Решение задач 14 ЕГЭ

Попов Сергей 10 МБОУ «Ергачинская СОШ»

Руководитель: Кучукбаева Т.А.

20.12.2017

Цель проекта

- Научится решать задачи 14 части ЕГЭ различными способами

Задачи

- Рассмотреть различные типы задач 14 ЕГЭ
- Рассмотреть различные способы решения задач 14 ЕГЭ

Типы задач

- Расстояние между скрещивающимися прямыми
- Расстояние от точки до прямой и до плоскости
- Расстояние между плоскостями

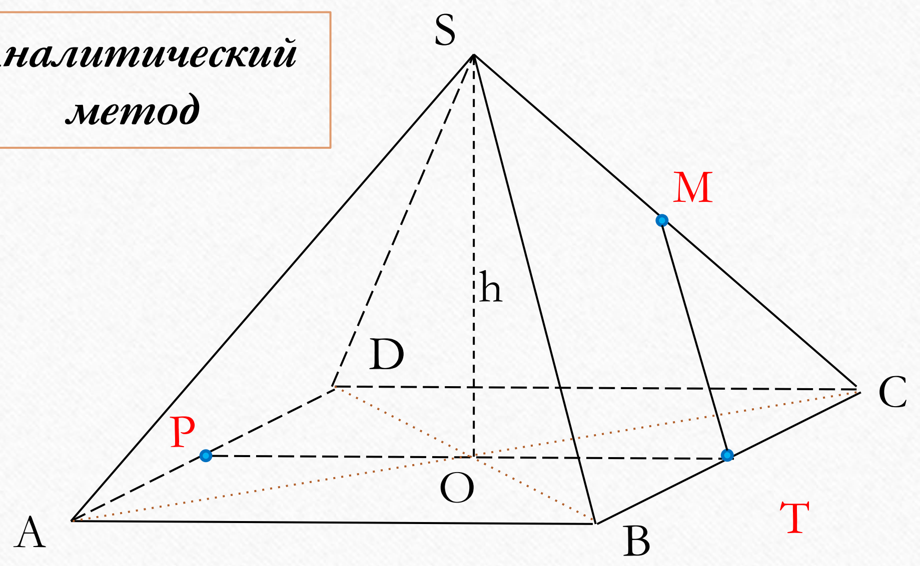
Первое полугодие

- Угол между прямой и плоскостью
- Угол между плоскостями
- Угол между скрещивающимися прямыми
- Сечения многогранников
- Объёмы многогранников

Второе полугодие

Нахождение расстояния от точки до прямой

Аналитический метод



Дано: SABCD-правильная четырехугольная пирамида. $AB=\sqrt{6}$, высота $h=\sqrt{33}$,т. P-середина AD, т.T-середина BC, т.M-середина SC.

Найти: расстояние от т.P до MT.

Решение:

- Доп. построение PT
- $PT=AB=\sqrt{6}$
- ΔABD: $\angle DAB=90°$, тогда по т.Пифагора $DB=\sqrt{AD^2+AB^2}=2\sqrt{3}$

  $OB=DB/2=\sqrt{3}$
- ΔSOB: $\angle SOB=90°$, тогда по т.Пифагора $SB=\sqrt{OB^2+SO^2}=6$

Источник: Задания С2 ЕГЭ 2014

- Построим сечение (PTM):

$PT \parallel DC$
$DC \subset (SDC)$ => $PT \parallel (SDC)$ по признаку параллельности прямой и плоскости

