

Задания С2 на ЕГЭ. Координатный метод.

РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

- РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ
- РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО
ПЛОСКОСТИ
- РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ
ПЛОСКОСТЯМИ
- РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ
СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Координаты многогранников

ВВЕДЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ
СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В
ПРОСТРАНСТВЕ;
НАХОЖДЕНИЕ КООРДИНАТ
ВЕРШИН МНОГОГРАННИКОВ.

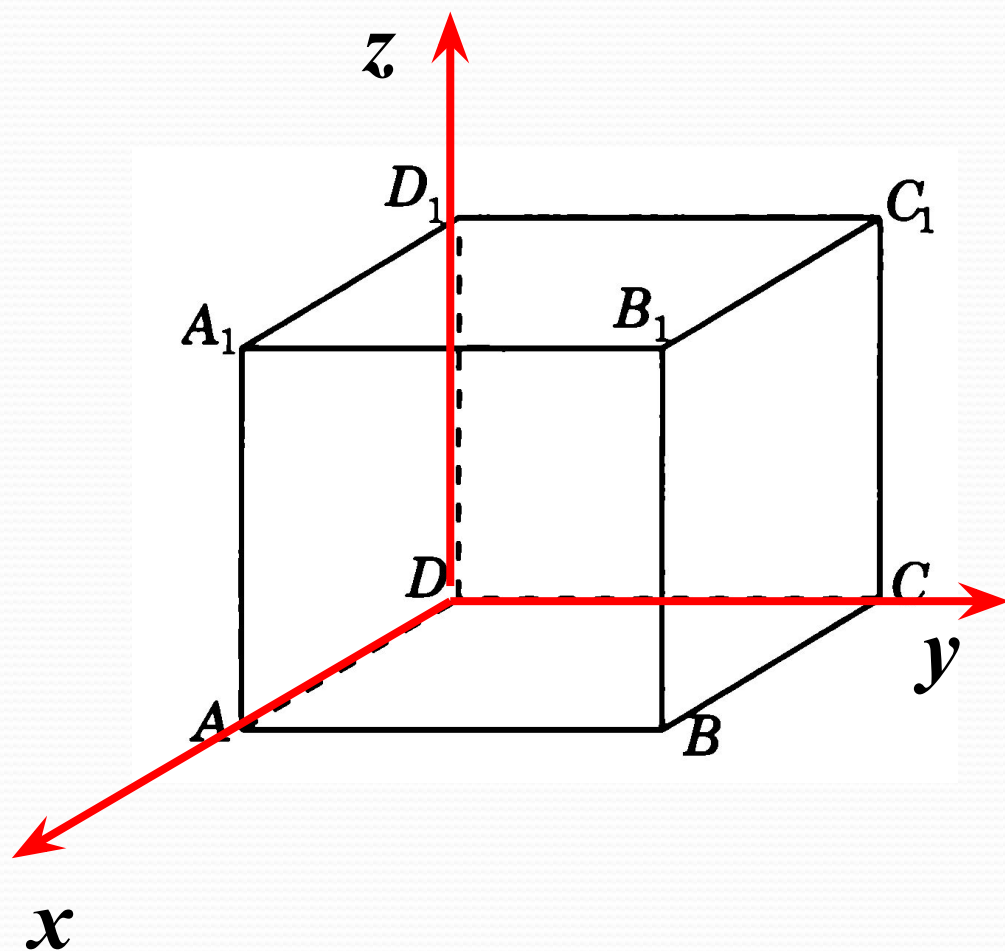
Едини́чный куб.

$D (0; 0; 0)$ $D_1 (0; 0; 1)$

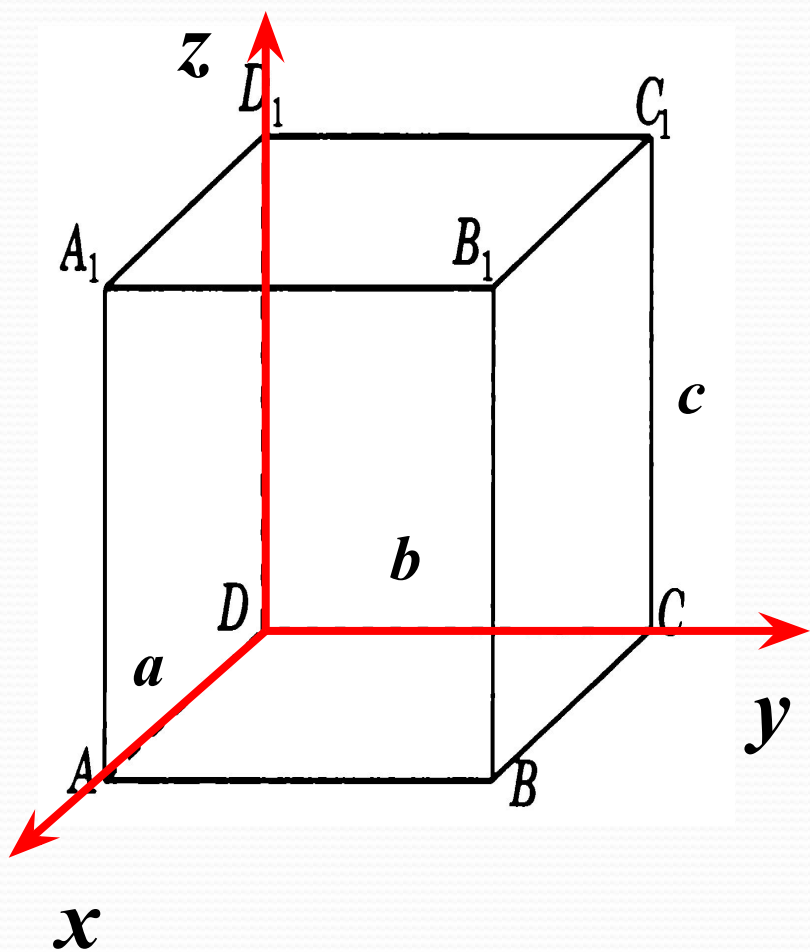
$A (1; 0; 0)$ $A_1 (1; 0; 1)$

$C (0; 1; 0)$ $C_1 (0; 1; 1)$

$B (1; 1; 0)$ $B_1 (1; 1; 1)$



Прямоугольный параллелепипед.



$D (0; 0; 0)$

$D_1 (0; 0; c)$

$A (a; 0; 0)$

$A_1 (a; 0; c)$

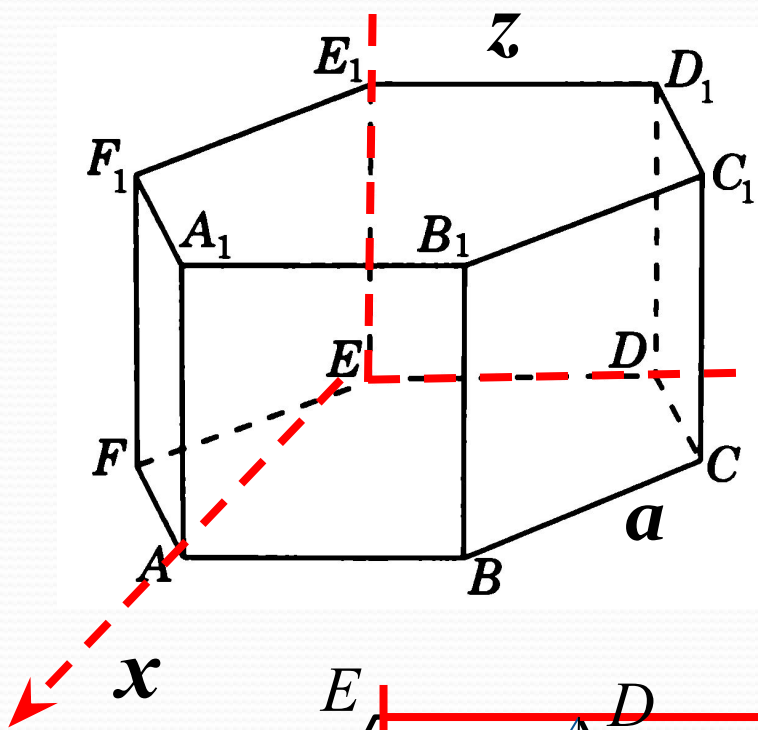
$C (0; b; 0)$

$C_1 (0; b; c)$

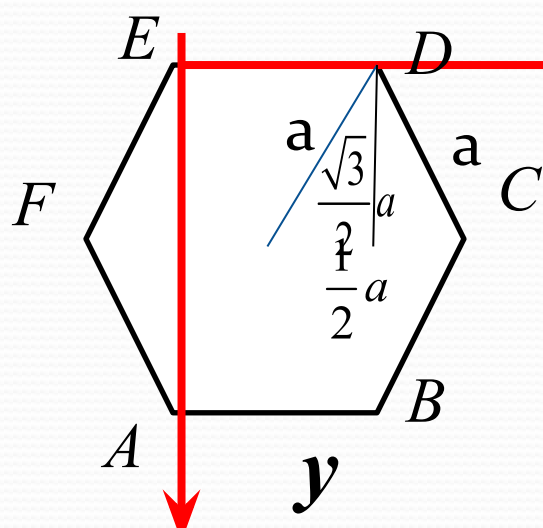
$B (a; b; 0)$

$B_1 (a; b; c)$

Правильная шестиугольная призма.

