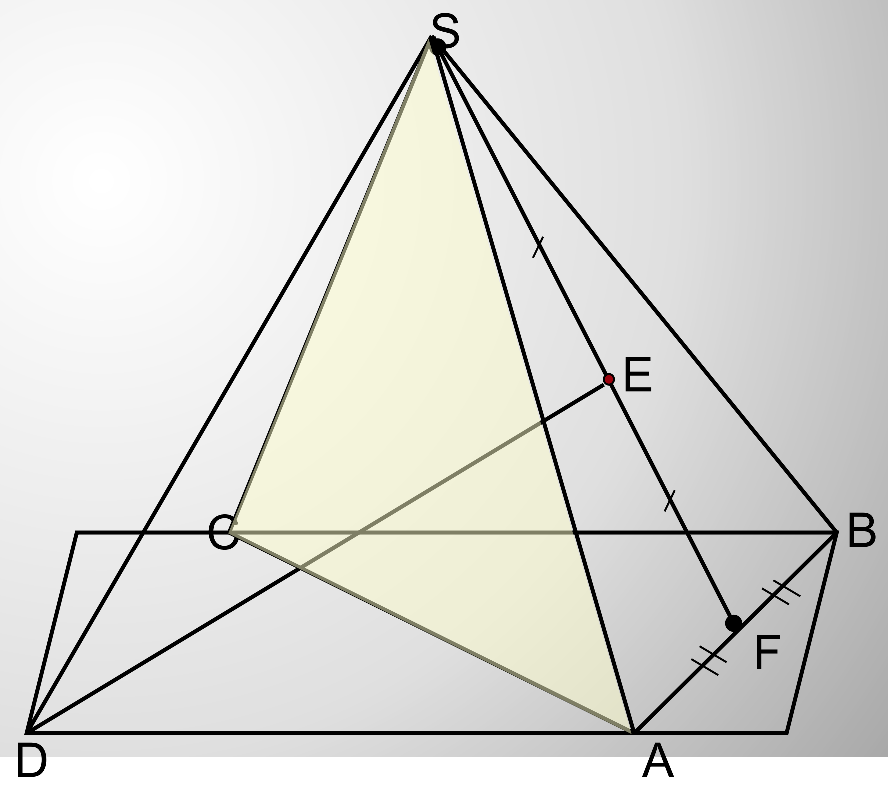
$$BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда $\dfrac{OK}{D_1N} = \dfrac{BO}{BD_1}$ и $OK = \dfrac{ah}{\sqrt{2h^2 + (a+b)^2}}$.

Ответ: $\dfrac{ah}{\sqrt{2h^2 + (a+b)^2}}$.

- В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1. Найдите угол между прямой DE, где E - середина апофемы SF грани ASB, и плоскостью ASC.

Задача 6. Условие:



Введем прямоугольную систему координат.