- $PT \parallel (SDC)$

$PT \subset (PTM)$
$(PTM) \cap (SDC) = MK$ => $MK \parallel PT$ по теореме

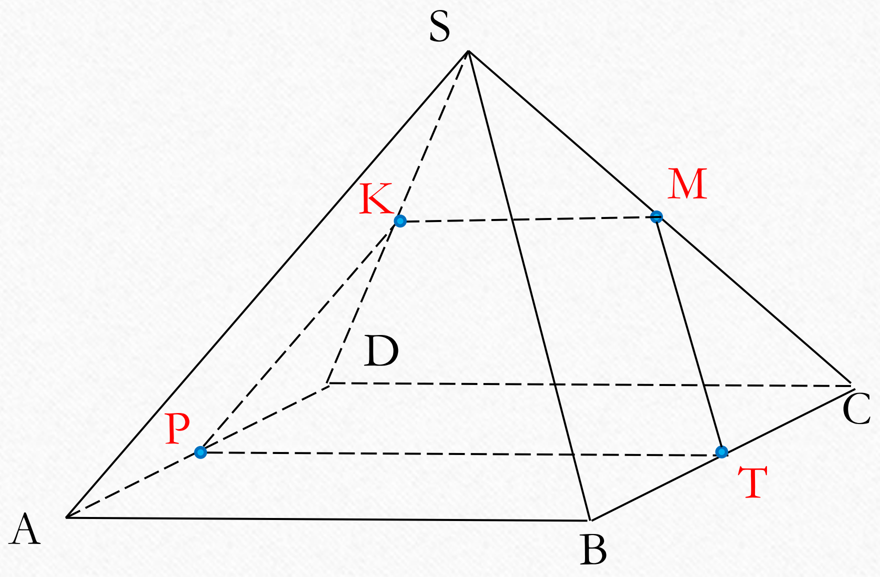
- $KM \parallel PT$

$PT \parallel DC$ => $KM \parallel DC$, SM=MC, тогда по теореме Фалеса K-середина SD

- PK-средняя линия, тогда PK=AS/2=SB/2=MT=3

- $P, K, M, T \in (MTP)$, $KM \parallel PT$ => □KMTP-равнобокая трапеция с основаниями KM и PT

•$KM = \frac{\sqrt{6}}{2}$ по свойству средней линии



•Доп. построение KH и MF-высоты, KM=HF= $\frac{\sqrt{6}}{2}$

•ΔPKH=ΔMFT по двум катетам , тогда PH=FT= $\frac{PT - HF}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

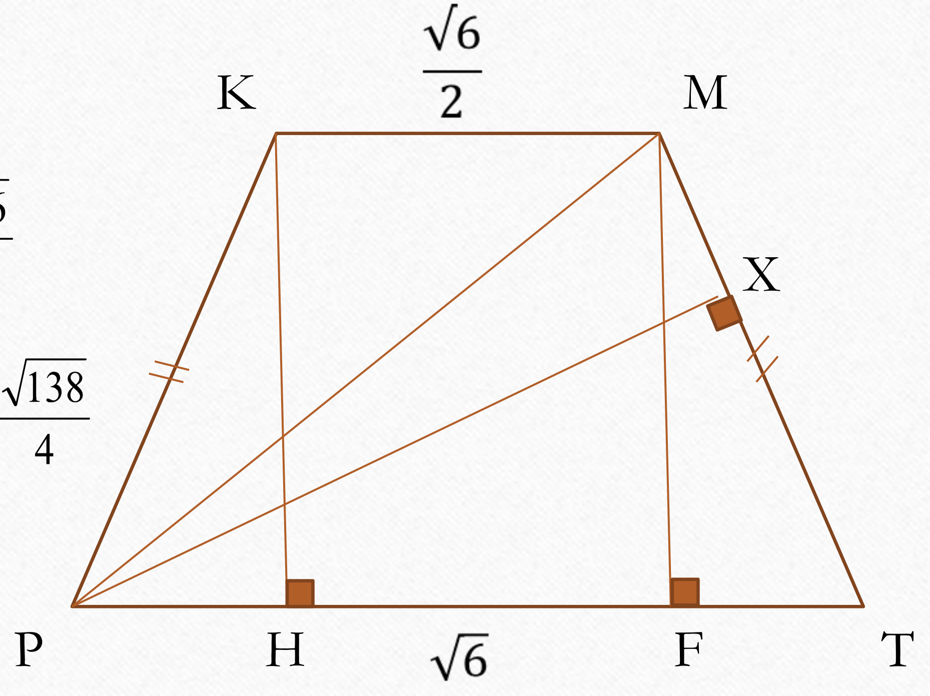
•ΔMFT, ∠MFT=90º, тогда по т.Пифагора MF= $\sqrt{MT^2 - FT^2} = \frac{\sqrt{138}}{4}$