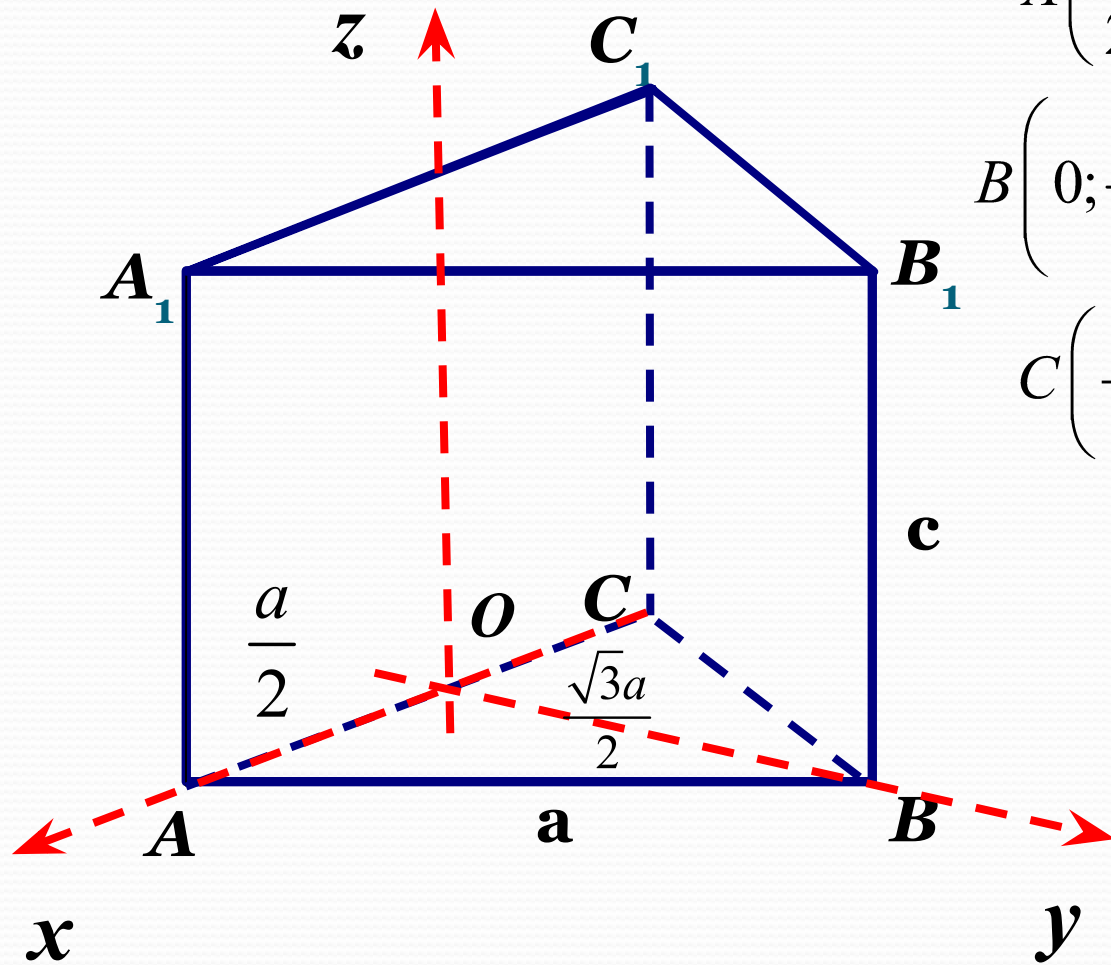


$$\begin{array}{ll}
 C(a; 0; 0) & C_1(a; 0; c) \\
 F(-a; 0; 0) & F_1(-a; 0; c) \\
 D\left(\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) & D_1\left(\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; c\right) \\
 E\left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) & E_1\left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; c\right)
 \end{array}$$



$$\begin{array}{ll}
 A\left(-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) & A_1\left(-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; c\right) \\
 B\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) & B_1\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; c\right)
 \end{array}$$

Правильная треугольная призма.



$$A\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$$

$$A_1\left(\frac{a}{2}; 0; c\right)$$

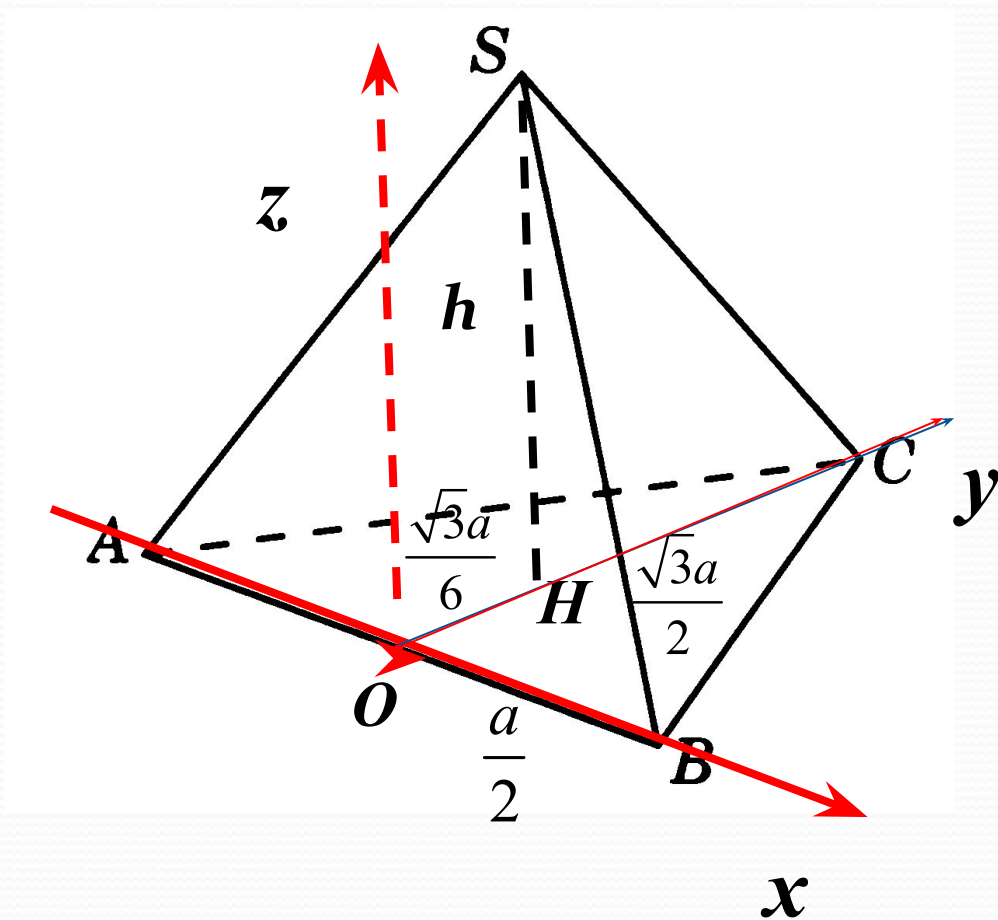
$$B\left(0; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right)$$

$$B_1\left(0; \frac{\sqrt{3}a}{2}; c\right)$$

$$C\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$$

$$C_1\left(-\frac{a}{2}; 0; c\right)$$

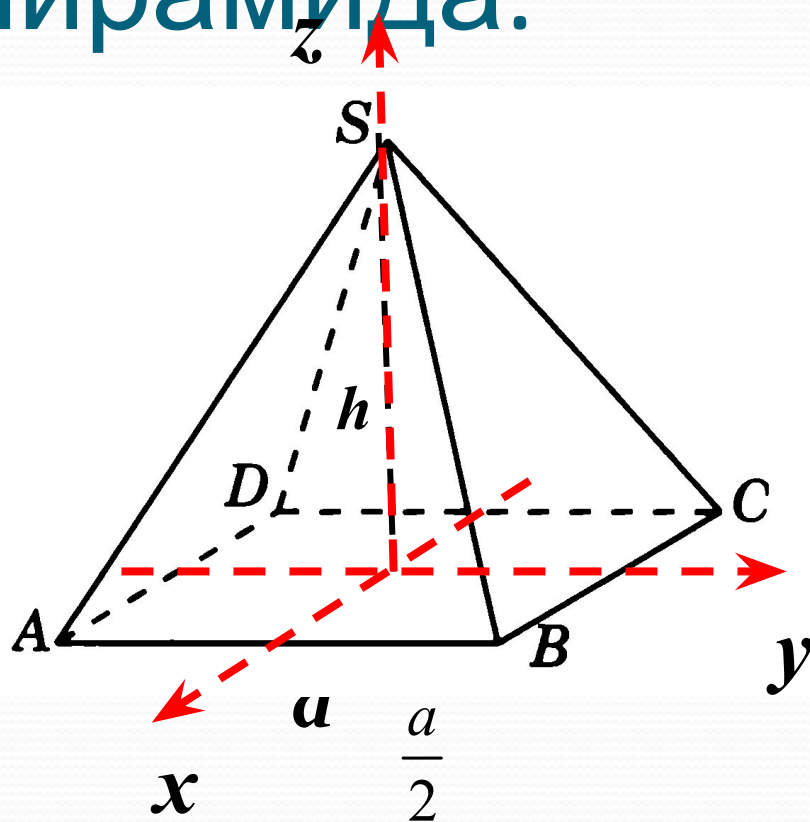
Правильная треугольная пирамида.



$$B\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right) \quad C\left(0; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right)$$