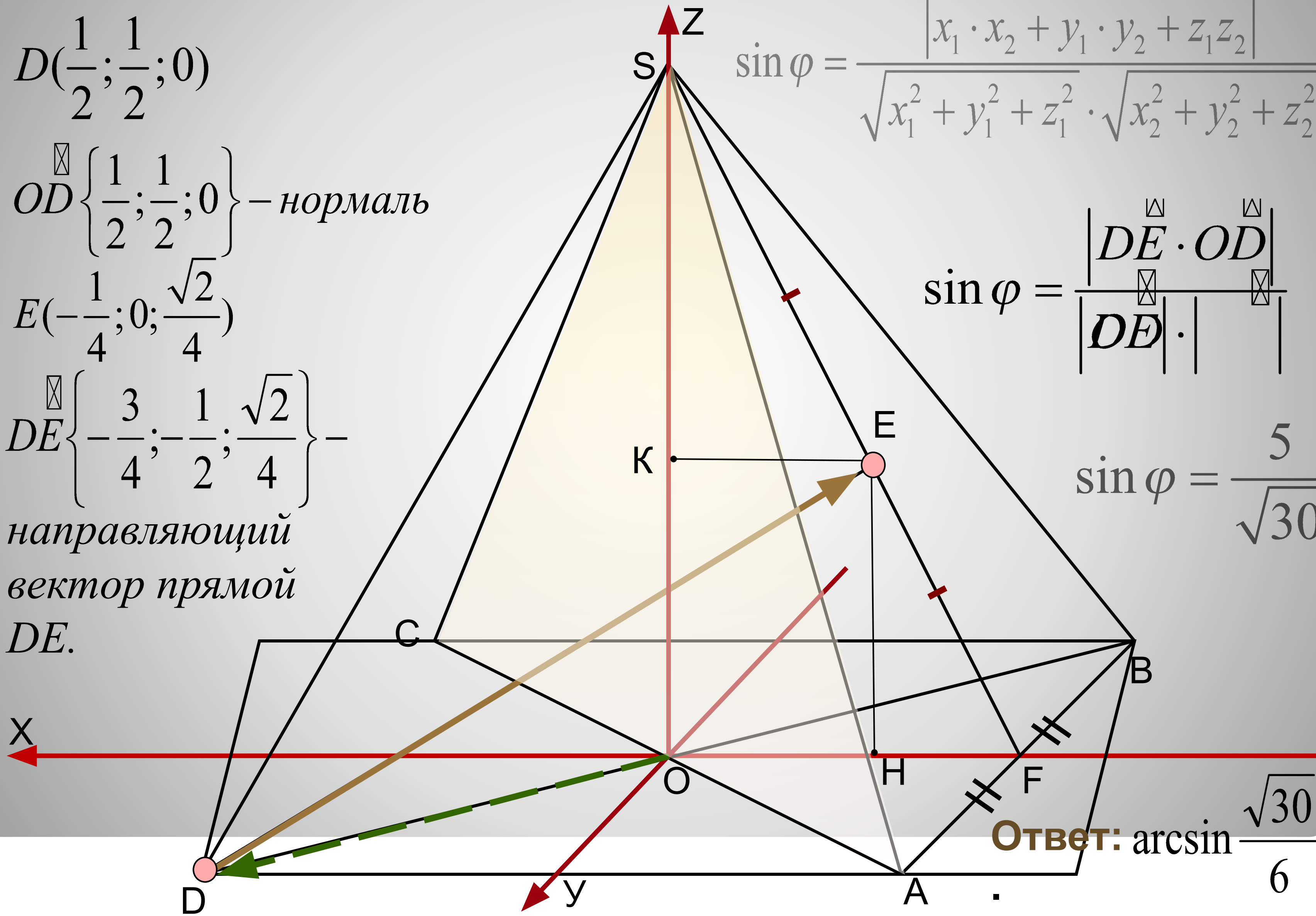
$$D\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$$

$$\vec{OD}\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right\} - \textit{нормаль}$$

$$E\left(-\frac{1}{4};0;\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\vec{DE}\left\{-\frac{3}{4};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\} -$$

направляющий вектор прямой DE.



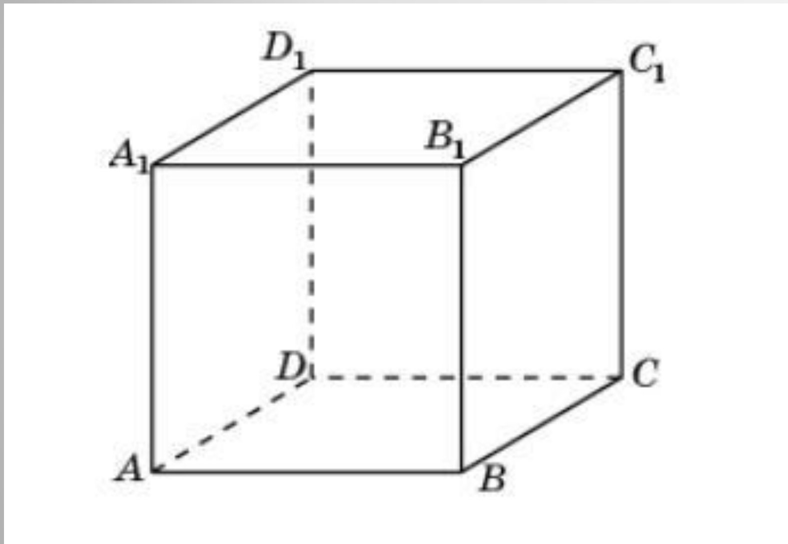
$$\sin\varphi = \frac{|x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{DE}\cdot\vec{OD}|}{|\vec{DE}|\cdot|\vec{OD}|}$$