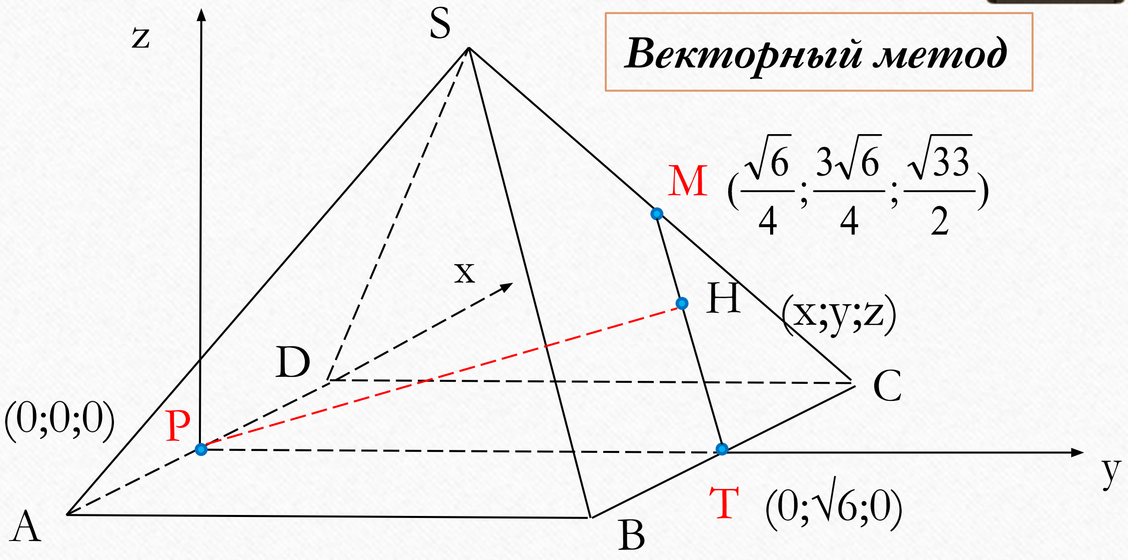
- Доп. построение PX⊥ MT, PX-*искомое расстояние*

- Sмрт=MF*PT/2
  Sмрт=PX*MT/2 | =>MF*PT=PX*MT

•PX= $\frac{MF*PT}{MT} = \frac{\frac{\sqrt{138}}{4}*\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{23}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{23}}{2}$





Векторный метод

Дано: SABCD-правильная четырехугольная пирамида. AB=√6 , высота h= √33 ,т. P-середина AD, т.T-середина BC, т.M-середина SC.

Найти: расстояние от т.P до MT.

Решение:

- Поместим фигуру в систему координат
- Пусть PH-искомое расстояние, тогда $\overrightarrow{PH}*\overrightarrow{MT}=0$
- $\overrightarrow{PH}\{x;y;z\};\overrightarrow{MT}\{\frac{\sqrt{6}}{4};-\frac{\sqrt{6}}{4};\frac{\sqrt{33}}{2}\}$
- $$\frac{\sqrt{6}}{4}x-\frac{\sqrt{6}}{4}y+\frac{\sqrt{33}}{2}z=0$$
  $$\sqrt{6}x-\sqrt{6}y+2\sqrt{33}z=0$$

- $\overrightarrow{MH}\{\frac{\sqrt{6}}{4}-x;\frac{3\sqrt{6}}{4}-y;\frac{\sqrt{33}}{2}-z\}\uparrow\uparrow\overrightarrow{MT}\{\frac{\sqrt{6}}{4};-\frac{\sqrt{6}}{4};\frac{\sqrt{33}}{2}\}$
- $\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{4}-x}{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\dfrac{\frac{3\sqrt{6}}{4}-y}{-\frac{\sqrt{6}}{4}}$, тогда x=√6-y
- $\dfrac{\frac{3\sqrt{6}}{4}-y}{-\frac{\sqrt{6}}{4}}=\dfrac{\frac{\sqrt{33}}{2}-z}{\frac{\sqrt{33}}{2}}$, тогда z=2√33- √22y
- $\sqrt{6}(\sqrt{6}-y)-\sqrt{6}y+2\sqrt{33}(2\sqrt{33}-\sqrt{22}y)=0$