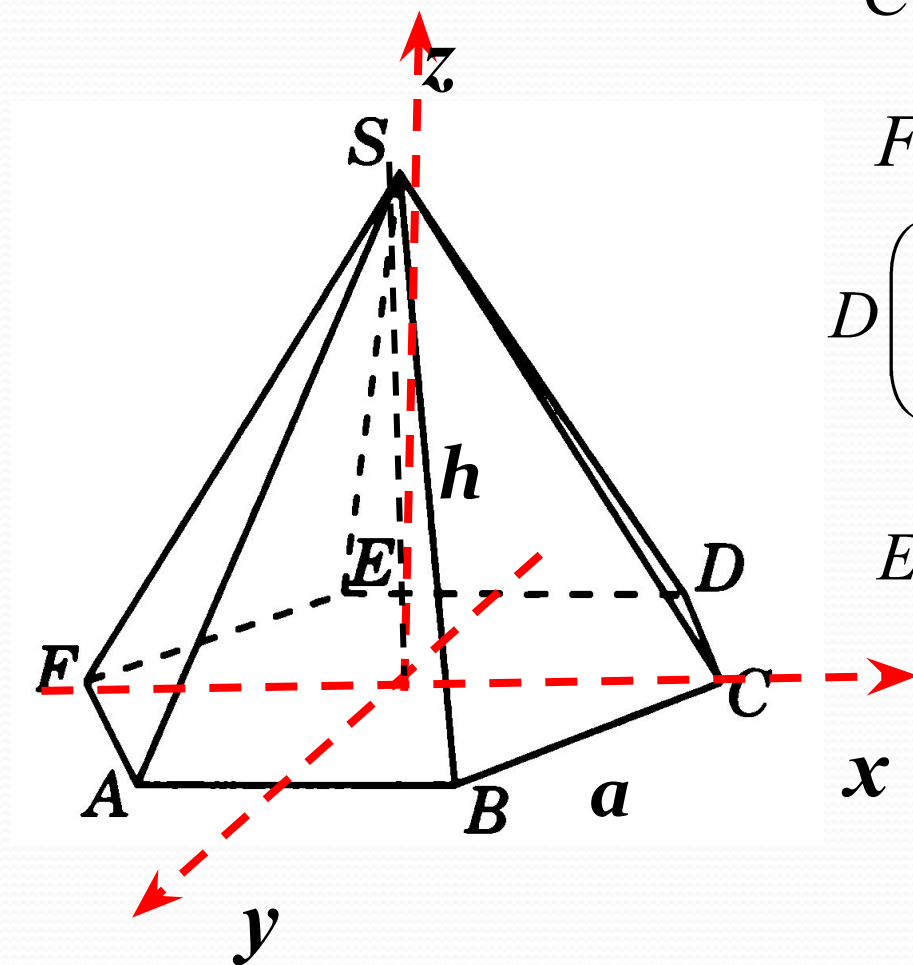
$$A\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right) \quad S\left(0; \frac{\sqrt{3}a}{6}; h\right)$$

Правильная четырехугольная пирамида.



$$\begin{array}{ll}
 B\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right) & A\left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right) \\
 C\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right) & S(0; 0; h) \\
 D\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right) &
 \end{array}$$

Правильная шестиугольная пирамида.



$$C(a; 0; 0) \quad A\left(-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right)$$

$$F(-a; 0; 0)$$

$$D\left(\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) \quad B\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right)$$

$$E\left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) \quad S(0; 0; h)$$

Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$
до плоскости $ax + by + cz + d = 0$.

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Например:

$$M(-3; 1; 2)$$

$$3x + 4y - 12z + 2 = 0$$

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 - 12 \cdot 2 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2}} = \frac{27}{13}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

$$M(x_m; y_m; z_m)$$

$$N(x_n; y_n; z_n)$$

$$P(x_p; y_p; z_p)$$

Уравнение плоскости имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0$$

Числа ***a, b, c*** находим из системы уравнений

$$\begin{cases} ax_m + by_m + cz_m + d = 0 \\ ax_n + by_n + cz_n + d = 0 \\ ax_p + by_p + cz_p + d = 0 \end{cases}$$

Например: Написать уравнение плоскости,
проходящей через точки $M(0;1;0)$ $N(1;0;0)$ $P(1;1;1)$

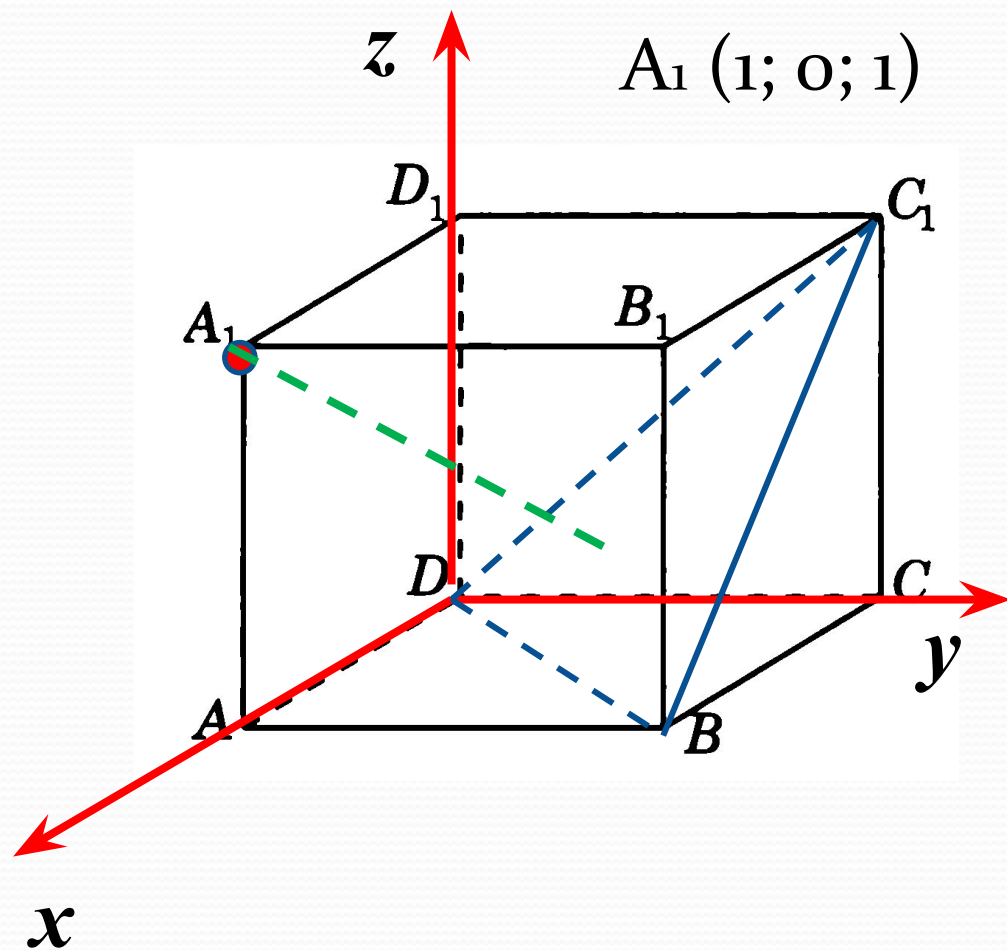
$$ax + by + cz + d = 0 \quad \begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + d = 0 \\ a + d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -d \\ a = -d \\ -d - d + c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -d \\ a = -d \\ c = d \end{cases}$$

$$-dx - dy + dz + d = 0 \quad / : (-d)$$

$$x + y - z + 1 = 0 \quad \text{- уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.}$$

№ 1 В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A_1 до плоскости (BDC_1) .



$$A_1 (1; 0; 1)$$

$$D (0; 0; 0)$$

$$B (1; 1; 0)$$

$$C_1 (0; 1; 1)$$

Запишем уравнение плоскости DBC_1 .

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} d = 0 \\ a = -b \\ c = -b \end{cases}$$

$$-bx + by - bz = 0 \quad / : (-b) \quad \begin{array}{l} \text{Найдем искомое} \\ \text{расстояние по формуле} \end{array}$$

$$x - y + z = 0$$

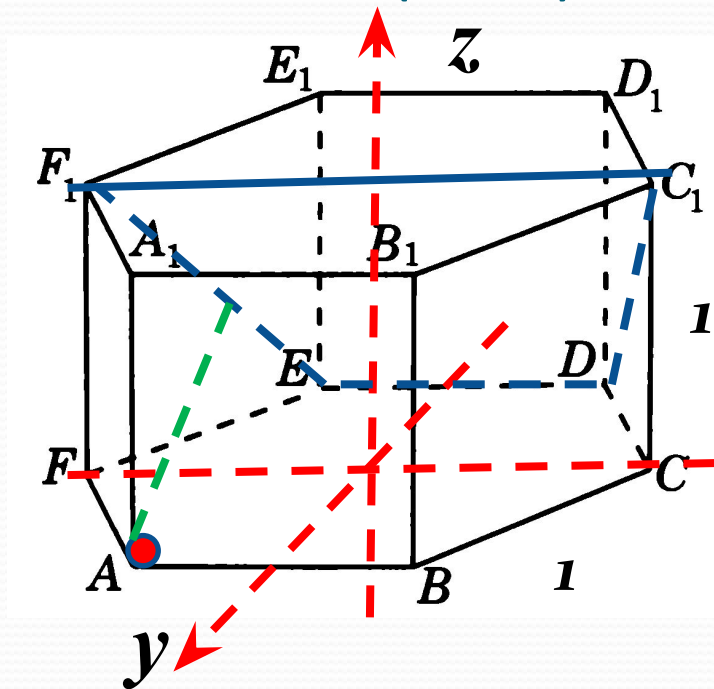
$$A_1 (1; 0; 1)$$

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\rho(A_1; (BC_1D)) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

№ 2. В правильной шестиугольной призме все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки A до плоскости (DEF_1)



$$A \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right)$$

$$C_1 (1; 0; 1)$$

$$D \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right)$$

$$F_1 (-1; 0; 1)$$

Запишем уравнение
плоскости DC_1F_1 .

