

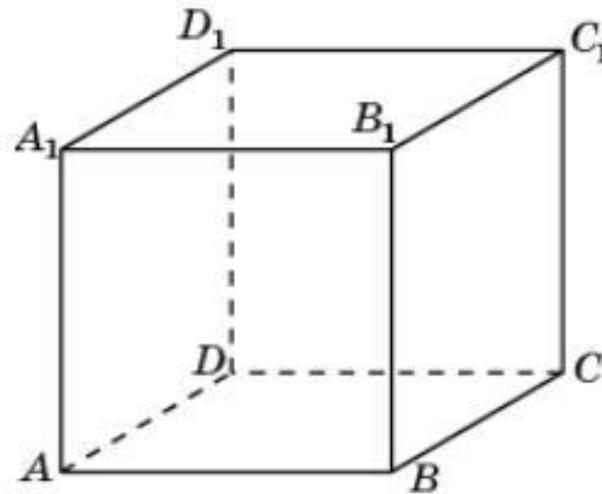
**Решение заданий С2
при подготовке
к ЕГЭ 2014 г.**

Применение ортогонального проектирования

$$S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{проекции}}}{\cos\varphi}$$

Задача 1. Условие:

- Изобразите сечение единичного куба $A...D_1$, проходящее через вершину D_1 и середины ребер AB ; BC . Найти его $S_{\text{сеч.}}$.



Решение:

$$S \text{ проекции} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

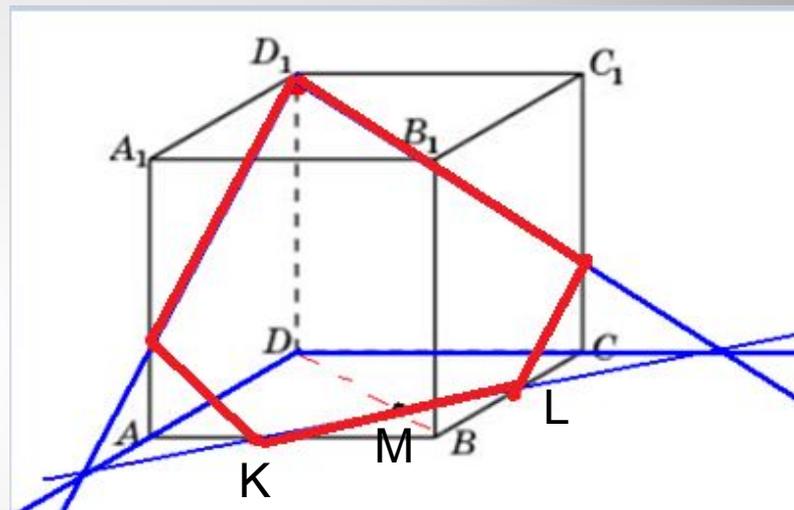
$$DM = \frac{3}{4} DB = \frac{3}{4} \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{16}{18}}} = \sqrt{\frac{9}{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

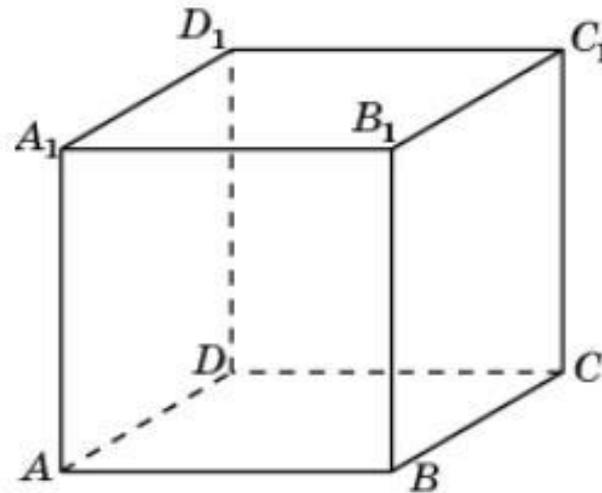
$$S_{\text{сеч}} = \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{\sqrt{17}} = \frac{7\sqrt{17}}{24}$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{17}}{24}$

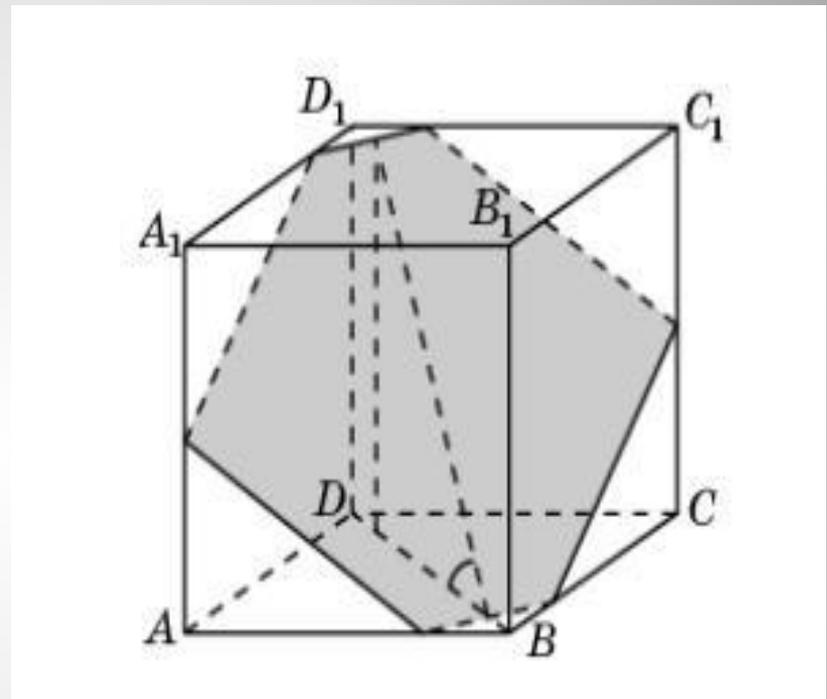


Задача 2. Условие:

- Изобразите сечение единичного куба $A...D_1$, проходящее через середины ребер AA_1 , CC_1 и точку на ребре AB , отстоящую от вершины A на $0,75$. Найдите его площадь.

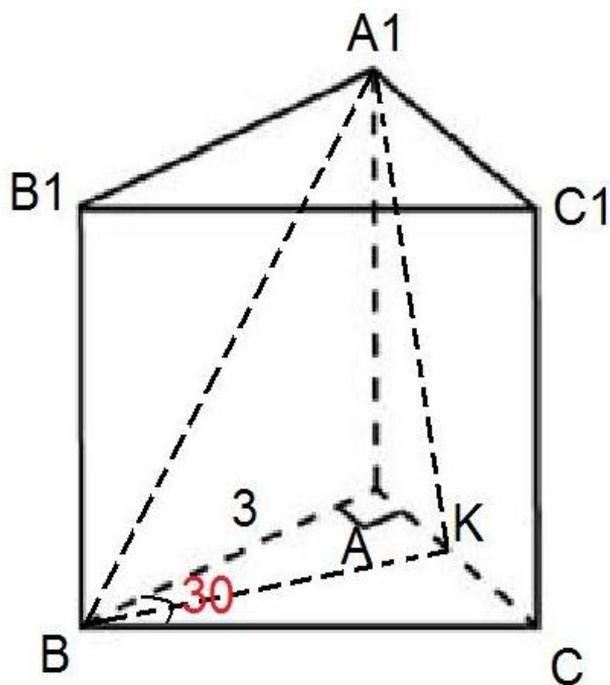


- Искомым сечением будет шестиугольник. Площадь его ортогональной проекции на плоскость ABC равна $\frac{15}{16}$, косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью ABC равен $\frac{3}{\sqrt{17}}$. Площадь сечения равна $\frac{5 \cdot \sqrt{17}}{16}$.