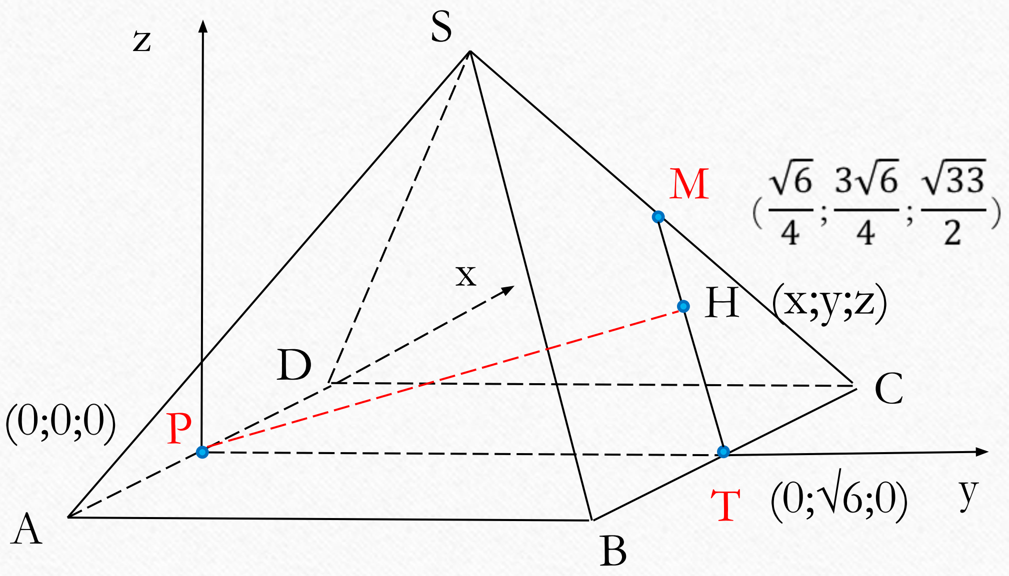
$y=\frac{23\sqrt{6}}{24}$

$x=\frac{\sqrt{6}}{24}$

$z=\frac{2\sqrt{33}}{24}$

- $PH=\sqrt{y^2+x^2+z^2}=\frac{\sqrt{23*23*6+6+33*4}}{24}=\frac{\sqrt{23}}{2}$

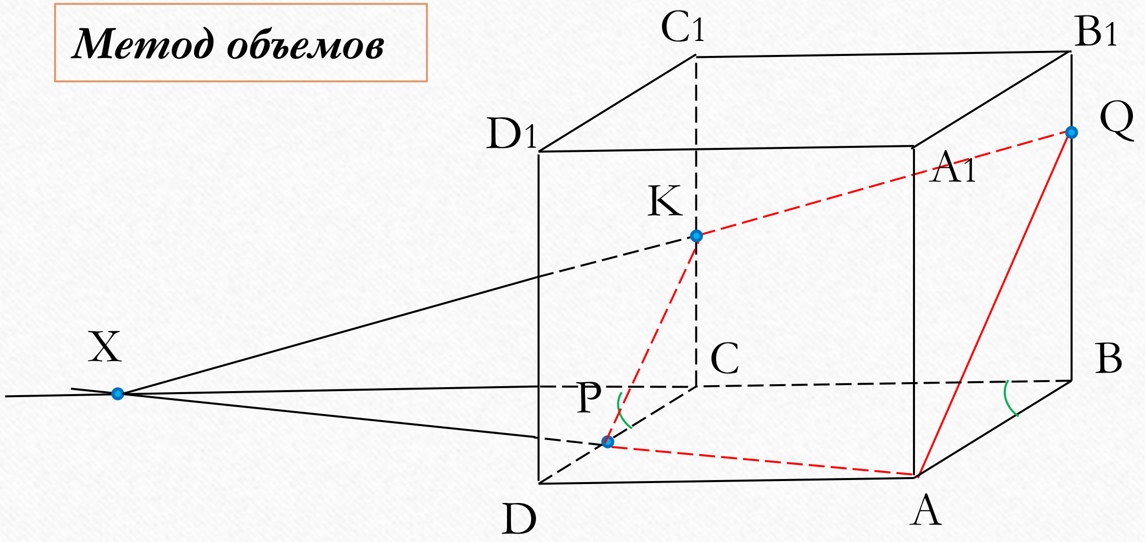
$Ответ:\frac{\sqrt{23}}{2}$



$$\sqrt{6}x-\sqrt{6}y+2\sqrt{33}z=0$$

Нахождение расстояния от точки до плоскости

Метод объемов



Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 12. т.P $\in$ DC, DP=4, т.Q $\in$ AB, $B_1Q=3$.

Найти: расстояние h от т. C до (APQ).