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 1 + d = 0 \\ a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot (-1) + b \cdot 0 + c \cdot 1 + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{a + c + d = 0} \\ \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0 \\ \underline{-a + c + d = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = -d \\ b = \frac{2}{\sqrt{3}}d \end{cases}$$

$$0 \cdot x + \frac{2}{\sqrt{3}}dy - dz + d = 0 \Big/ : d$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}y - z + 1 = 0$$

Найдем искомое

расстояние по формуле $\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

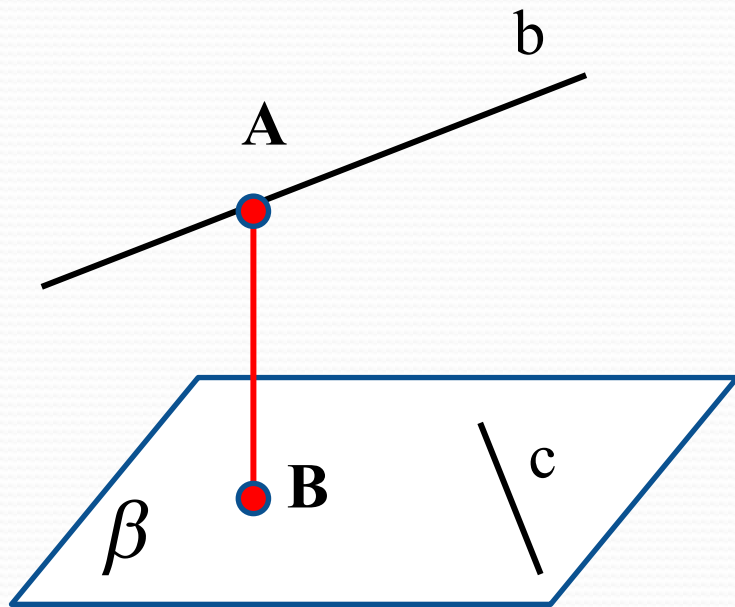
$$0 \cdot x + \frac{2}{\sqrt{3}} y - z + 1 = 0 \quad A\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$\rho\left(A; (DC_1F_1)\right) = \frac{\left|0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot 0 + 1\right|}{\sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

**Расстояние между
скрещивающимися
прямыми.**

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через вторую прямую, параллельно первой.

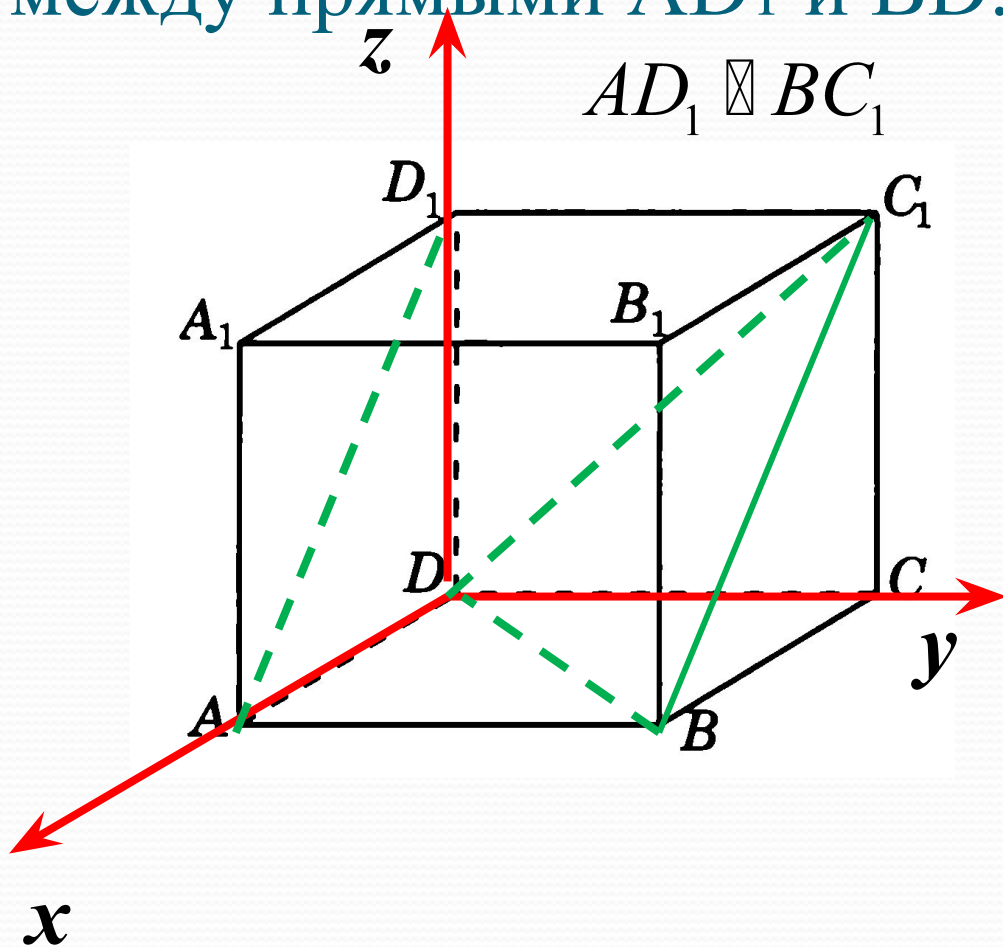


$$\rho(b; c) = \rho(b; \beta) = \rho(A; \beta)$$

№ 1. В единичном кубе найдите расстояние между прямыми AD_1 и BD .

$$AD_1 \parallel BC_1$$

$$AD_1 \parallel (DBC_1)$$



$$\begin{aligned} \rho(AD_1; BD) &= \\ \rho(AD_1; (BDC_1)) &= \\ \rho(A; (BDC_1)) \end{aligned}$$

$$A (1; 0; 0)$$

$$D (0; 0; 0)$$

$$B (1; 1; 0)$$

$$C_1 (0; 1; 1)$$

Запишем уравнение
плоскости BDC_1 .

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 0 \\ a = -b \\ c = -b \end{cases}$$

$$-bx + by - bz = 0$$

$$x - y + z = 0$$

Найдем искомое
расстояние по формуле

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

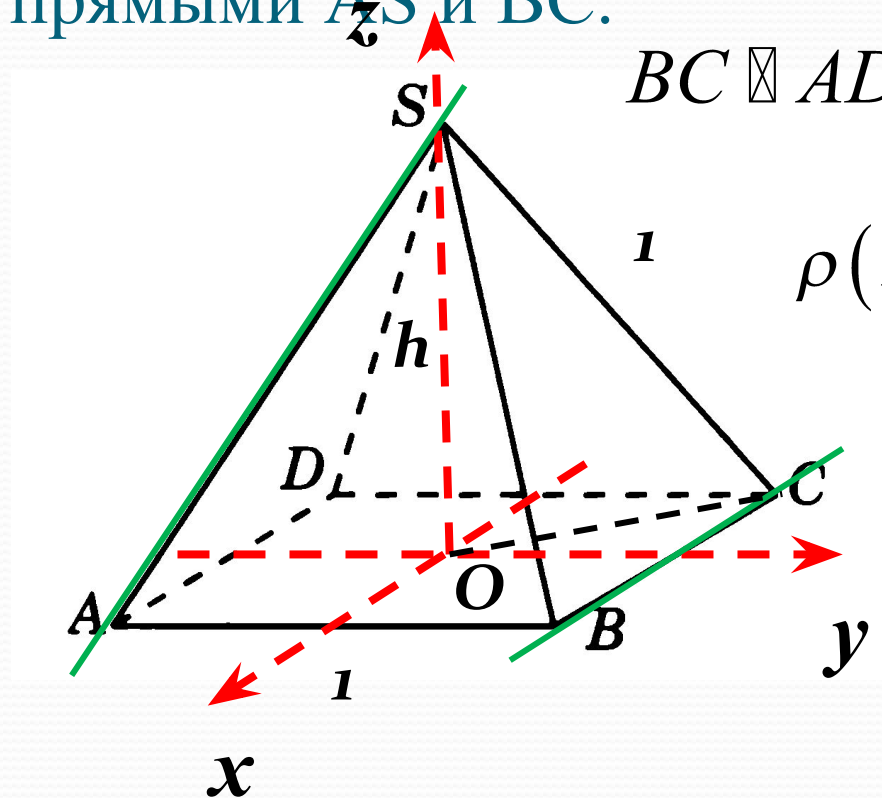
$$A(1; 0; 0)$$

$$x - y + z = 0$$

$$\rho(A; (BC_1D)) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

№ 2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между прямыми AS и BC .



$$BC \parallel AD$$

$$BC \parallel (ADS)$$

$$\begin{aligned} \rho(AS; BC) &= \rho(BC; (ADS)) = \\ &= \rho(B; (ADS)) \end{aligned}$$

$$AC = \sqrt{2} \quad OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$$

$$A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right) \quad S\left(0; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$D\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$$

Запишем уравнение
плоскости ADS.

$$\begin{cases} a \cdot \frac{1}{2} - b \cdot \frac{1}{2} + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - b \cdot \frac{1}{2} + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + d = 0 \\ \hline -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + d = 0 \\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2}c + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2d \\ c = -\sqrt{2}d \end{cases} \quad \begin{aligned} 0 \cdot x + 2dy - \sqrt{2}dz + d &= 0 \quad | : d \\ 0 \cdot x + 2y - \sqrt{2}z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Найдем искомое расстояние по формуле $\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$$\rho\left(B; (ASD)\right) = \frac{\left|0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot 0 + 1\right|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$

40. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние между диагональю куба BD_1 и диагональю грани AB_1 .