Ответ:
$$S_{\text{сеч}} = \frac{5 \cdot \sqrt{17}}{16}$$

Задача 3. Условие:



- В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ BK -биссектриса основания ABC . Через биссектрису и вершину A_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания 60° . Найти $S_{\text{сеч.}}$, если $AB=3$, $BC=6$, угол $ABC=30^\circ$.

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos \varphi}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

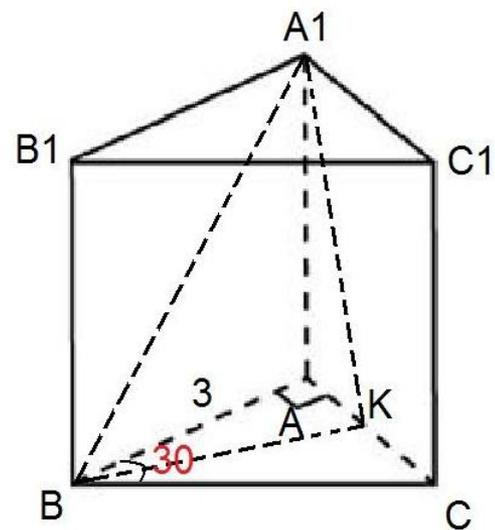
BK – биссектриса, по свойству биссектрис:

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad . AK=t; KC=2t.$$

$$S_{\Delta AKB} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{3}{2} : \frac{1}{2} = 3$$

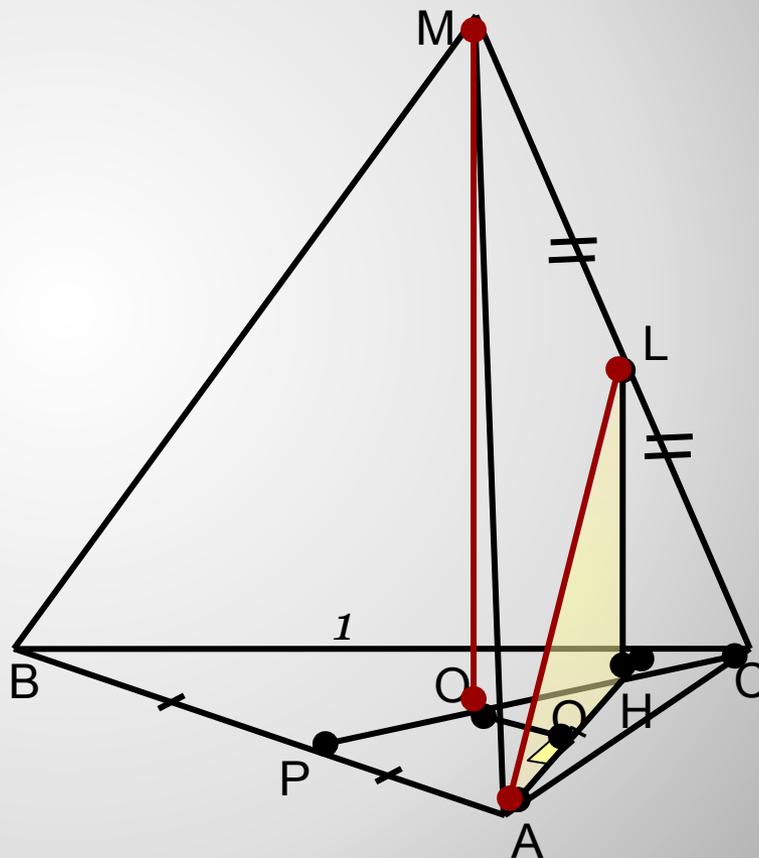
Ответ: 3.



- Если ортогональная проекция на плоскость α переводит прямую a в точку A , а прямую b в прямую b_1 , то расстояние между скрещивающимися прямыми a и b равно расстоянию от A до прямой b_1 .
- Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой.

Задача 4. Условие:

- Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1 . Найдите расстояние между прямыми AL и MO , если L – середина MC , O – центр грани ABC .



Решение:

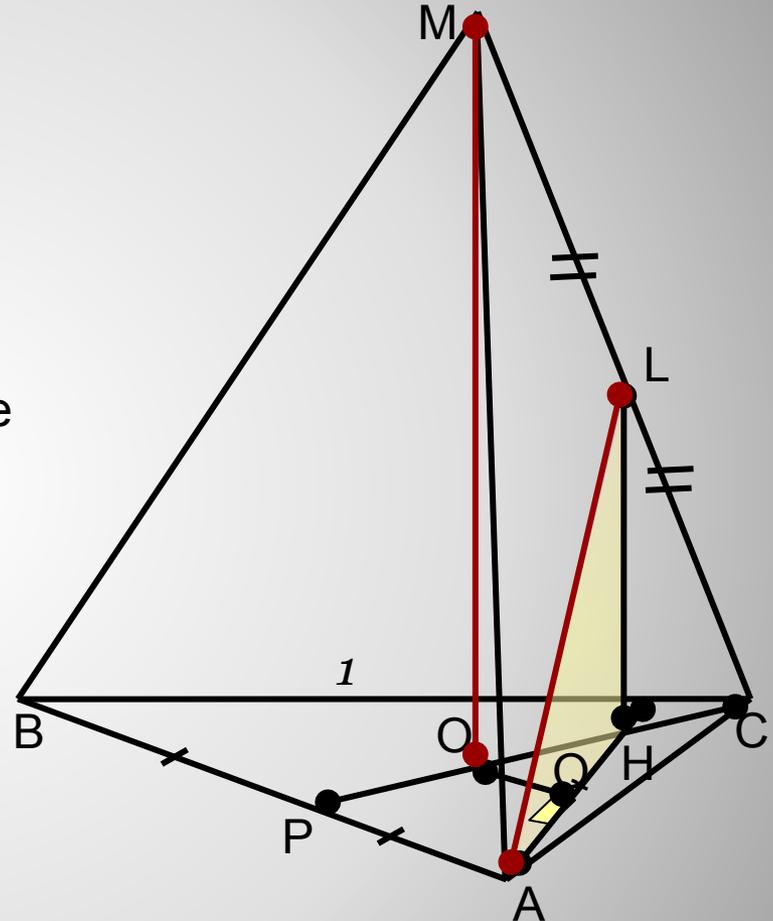
1. $LH \perp (ABC) \in H$
2. $CO = HO$.
3. Точка O и прямая AH – ортогональные проекции соответственно прямых MO и AL на (ABC) .