$V_{XPKC}=S_{XKP}*h/3=S_{XPC}*KC/3$

Решение:

- Построим сечение (APQ):
- K,P,X $\in$(APQ)=> искомое расстояние будет равно расстоянию от т. С до (XKP), тогда h-высота тетраэдра KXPC, проведенная из вершины С.
- Рассмотрим ΔXCP и ΔXBA:

$\angle ABC=\angle XCP=90°$

$\angle AXB$-общий

=> $\Delta XCP \sim \Delta XBA$ по I признаку подобия треугольников

Источник: Задания 14 ЕГЭ 2016

•ΔXCP ~ ΔXBA, тогда $\frac{PC}{AB}=\frac{XC}{XB}$

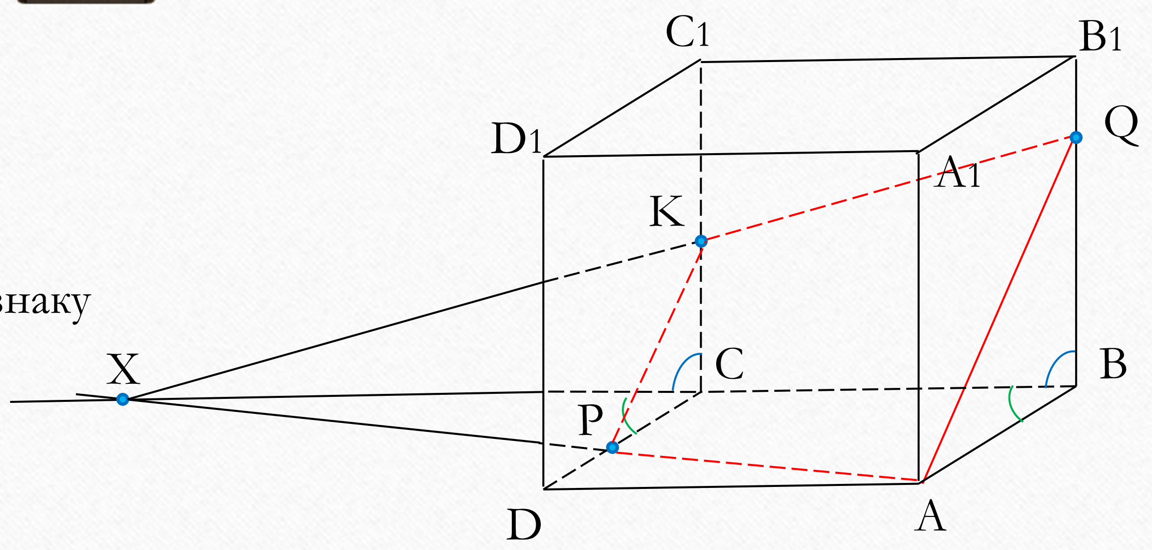
$\frac{12-4}{12}=\frac{XC}{XC+12}; XC=24$

- Рассмотрим ΔXCKи ΔXBQ:

∠QBC=∠XCK=90° | => ΔXCK ~ ΔXBQ по I признаку
∠QXB-общий | подобия треугольников

$\frac{XC}{XB}=\frac{KC}{QB};\frac{24}{12+24}=\frac{KC}{12-3}$

$KC=6$



- $\Delta XCP: \angle XCP=90°$, по т. Пифагора $XP=\sqrt{XC^2+PC^2}=\sqrt{24^2+8^2}=8\sqrt{10}$

$\Delta PCK: \angle PCK=90°$, по т. Пифагора $PK=\sqrt{PC^2+KC^2}=\sqrt{24^2+6^2}=6\sqrt{17}$

$\Delta XCK: \angle XCK=90°$, по т. Пифагора $XK=\sqrt{XC^2+KC^2}=\sqrt{24^2+8^2}=8\sqrt{10}$