46. В пирамиде $DABC$ известны длины рёбер: $AB = AC = DB = DC = 10$, $BC = DA = 12$. Найдите расстояние между прямыми DA и BC .

50. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с основанием $ABCDEF$ боковое ребро и сторона основания равны 5 и 3 соответственно. Точка N – середина ребра SF , а точка M делит ребро SD так, что $SM : MD = 1 : 3$. Найдите расстояние между прямыми AN и EM .

Задания из материалов егэ

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S на сторонах AB и AC выбраны точки M и K соответственно так, что треугольник AMK подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{2}{3}$. На прямой MK выбрана точка E так, что $ME:EK=7:9$. Найти расстояние от точки E до плоскости BSC , если сторона основания пирамиды равна 6 , а высота пирамиды равна $\sqrt{6}$

C2 В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1 на ребрах BB_1 и CC_1 выбраны точки K и M соответственно так, что $BK:BB_1=1:3$, а $CM:CC_1=2:3$. Найти расстояние между прямыми A_1K и BM .

Координатный метод

УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

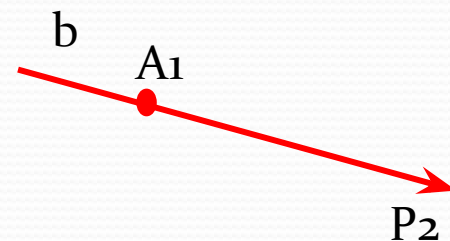
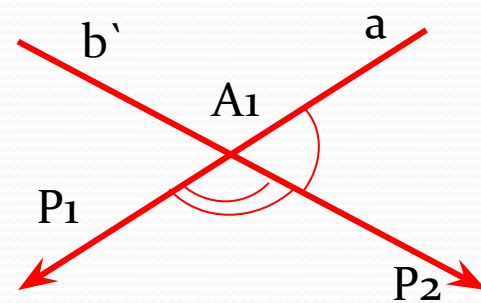
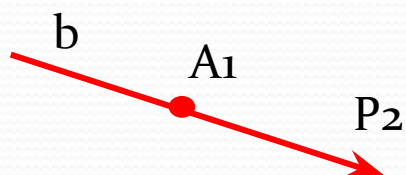
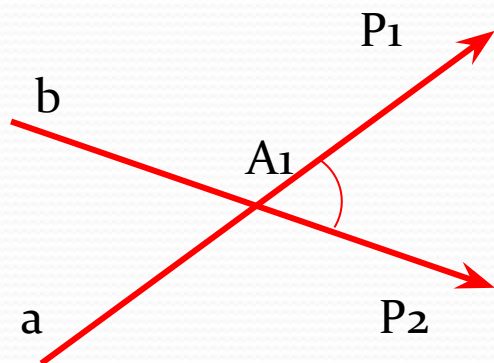
УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

- УГОЛ МЕЖДУ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ
- УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ
- УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ
- УГОЛ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

НАХОЖДЕНИЕ УГЛОВ

- *Углом между двумя пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых.*
- $0^\circ < \angle(a, b) \leq 90^\circ$.
- *Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.*
- *Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .*
- *Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.*

Нахождение угла между пересекающимися прямыми.



Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой l и плоскостью α можно вычислить по формуле

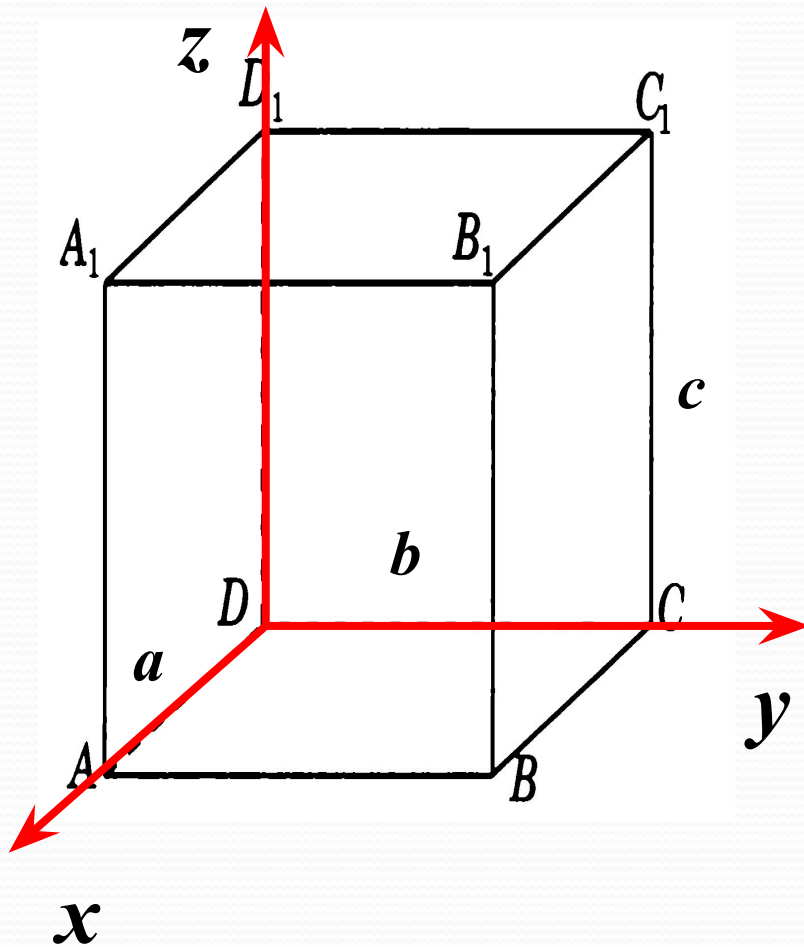
$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|} \quad (6)$$

или в координатной форме

$$\sin \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где $\vec{n} = \{x_1, y_1, z_1\}$ – вектор нормали плоскости α , $\vec{p} = \{x_2, y_2, z_2\}$ – направляющий вектор прямой l ;

Прямоугольный параллелепипед.