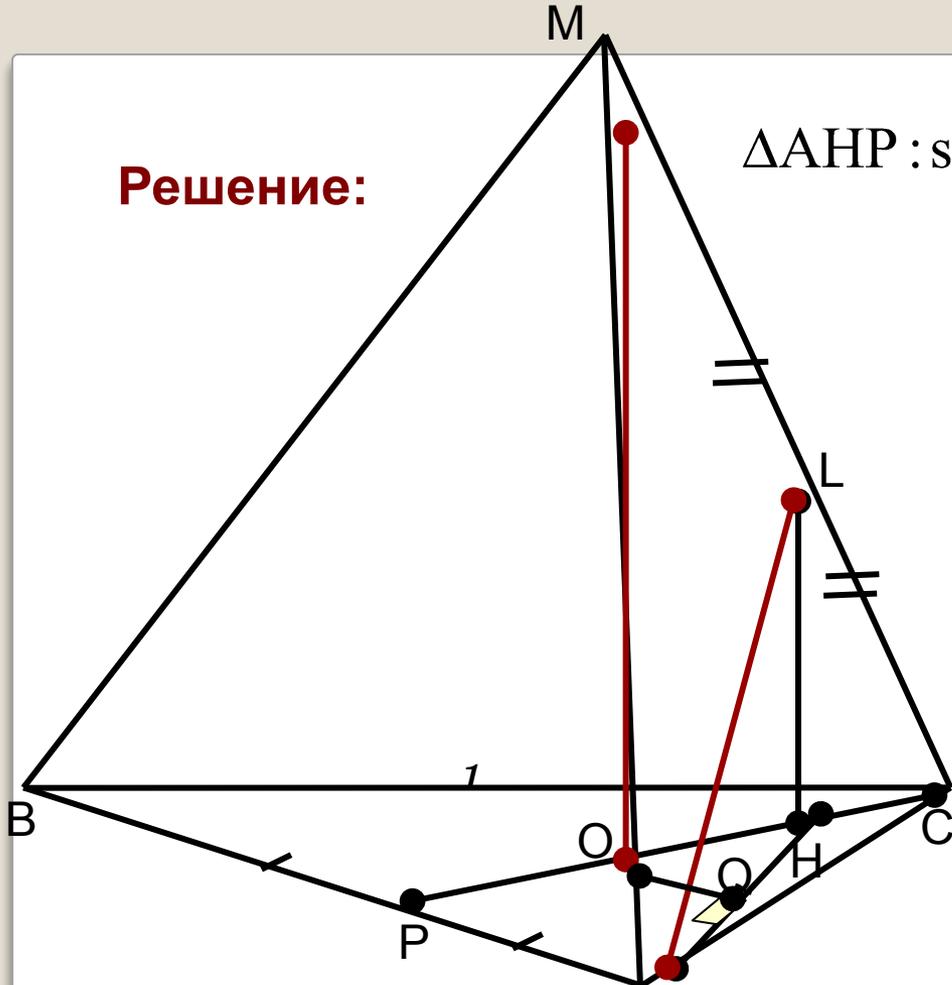
Расстояние между скрещивающимися прямыми MO и AL равно расстоянию от точки O до прямой AH .

4. $OQ \perp AH$ OQ - искомое расстояние.

5. Вычислим OQ .



Решение:



$$\Delta AHP : \sin \angle AHP = \frac{AP}{AH} = \frac{AP}{\sqrt{AP^2 + PH^2}}.$$

$$OH = \frac{1}{3} CP$$

$$PH = \frac{2}{3} CP$$

$$CP = AC \cdot \sin 60^\circ$$

$$OQ = \frac{OH \cdot AP}{\sqrt{AP^2 + PH^2}}$$

$$CP = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$OH = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

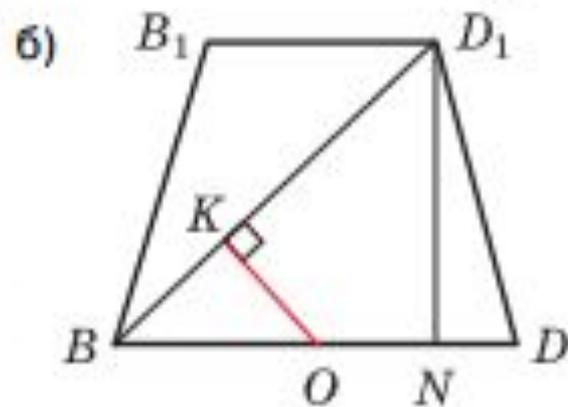
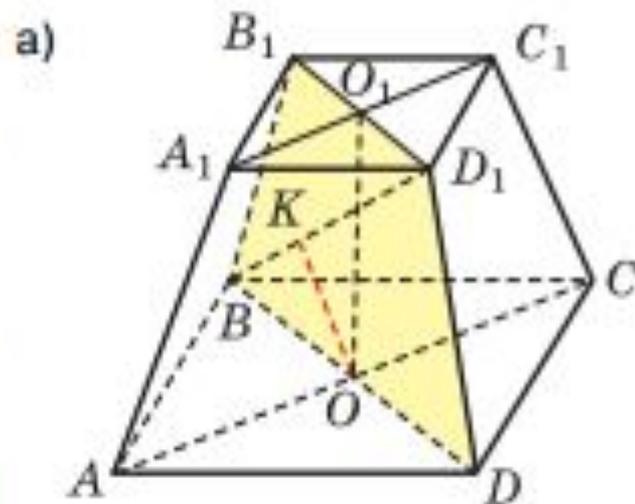
$$PH = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta OQH : \sin \angle OHQ = \frac{OQ}{OH} \Rightarrow OQ = OH \cdot \sin \angle OQH \quad OQ = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

Задача 5. Условие:

В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $A...D_1$ со сторонами оснований a и b ($a > b$) и высотой h найти расстояние между диагональю BD_1 и диагональю большего основания AC .



$$D_1N = h,$$

$$BN = BD - ND = a\sqrt{2} - \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2},$$

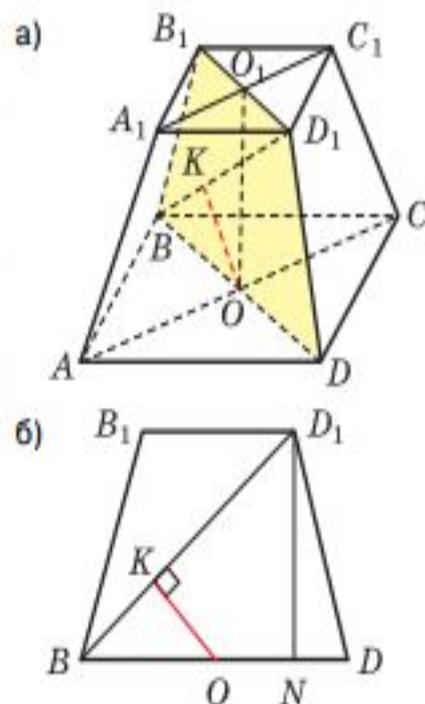
$$BD_1 = \sqrt{D_1N^2 + BN^2} = \sqrt{h^2 + \frac{(a+b)^2}{2}}.$$