•ΔXPK: по теореме косинусов $PK^2=XP^2+XK^2-2*XP*KX*\cos PXK$

$100=640+612-2*6\sqrt{17}*8\sqrt{10}*\cos PXK$

$\cos PXK=\frac{12}{\sqrt{170}}$, тогда sinPXK=$\sqrt{\frac{26}{170}}$

- SXKP=sinPXK*XK*XP/2

$$S_{XKP} = \sqrt{\frac{26}{170}} * 6\sqrt{17} * 8\sqrt{10} / 2 = 24\sqrt{26}$$

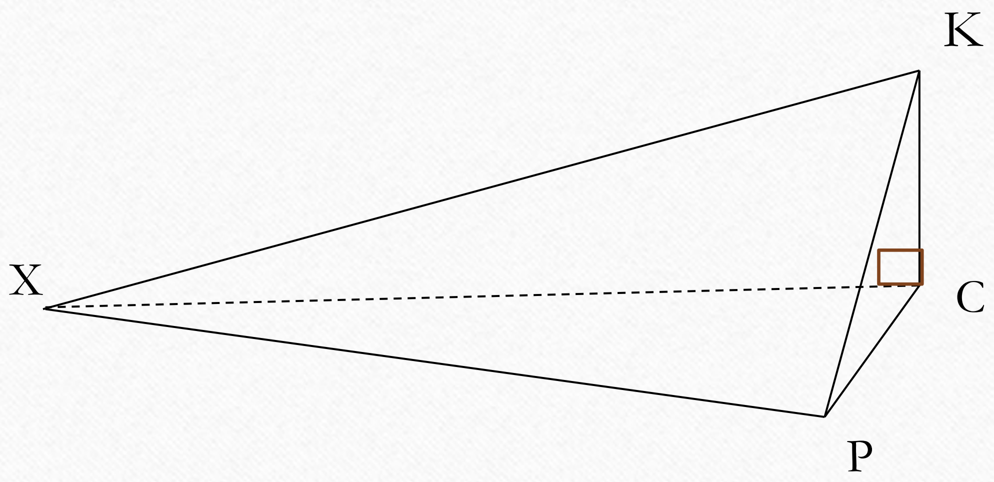
- SXPC=XC*PC/2=24*8/2=96

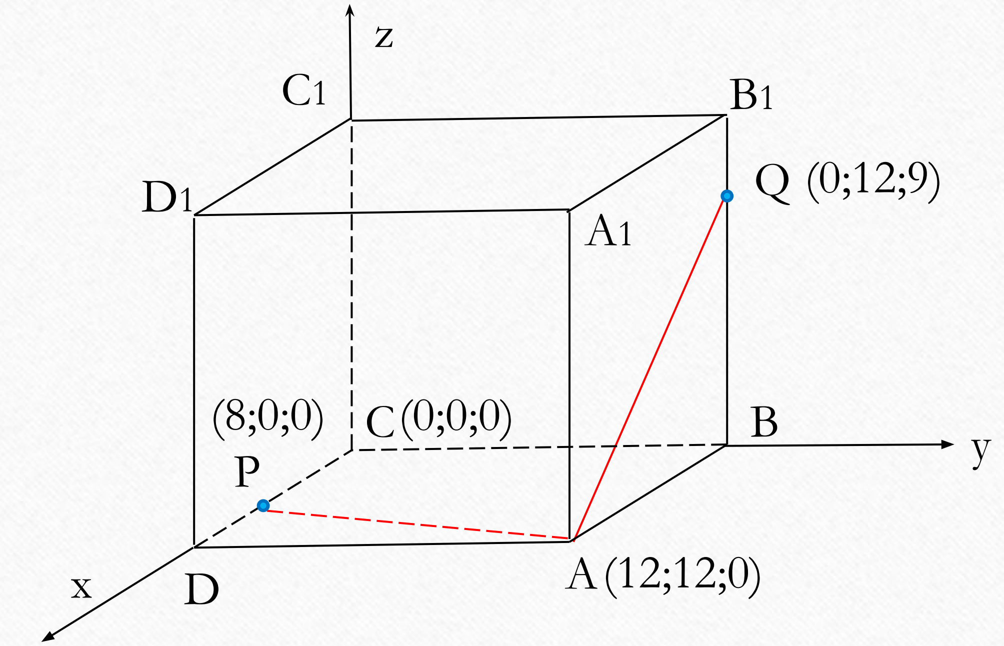
- VXPKC=SXKP*h/3=SXPC*KC/3

$$24\sqrt{26} * h = 96 * 6$$

$$h = \frac{12\sqrt{26}}{13}$$

$$Ответ: \frac{12\sqrt{26}}{13}$$





Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 12. т.P $\in$ DC, DP=4, т.Q $\in$ AB, $B_1Q=3$.

Найти: расстояние h от т. C до (APQ).