$D (0; 0; 0)$

$D_1 (0; 0; c)$

$A (a; 0; 0)$

$A_1 (a; 0; c)$

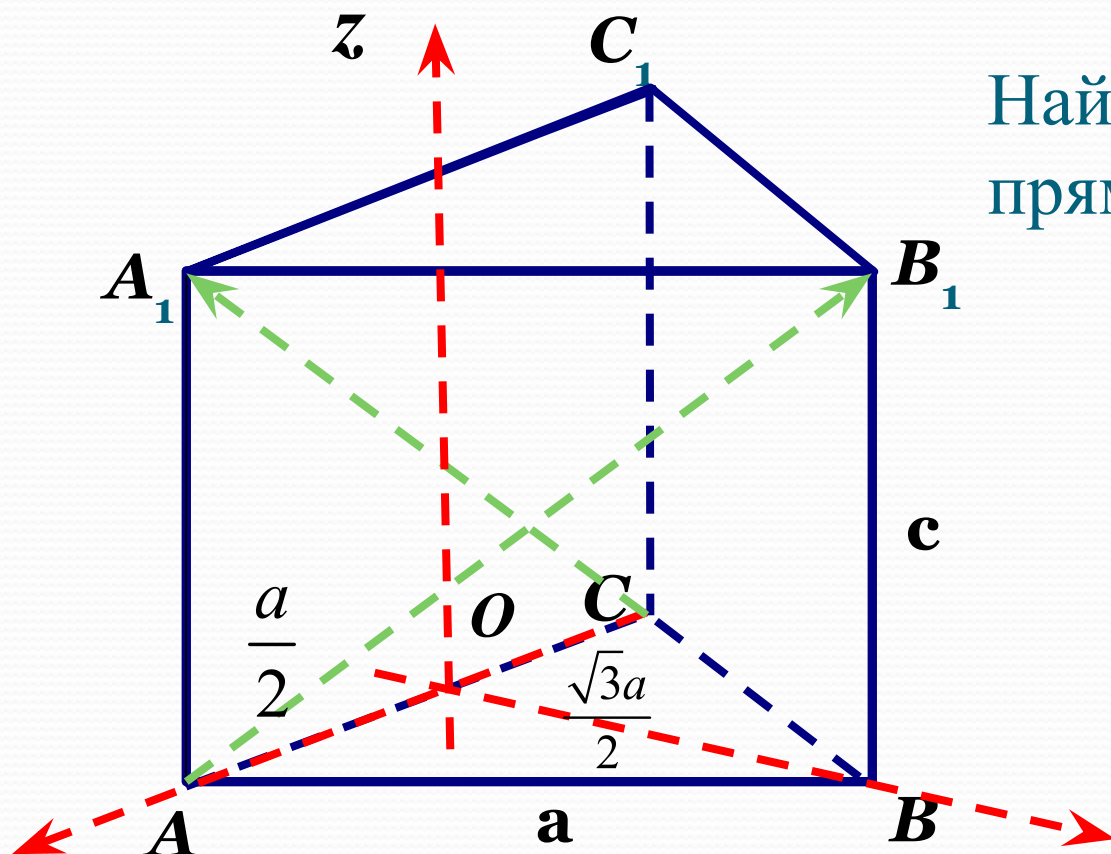
$C (0; b; 0)$

$C_1 (0; b; c)$

$B (a; b; 0)$

$B_1 (a; b; c)$

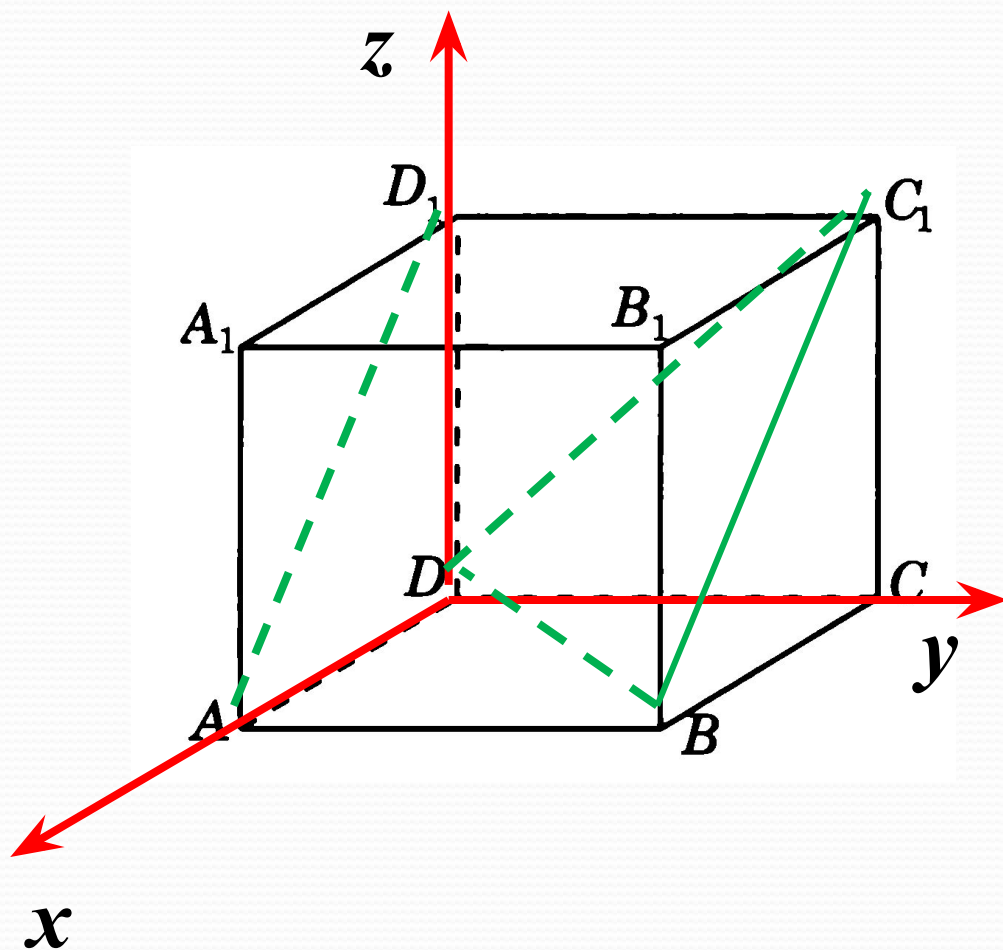
Правильная треугольная призма.



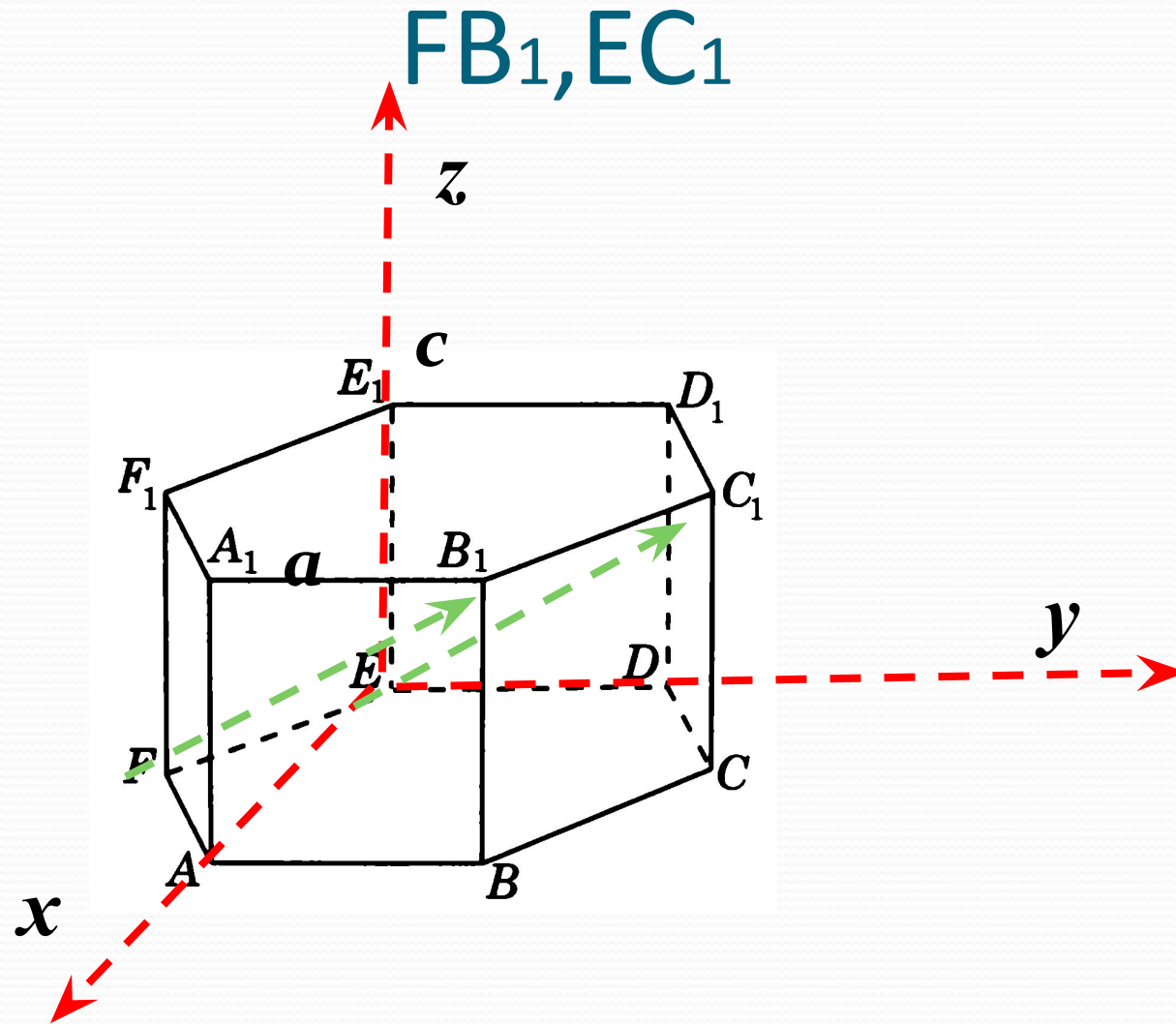
Найдите угол между
прямыми A_1C , AB_1

5.5.9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 2\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 4$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BCA_1 .

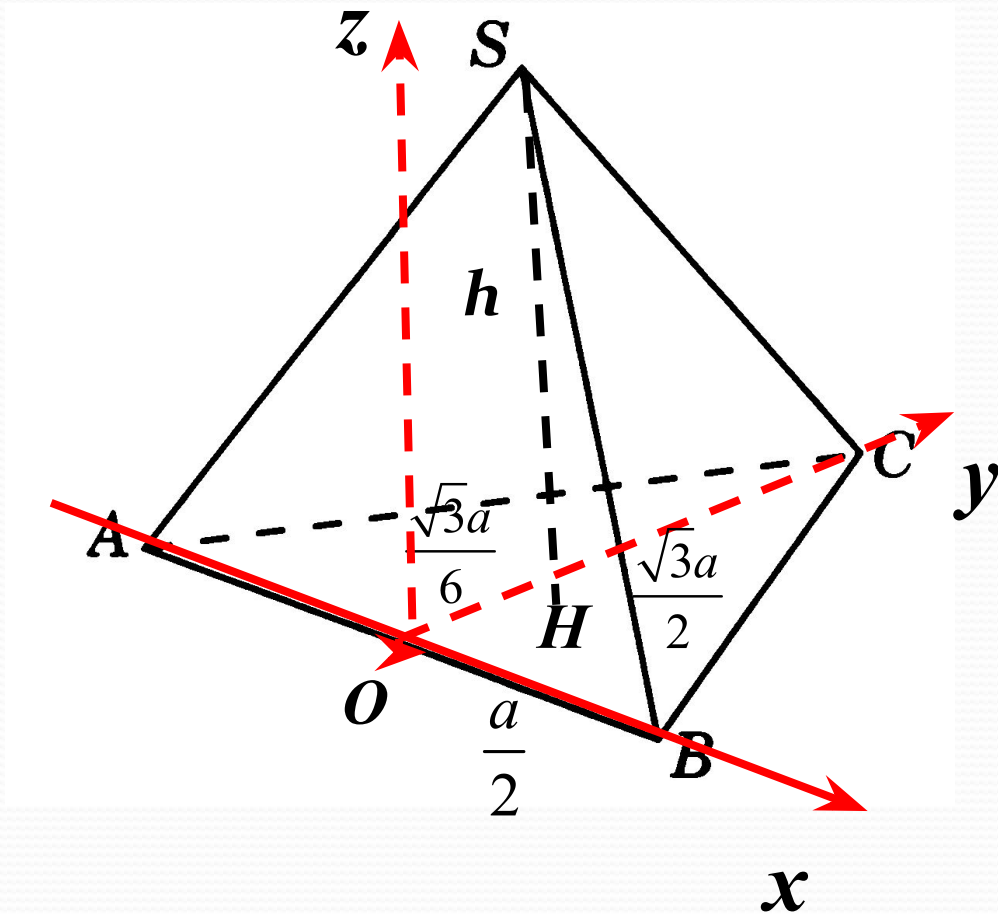
№ 1. В единичном кубе найдите угол между прямыми AD_1 и BD , между прямой AD_1 плоскостью BDC_1