В треугольнике BKO

$$BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

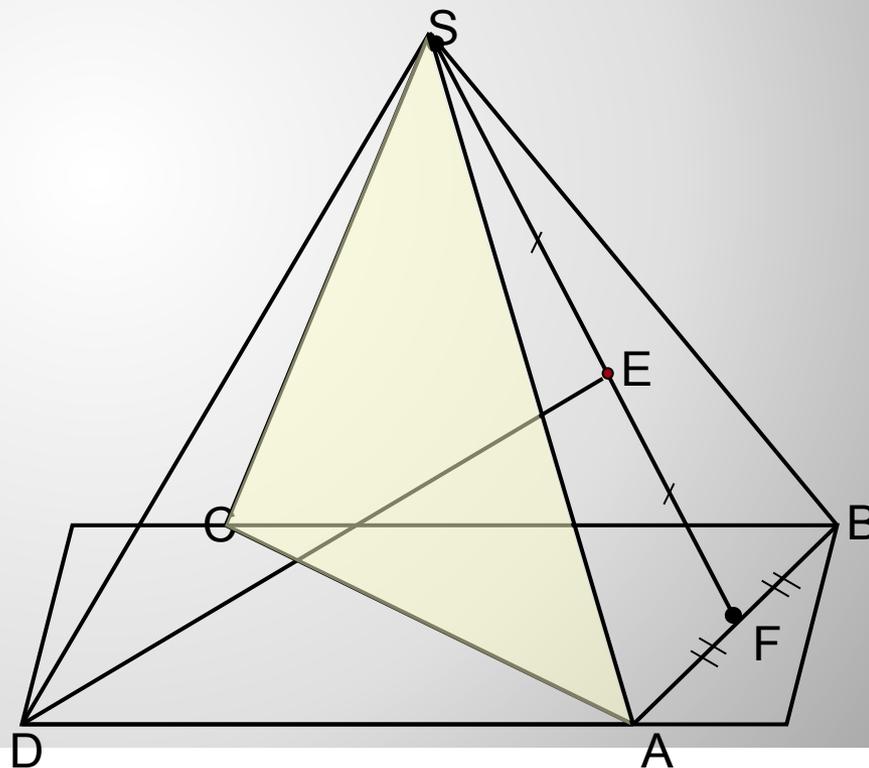
Тогда $\frac{OK}{D_1N} = \frac{BO}{BD_1}$ и $OK = \frac{ah}{\sqrt{2h^2 + (a+b)^2}}.$

Ответ: $\frac{ah}{\sqrt{2h^2 + (a+b)^2}}.$



- В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1. Найдите угол между прямой DE , где E - середина апофемы SF грани ASB , и плоскостью ASC .

Задача 6.
Условие:



Введем прямоугольную систему координат.

$$D\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$$

$$\vec{OD} \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right\} - \text{нормаль}$$

$$E\left(-\frac{1}{4}; 0; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

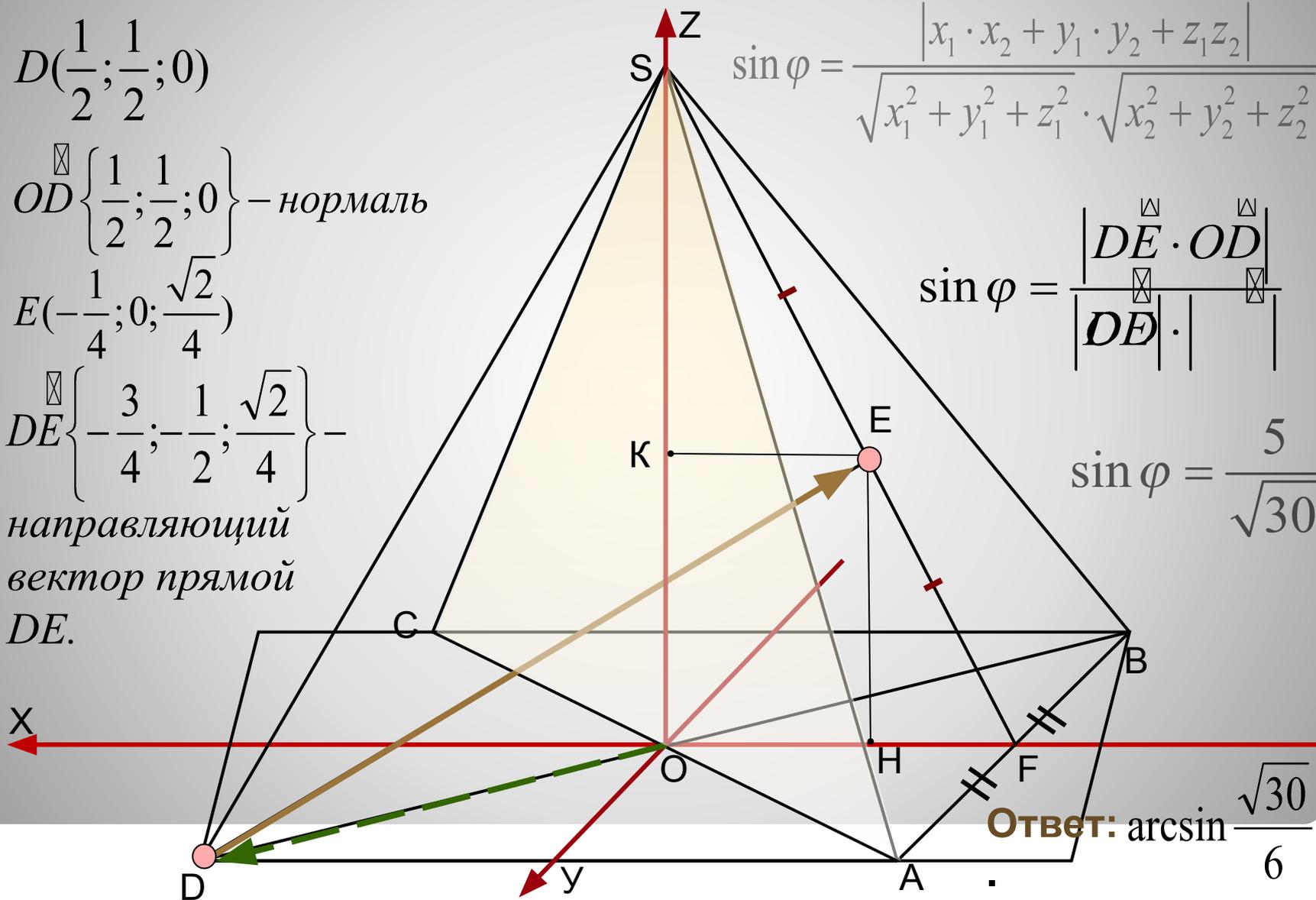
$$\vec{DE} \left\{ -\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\} -$$

направляющий
вектор прямой
 DE .

$$\sin \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

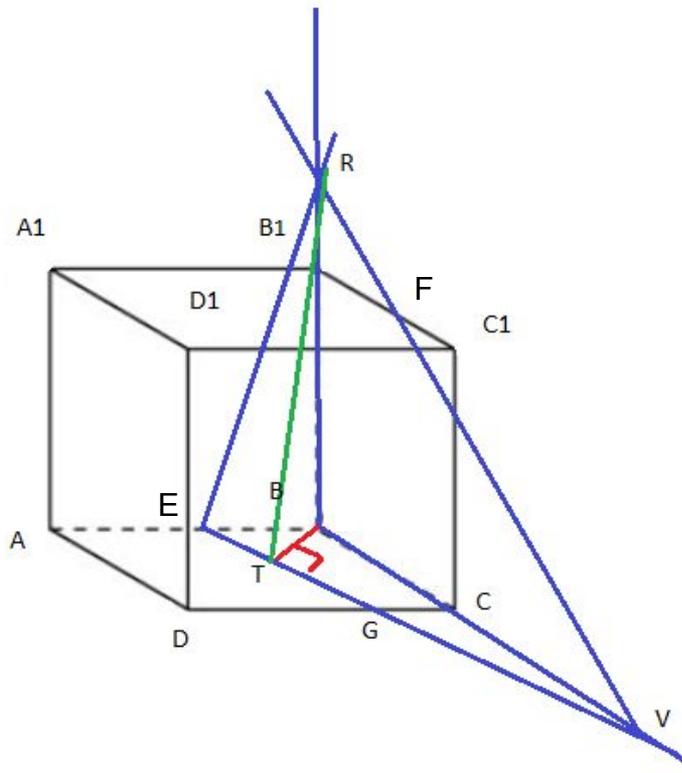
$$\sin \varphi = \frac{|\vec{DE} \cdot \vec{OD}|}{|\vec{DE}| \cdot |\vec{OD}|}$$

$$\sin \varphi = \frac{5}{\sqrt{30}}$$



Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{30}}{6}$

Задача 7. Условие:



В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ лежит $ABCD$ со стороной $\sqrt{21}$ и углом A , равным 60° . На ребрах AB , B_1C_1 и DC взяты соответственно точки E , F и G так, что $AE=EB$, $B_1F=FC_1$ и $DG=3GC$. Найти косинус угла между плоскостями EFG , если высота призмы равна $4,5$.

1 способ решения:

$$\bullet \text{Сечения} = \frac{S \text{ проекции}}{\cos\varphi} \quad \text{Сечения} = \frac{S \text{ проекции}}{\cos\varphi}$$

$$\text{Сечения} = \frac{S \text{ проекции}}{\cos\varphi}$$

$$\text{Сечения} = \frac{S \text{ проекции}}{\cos\varphi}$$

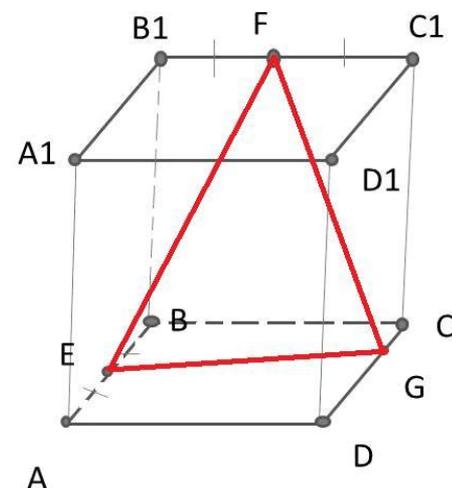
$$\text{Сечения} = \frac{S \text{ проекции}}{\cos\varphi} \quad \text{Сечения} = \frac{S \text{ проекции}}{\cos\varphi}$$

$$\text{Сечения} = \frac{S \text{ проекции}}{\cos\varphi}$$

$$\cos\varphi$$

Решение 2 (угол между прямой и плоскостью)

- $F \perp (ABC)$
 F_1 -ортогональная проекция точки F на плоскость и основание
 $BF_1 = F_1C$, $FF_1 \parallel BB_1$
- G_1 -точка пересечения прямых EG и BC . Треугольник EF_1G_1 , лежащий в плоскости ABC , - ортогональная проекция треугольника EFG , лежащего в плоскости EFG
- Из подобия треугольников EBG_1 и $GCG_1 \Rightarrow EB \parallel GC$, $CG_1 = BC$, т.к. $GC = \frac{1}{4}DC = \frac{1}{2}EB$
- По теореме косинусов для треугольника EBF_1 :
 $EF_1^2 = EB^2 + BF_1^2 - 2 * EB * BF_1 * \cos 120^\circ = 63/4$
- $EF = (3\sqrt{7})/2$
- Из прямоугольных треугольников EFF_1 и F_1FG_1 :
 $EF^2 = EF_1^2 + F_1F^2 = 36$
 $EF = 6$
 $FG_1^2 = F_1G_1^2 + F_1F^2 = 270/4$
 $FG_1 = (3\sqrt{30})/2$



- По теореме косинусов для треугольника EBG_1 :

$$EG_1^2 = EB^2 + BG^2 - 2 * EB * BG * \cos 120^\circ = 441/4$$

$$EG_1 = 21/2$$

- Используя теорему косинусов для треугольника EFG_1 :

$$\cos \angle EFG_1 = (EF^2 + FG_1^2 - EG_1^2) / (2 * EF * FG_1) = -3 / (8\sqrt{30})$$

$$\sin \angle EFG_1 = \sqrt{1 - (-3 / (8\sqrt{30}))^2} = \sqrt{637} / (8\sqrt{10})$$

- Находим площадь треугольника EFG_1

$$S_{EFG_1} = 1/2 * EF * FG_1 * \sin \angle EFG_1 = ((9\sqrt{3})/16) * \sqrt{637}$$

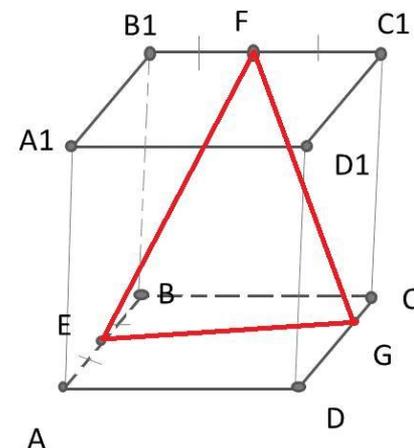
- Находим площадь треугольника EF_1G_1 :

$$S_{EF_1G_1} = 1/2 * EF_1 * F_1G_1 * \sin 150^\circ = (63\sqrt{3})/16$$

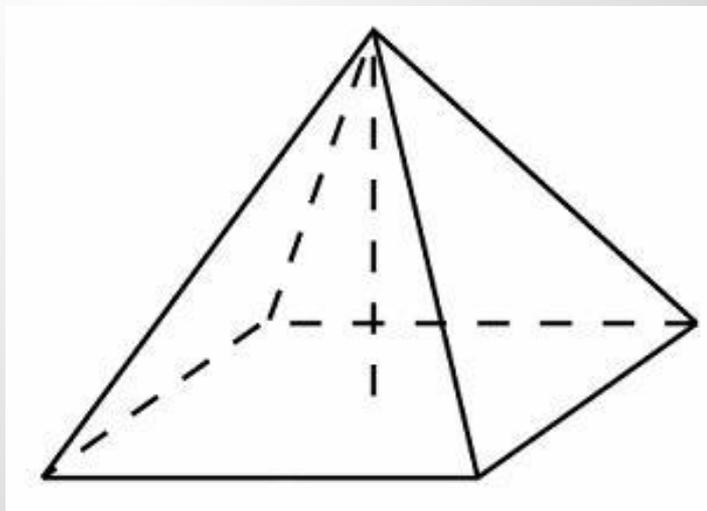
- Находим косинус угла Y между плоскостями EFG_1 и ABC по формуле:

$$\cos Y = S_{EF_1G_1} / S_{EFG_1} = 1/\sqrt{13}$$

Ответ: $1/\sqrt{13}$



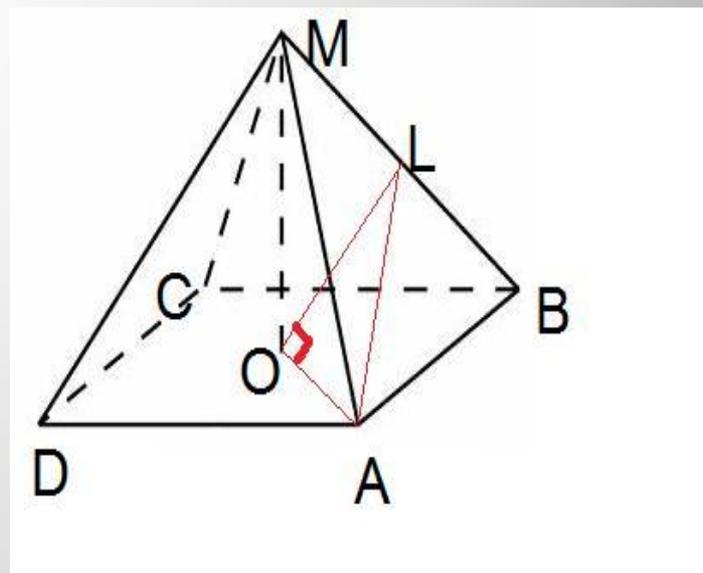
- Дана правильная четырехугольная пирамида $MABCD$, стороны основания которой равны 7. Угол между прямыми DM и AL , L -середина ребра MB , равен 60° . Найдите высоту пирамиды.



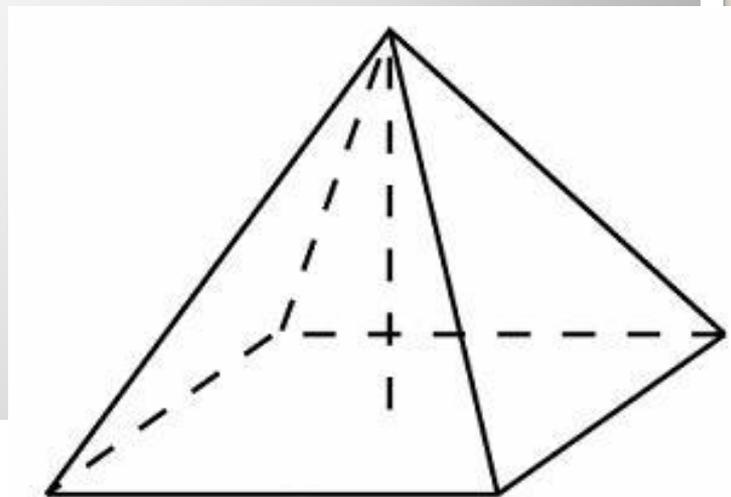
Задача 8

- $AB=BC=CD=AD=7$
- DM и AL скрещивающиеся прямые
- $DM \parallel OL$ в плоскости DMB
- $OL \parallel MD$, так как OL -средняя линия треугольника BMD (по построению)
- $\angle ALO=60^\circ$
- Докажем, что треугольник AOL - прямоугольный
 $(AC \perp BD, AC \perp OM, \text{ тогда } \Rightarrow AC \perp (BMD))$
 $AC \perp$ любой прямой, лежащей в этой плоскости, т.е.
 $AC \perp OL$, треугольник AOL -прямоугольный, $\angle AOL=90^\circ$, $\angle LAD=30^\circ$
- $\operatorname{tg} \angle LAO = OL/OA = \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}/3$
- $OL / ((7 \cdot \sqrt{2})/2) = \sqrt{3}/3$
- $OL = ((7\sqrt{2})/2) \cdot (\sqrt{3}/3) = (7\sqrt{6})/6$
- $DM = 2OL$
- $DM = 2 \cdot ((7\sqrt{6})/6) = (7\sqrt{6})/3$
- Треугольник OMD : $OM = \sqrt{(DM^2 - OD^2)} = (7\sqrt{6})/6$

Ответ: $(7\sqrt{6})/6$

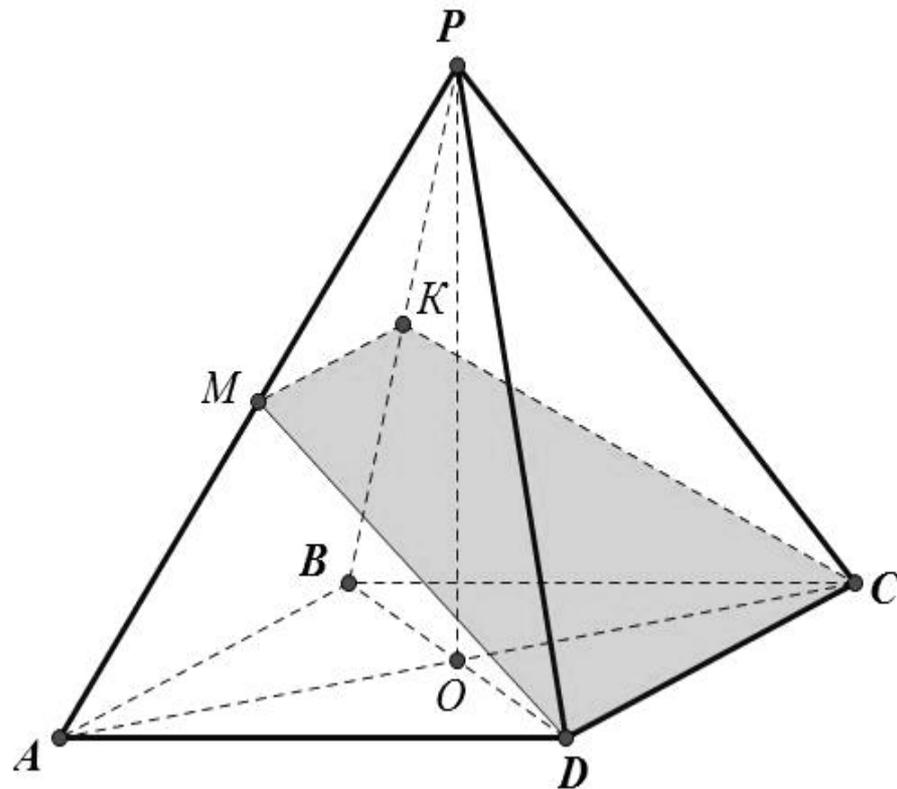


- В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ с основанием $ABCD$ точка M - середина ребра PA , точка K - середина ребра PB .
Найдите расстояние от вершины A до плоскости CMK , если $PC = 6$, $AB = 4$.