Метод координат

- Поместим куб в систему координат
- Уравнение плоскости (APQ): ax+by+cz+d=0

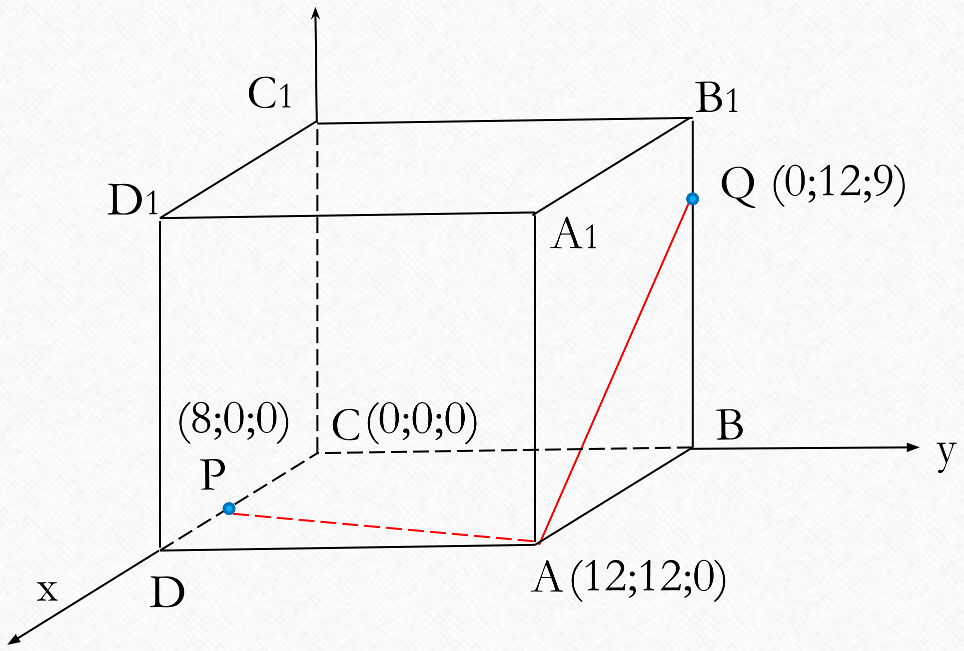
$$\begin{cases} 8a+d=0 \\ 12a+12b+d=0 \\ 12b+9c+d=0 \end{cases};\quad \begin{cases} d=-8a \\ 12a+12b-8a=0 \\ 12b+9c-8a=0 \end{cases};\quad \begin{cases} d=-8a \\ b=-a/3 \\ -4a+9c-8a=0 \end{cases};\quad \begin{cases} d=-8a \\ b=-a/3 \\ c=4a/3 \end{cases}$$

$$ax - \frac{ay}{3} + \frac{4az}{3} - 8a = 0$$

- Уравнение плоскости (APQ): 3x-y+4z-24=0

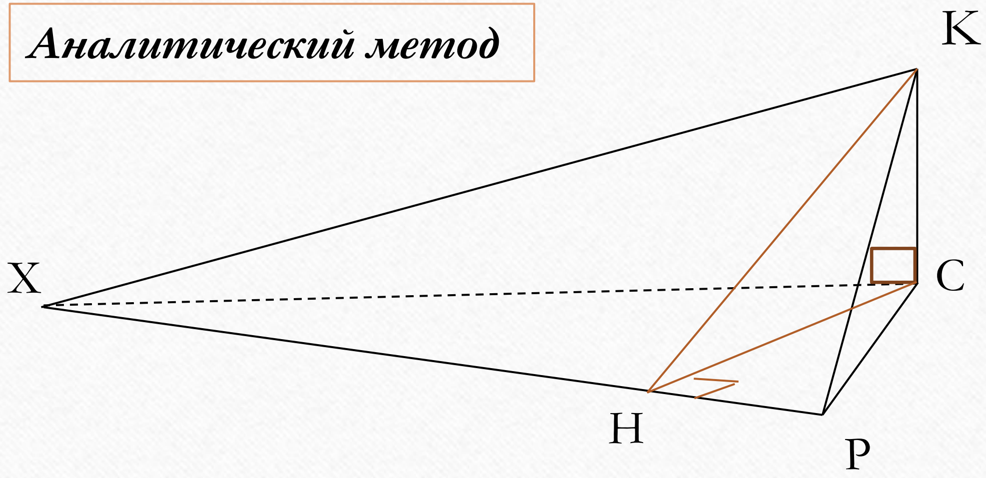
$$h=\frac{|-24|}{\sqrt{9+1+16}}=\frac{12\sqrt{26}}{13}$$

$$\text{Ответ}:\frac{12\sqrt{26}}{13}$$



$$\boxed{p(M,\alpha)=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Аналитический метод



Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 12. т.P $\in$ DC, DP=4, т.Q $\in$ AB, $B_1Q=3$.

Найти: расстояние h от т. C до (APQ).