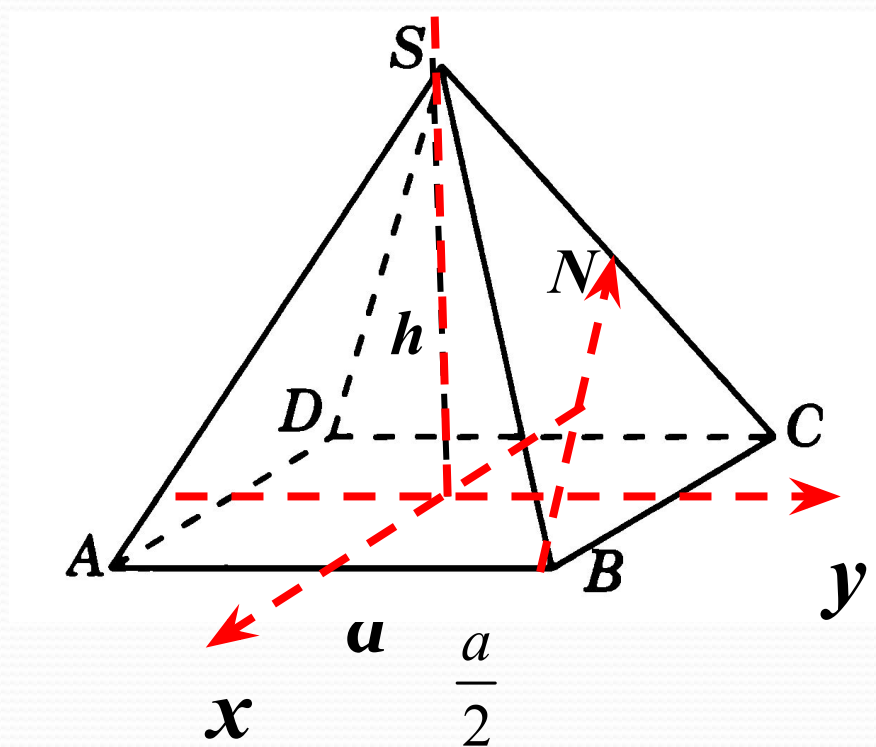
Найдите угол между прямыми



Найти угол между прямыми AB , CS

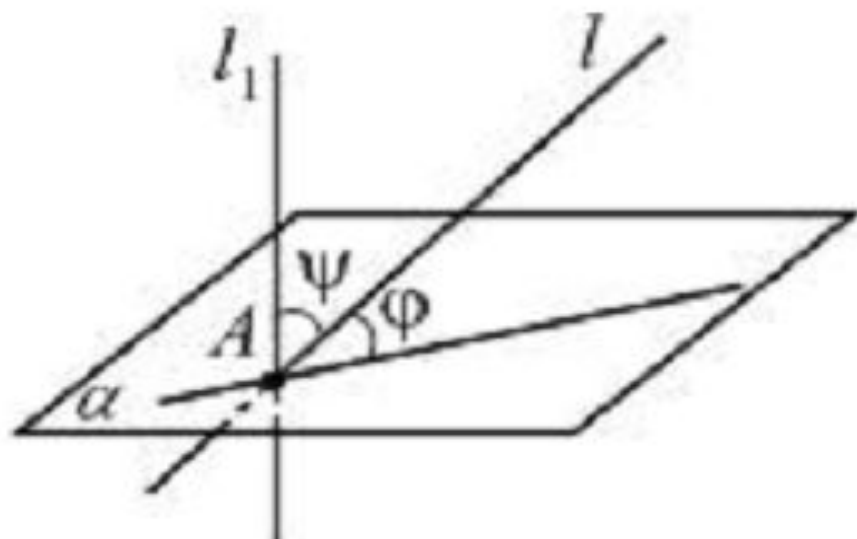


Найдите угол
между прямыми
 AS, BN



Нахождение угла между прямой и плоскостью.

- Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.
- $0^\circ < \angle(a, \alpha) < 90^\circ$.
- Угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90° .
- Если прямая параллельна плоскости (или лежит в ней), то угол между ними считается равным 0° .



Угол φ между прямой l и плоскостью α и угол ψ между прямой l и перпендикуляром к плоскости α удовлетворяют соотношению $\varphi + \psi = 90^\circ$ (см. рис. 56). Поэтому в некоторых случаях через дополнительный угол ψ легко выйти на искомый угол φ .

Угол между прямой l и плоскостью α можно вычислить по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|} \quad (6)$$

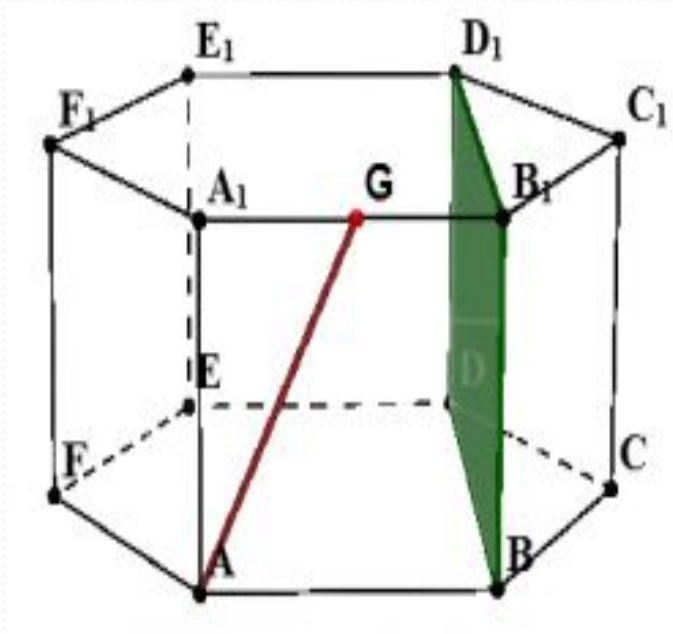
или в координатной форме

$$\sin \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где $\vec{n} = \{x_1, y_1, z_1\}$ – вектор нормали плоскости α , $\vec{p} = \{x_2, y_2, z_2\}$ – направляющий вектор прямой l ;

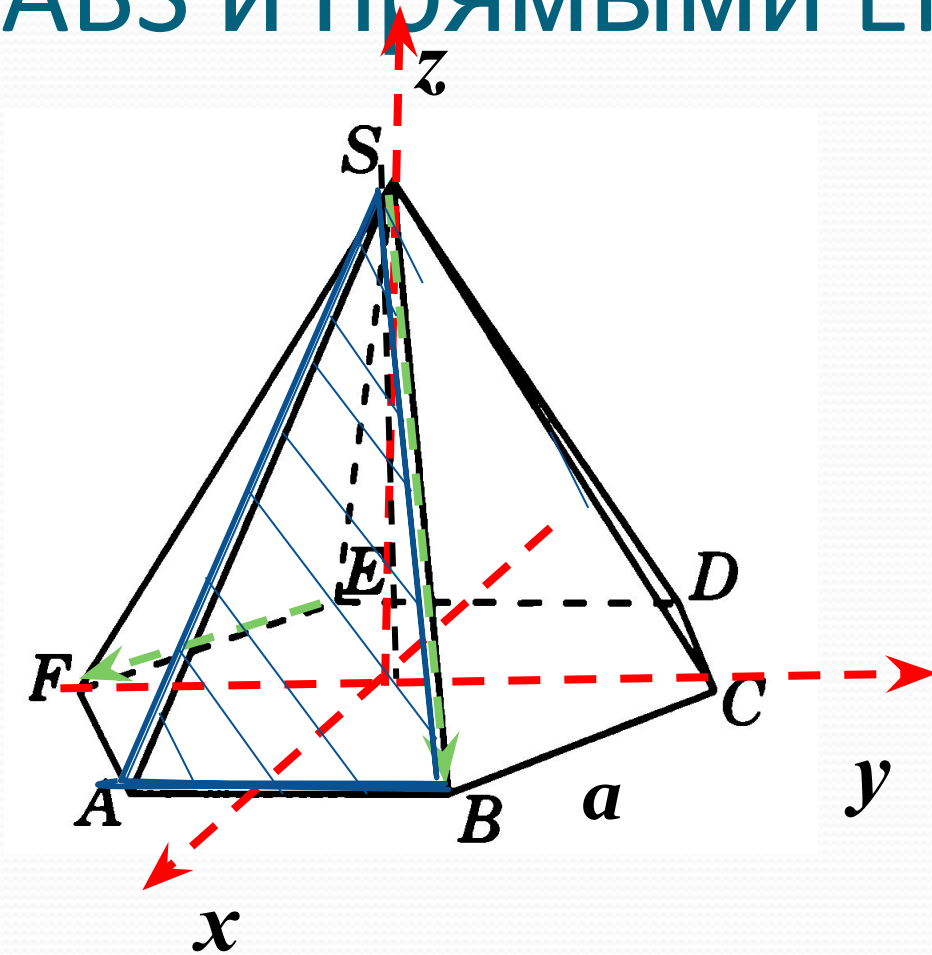
В правильной шестиугольной призме все ребра равны между собой. G середина A_1B_1 . Найти угол между плоскостью BB_1D и прямой AG .