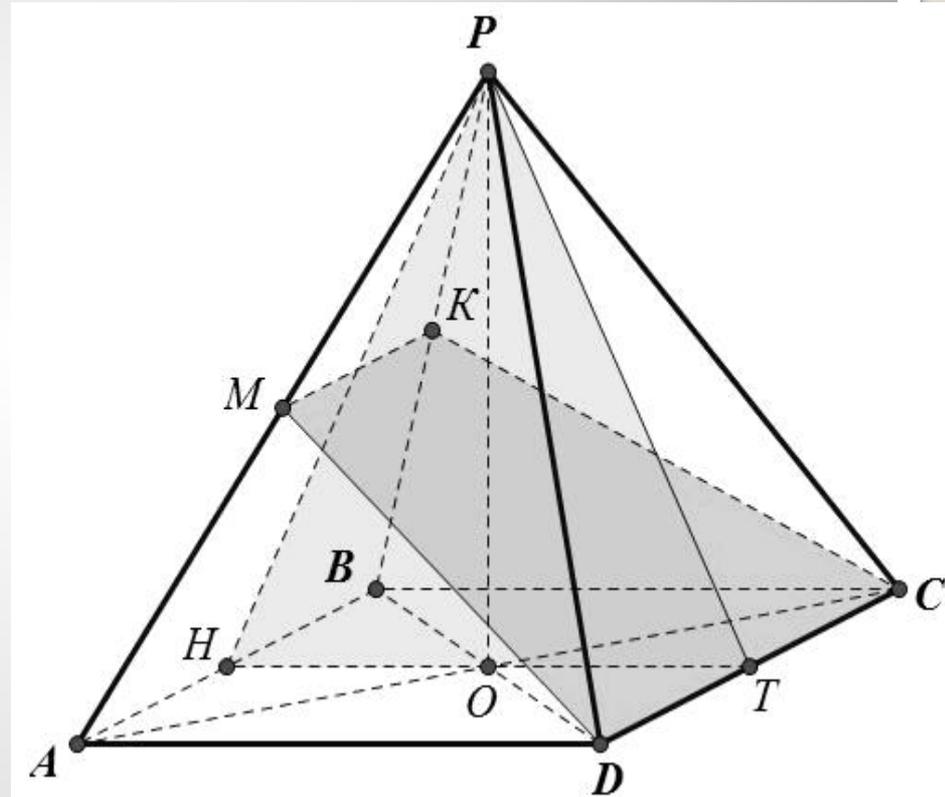


Задача 9

- МК - средняя линия треугольника APB
- $МК \parallel AB \Rightarrow AB$ плоскости \parallel сечения (по признаку параллельности прямой и плоскости)
- Расстояние L от точки A до сечения равно расстоянию от прямой AB до сечения, L равно расстоянию от любой точки прямой AB до сечения.

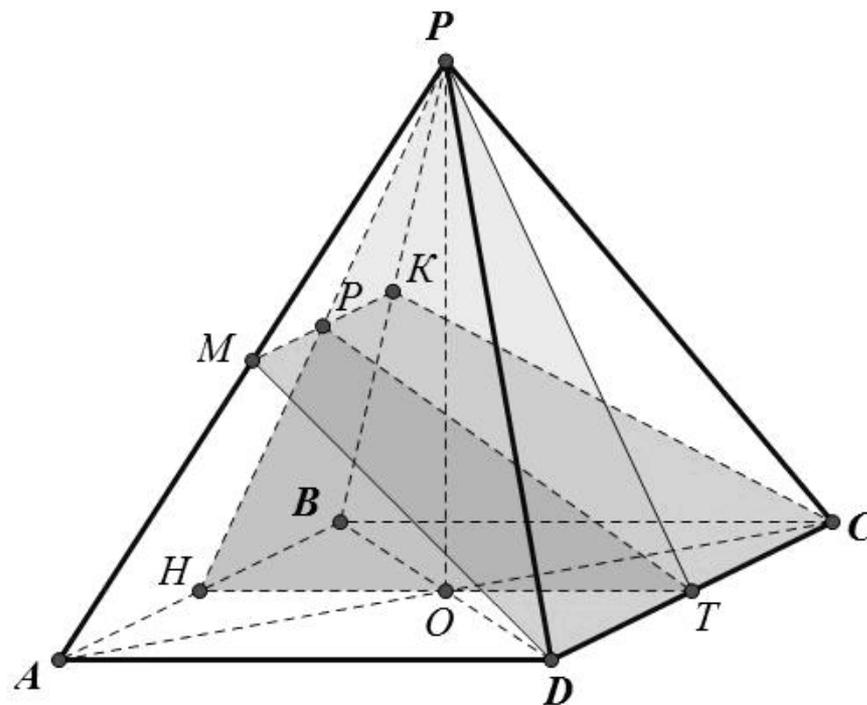


- $AN = NB$
- $DMKC$ симметрична относительно HPT
- $DT = TC$
- Плоскость симметрии перпендикулярна плоскости сечения.
- Плоскость сечения проходит через прямую DC , которая перпендикулярна плоскости симметрии HPT
- Плоскость симметрии перпендикулярна сечению и они пересекаются по прямой PT .

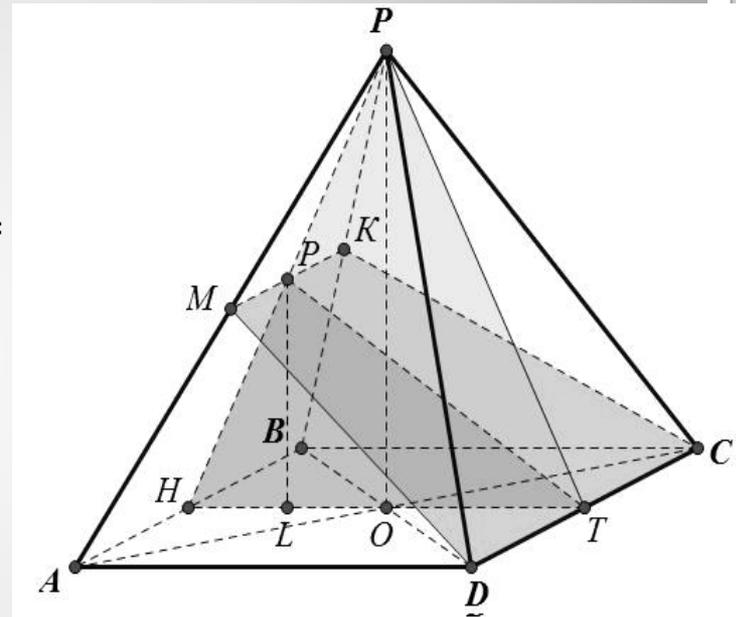


- По свойству перпендикулярных плоскостей перпендикуляр, опущенный из т. Н на сечение, попадает точно на прямую PT , то есть найти нам надо длину именно этого перпендикуляра. Найдем высоту треугольника HPT , проведённой к стороне PT .
- X - искомое расстояние. Найдем через S :

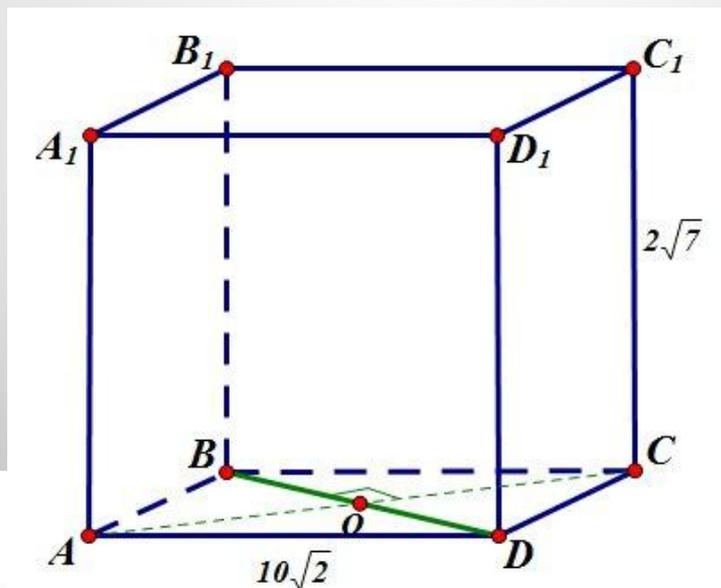
$$S = \frac{1}{2} \cdot HT \cdot PL \cdot x$$