$$\sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{30}}{6}$

Задача 6. Условие:



- В основании прямой призмы ABCDA1B1C1D1 лежит ABCD со стороной √21 и углом A, равным 60°. На ребрах AB, B1C1 и DC взяты соответственно точки E, F и G так, что AE=EB, B1F=FC1 и DG=3GC. Найти косинус угла между плоскостями EFG, если высота призмы равна 4,5.

1 способ решения:

Решение 1 (угол между прямой и плоскостью)

- $F \perp (ABC)$
  F_1-ортогональная проекция точки F на плоскость и основание $BF_1=F_1C$, $FF_1 \parallel BB_1$
- G_1-точка пересесечения прямых EG и BC. Треугольник EF_1G_1, лежащий в плоскости ABC,- ортогональная проекция треугольника EF_1G_1, лежащего в плоскости EFG
- Из подобия треугольников EBG_1 и GCG_1=> $EB \parallel GC$, $CG_1=BC$, т.к. $GC=¼DC=½EB$
- По теореме косинусов для треугольника

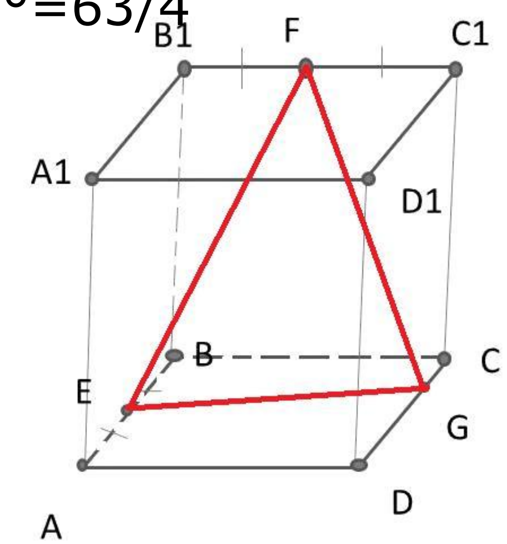
EBF_1: $EF_1\text{^}2=EB\text{^}2+BF\text{^}2-2*EB*BF_1*\cos 120°=63/4$
- $EF=(3\sqrt{7})/2$
- Из прямоугольных треугольников EFF_1

и F_1FG_1: $EF\text{^}2=EF_1\text{^}2+F_1F\text{^}2 =36$

$EF=6$

$FG_1\text{^}2=F1G1\text{^}2+F1F\text{^}2=270/4$

$FG_1=(3\sqrt{30})/2$



- По теореме косинусов для треугольника EBG_1:

EG_1^2=EB^2+BG^2-2*EB*BG_1*cos120°=441/4

EG_1=21/2

- Используя теорему косинусов для треугольника EFG_1:

cos∟EFG_1=(EF^2+FG_1^2-EG_1^2)/(2*EF*FG_1)=-3/(8√30)

sin∟EFG_1=√(1-(-3/(8√30)^2=√637/(8√10)

- Находим площадь треугольника EFG_1

S_{EFG1}=½*EF*FG1*sin∟EFG_1=((9√3)/16)*√637

- Находим площадь треугольника EF_1G_1:

S_{EF1G1}=½*EF_1*F_1G_1*sin150 °=(63√3)/16

- Находим косинус угла Y между плоскостями EFG_1 и ABC по формуле:

cos Y= $S_{EF_1G_1}$/S_{EFG_1}=1/√13

Ответ:1/√13