Вар. 18



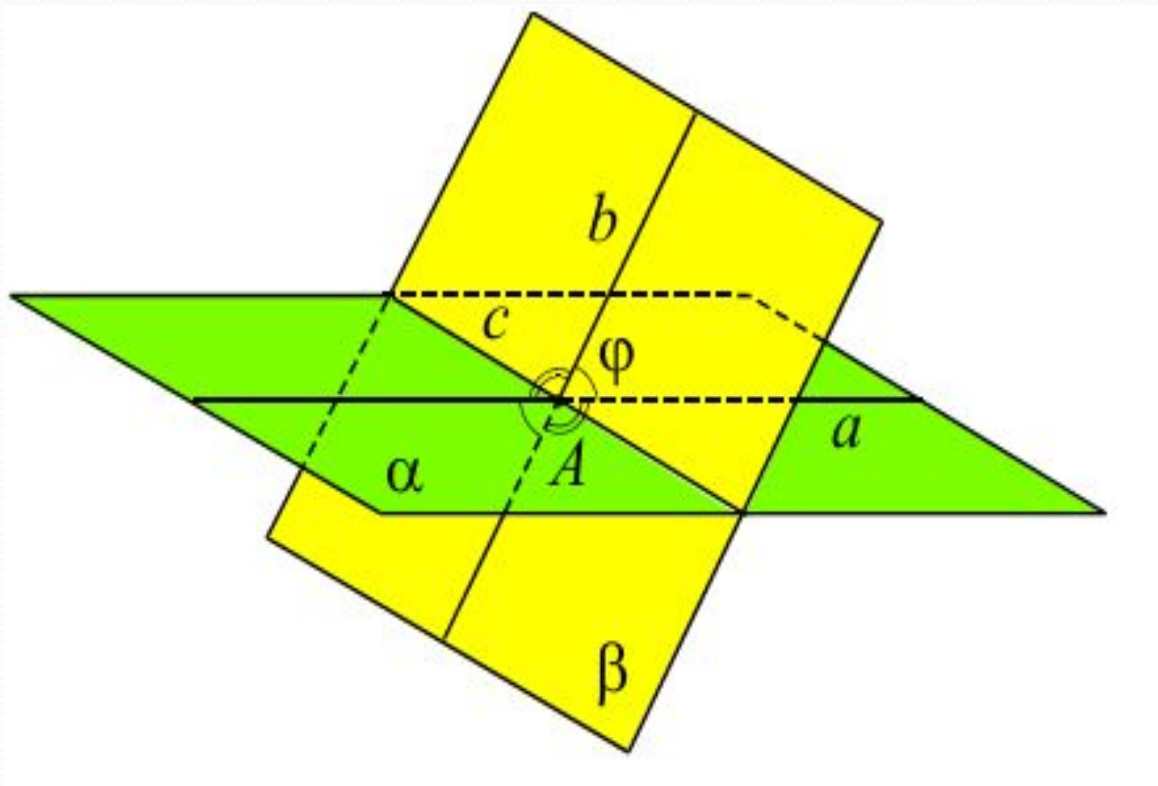
В прав. пирамиде $AB=a, AS=2a$.

Найти угол между плоскостью ABS и прямыми EF , AD , BC , AE .



Нахождение угла между плоскостями.

- Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.
- Величина двугранного угла принадлежит промежутку $(0^\circ, 180^\circ)$.
- Величина угла между пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку $(0^\circ, 90^\circ]$.
- Угол между двумя параллельными плоскостями считается равным 0° .

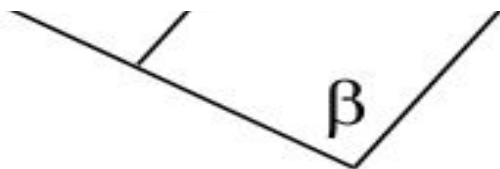


$\vec{n}_\alpha = \{p_1, q_1, r_1\}$ и $\vec{n}_\beta = \{p_2, q_2, r_2\}$, используя формулу

$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \quad (9)$$

и $\vec{n}_\alpha = \{p_1, q_1, r_1\}$ и $\vec{n}_\beta = \{p_2, q_2, r_2\}$, используя формулу

$$\begin{aligned} \cos \angle(\alpha, \beta) &= \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \\ &= \frac{|p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

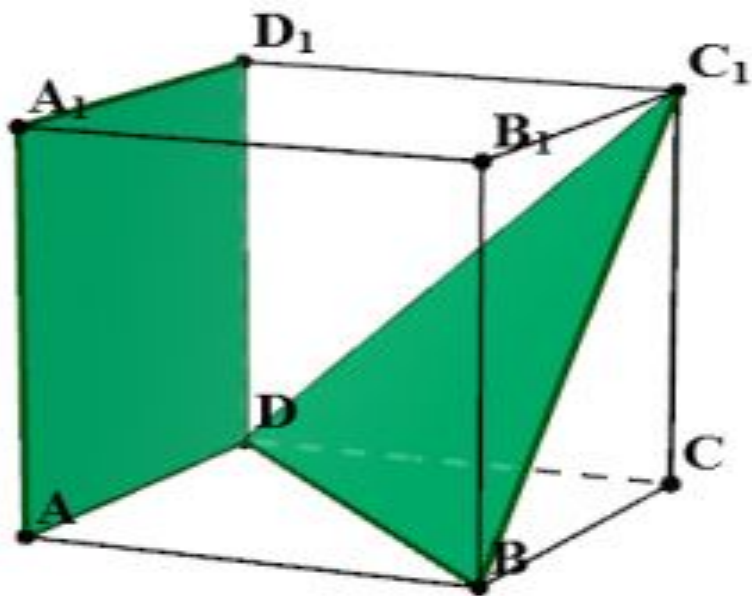


Формула вычисления угла между плоскостями

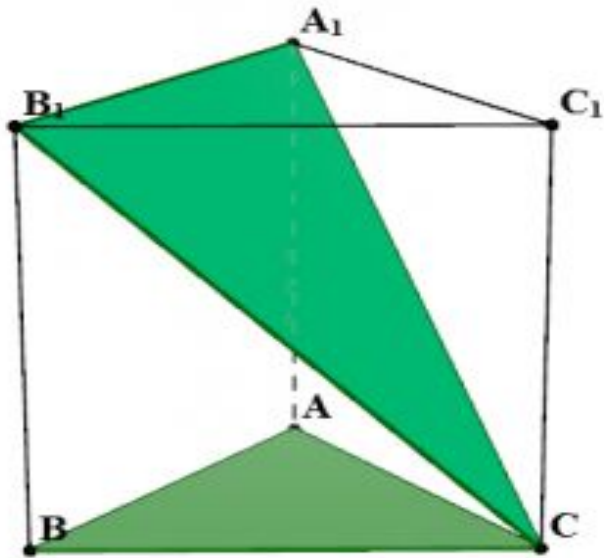
$\vec{n}_\alpha = \{p_1, q_1, r_1\}$ и $\vec{n}_\beta = \{p_2, q_2, r_2\}$, используя формулу

$$\begin{aligned} \cos \angle(\alpha, \beta) &= \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \\ &= \frac{|p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

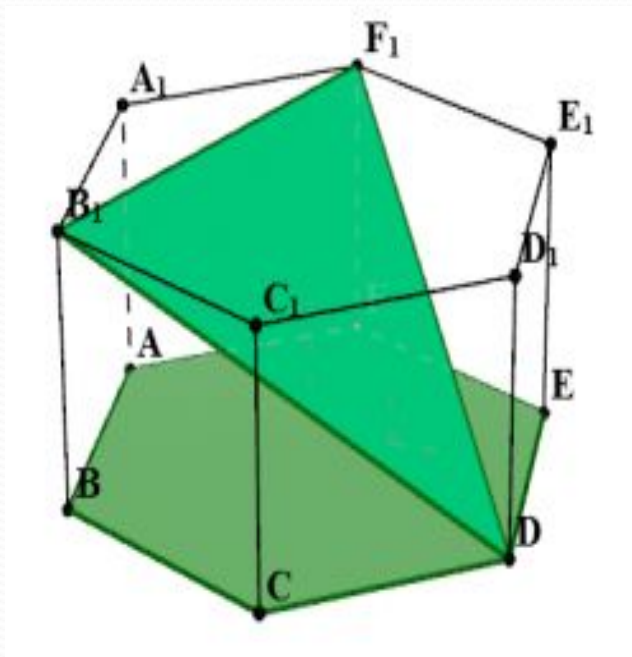
НАЙДИТЕ УГОЛ МЕЖДУ
ПЛОСКОСТЯМИ AA_1D и BDC_1



№ Все ребра правильной
треугольной призмы равны 1.
найти угол между плоскостями
 ABC и A_1B_1C



все ребра равны между собой.
Найти угол между плоскостями
 ABC и DB_1F_1



Задачи из егэ

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S и боковым ребром $4\sqrt{17}$ точки M и K – середины ребер SF и SC соответственно. Найти длину стороны основания, если угол между плоскостями AEK и BDM равен $\arccos \frac{3}{5}$.

C2 Точка M – середина стороны BC основания ACB правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Боковое ребро призмы равно $\sqrt{39}$, а сторона основания равна 12. Найти синус угла между прямой B_1M и плоскостью боковой грани ABB_1 .