- x - искомое расстояние.
Найдем через S : $S = (1/2) \cdot HT \cdot PL \cdot x$
 - 1) $PL = 0,5 \cdot PO$, т.к. PL - ср. линия
треугольника HPO . Найдём высоту пирамиды.
В прямоугольном треугольнике POC : $PC = 6$ и
 $OC = 0,5 \cdot AC = 0,5 \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
По теореме Пифагора находим
 $PO = \sqrt{36 - 8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. Значит, $PL = \sqrt{7}$.
 - 2) $HT = BC = AB = 4$. $HL = 0,5 \cdot HO = 0,5 \cdot 2 = 1$,
 $LT = HT - HL = 4 - 1 = 3$.
 - 3) PT найдём по теореме Пифагора из
треугольника PLT : $PT = \sqrt{9 + 7} = 4$.
 - Теперь можно искать высоту x ,
проведённую к стороне PT треугольника PTL :
 $HT \cdot PL = PT \cdot x$
 $4 \cdot \sqrt{7} = 4 \cdot x$
 $x = \sqrt{7}$
- Ответ: $\sqrt{7}$**



- Сначала нам нужно построить это сечение.
Очевидно, что отрезок принадлежит плоскости сечения и плоскости основания, то есть принадлежит линии пересечения плоскостей.
- Угол между двумя плоскостями – это угол между двумя перпендикулярами, которые проведены к линии пересечения плоскостей и лежат в этих плоскостях.
- $BD \perp AC$. Пусть точка O – точка пересечения диагоналей основания. BO – перпендикуляр к линии пересечения плоскостей, который лежит в плоскости основания:



- Определим положение перпендикуляра, который лежит в плоскости сечения. (Помним, что если прямая перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной. Ищем наклонную по ее проекции (OC) и углу между проекцией и наклонной). Найдем тангенс угла $\cos C_1$ между OC_1 и OC :

$$\operatorname{tg} \cos C_1 = \frac{C_1 C}{OC}$$

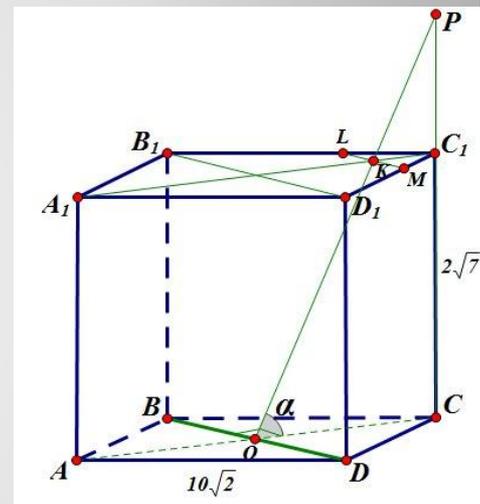
$$OC = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{(10\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2}}{2} = 10$$

$$\operatorname{tg} \cos C_1 = \frac{2\sqrt{7}}{10} = \frac{\sqrt{7}}{5} < \frac{\sqrt{7}}{3} \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{3}$$

между плоскостью сечения и плоскостью основания больше, чем между OC_1 и OC . То есть сечение расположено как-то так:

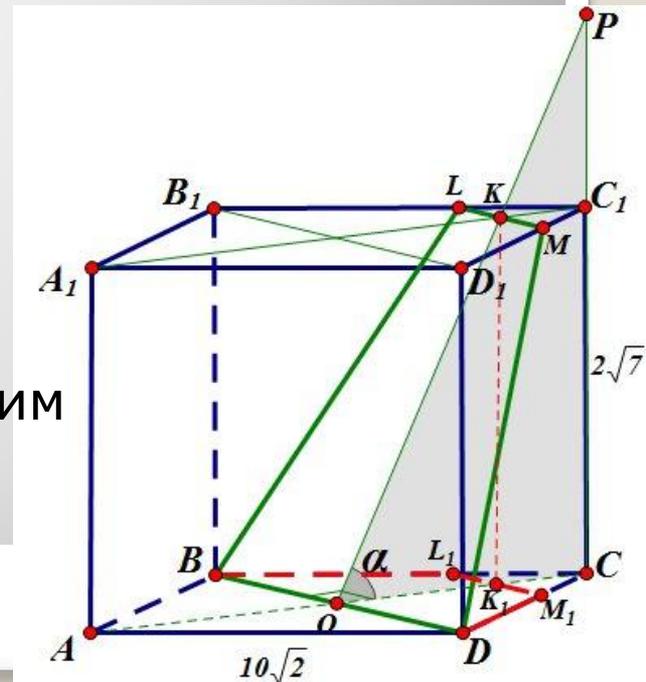
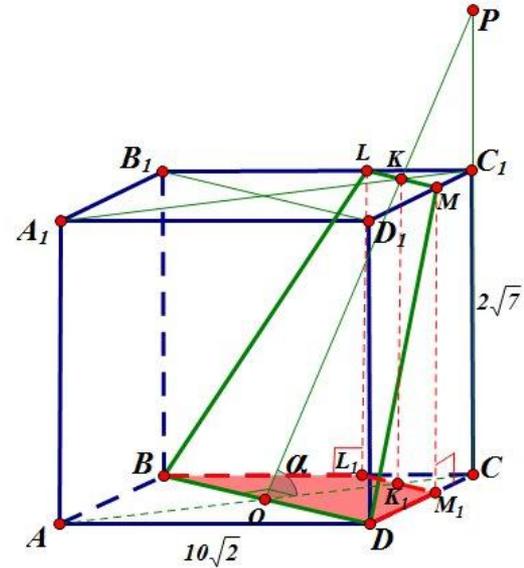
$$CP = OC \operatorname{tg} \alpha = \frac{10 \times \sqrt{7}}{3} = \frac{10}{3} \sqrt{7}$$

К- точка пересечение OP и A_1C_1 . $LM \parallel B_1D_1$.



- Найдем проекцию сечения $BLMD$ на плоскость основания. Для этого найдем проекции точек L и M .
- Четырехугольник BL_1M_1D – проекция сечения $BLMD$ на плоскость основания.
- Найдем площадь четырехугольника BL_1M_1D . Для этого из площади треугольника B_1CD вычтем площадь треугольника L_1CM_1 .
- Найдем площадь треугольника L_1CM_1 . Треугольник L_1CM_1 подобен треугольнику B_1CD . Найдем коэффициент подобия. Для этого рассмотрим треугольники OPC и OKK_1 :

$$\frac{OK_1}{OC} = \frac{KK_1}{PC} = \frac{OC_1}{PC} = \frac{2\sqrt{7}}{10\sqrt{7}} = \frac{2}{5} \quad \frac{K_1C}{OC} = \frac{2}{5}$$



- $S_{L_1M_1D}$ равен $\frac{4}{25} S_{BCD}$ (отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия).

Тогда площадь четырехугольника BL_1M_1D равна площади треугольника $B_1C_1D_1$ и равна:

$$1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

$$S_{BL_1M_1D} = \frac{21}{25} \times \frac{10\sqrt{2} \times 10\sqrt{2}}{2} = 84$$

Найдем $\cos \alpha$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}} = \frac{3}{4}$$

$$S_{BLMD} = S_{BL_1M_1D} : \cos \alpha = 84 : \frac{3}{4} = 112$$

Ответ: 112