Решение:

- Доп. построение CH-высота ΔXCP
- KH-наклонная к плоскости (XCP)

  CH-проекция KH на (XCP)

  $CH \perp XP$

  => $KH \perp XP$ по теореме о трех перпендикулярах
- $CH \perp XP$

  $KH \perp XP$

  $KH \cap CH = H$

  => $XP \perp (KHC)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости

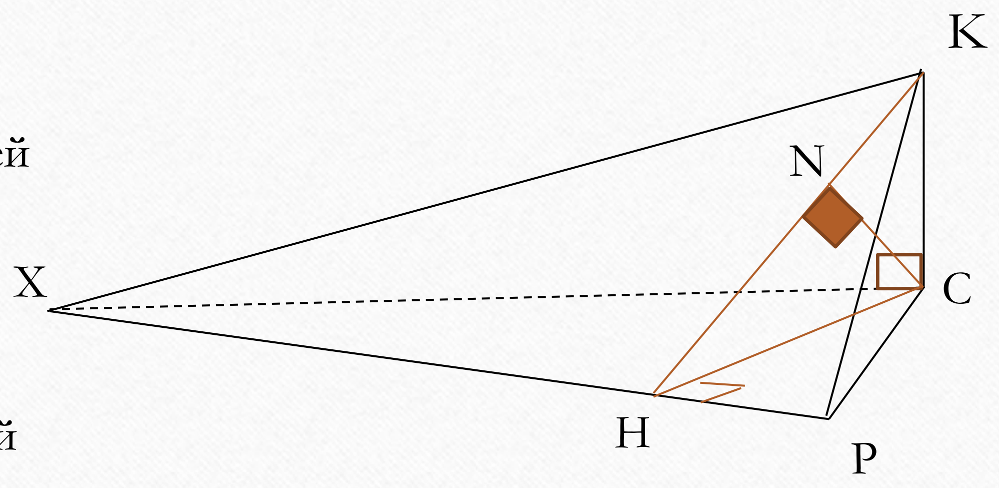
- $XP \perp (KHC)$
$XP \subset (XPK)$

$\Rightarrow (XPK) \perp (KHC)$ по признаку перпендикулярности плоскостей

- Доп. построение CN-высота ΔCHK
$(XPK) \perp (KHC)$
$(XPK) \cap (KHC) = HK$
$CN \perp HK$
$CN \subset (KHC)$

$\Rightarrow CN \perp (XKP)$ по свойству перпендикулярных плоскостей

Значит CN-искомое расстояние



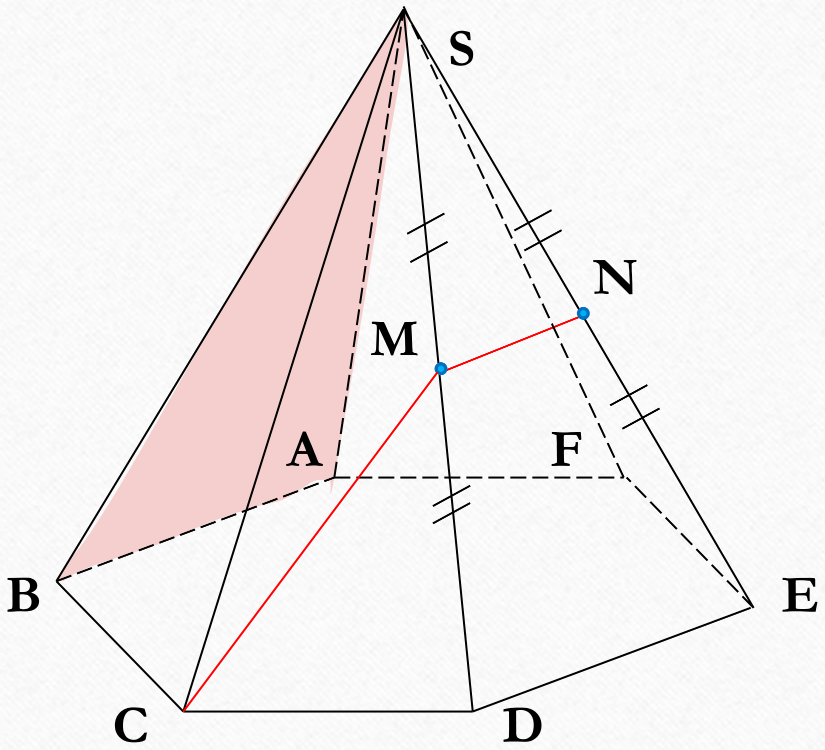
- $KH = 2 * S_{KXP} / XP = \frac{2*24*\sqrt{26}}{8\sqrt{10}} = 6\sqrt{2{,}6}$

- $CH = 2 * S_{XCP} / XP = \frac{2*96}{8\sqrt{10}} = 2{,}4\sqrt{10}$

$$CN = \frac{KC*CH}{HK} = \frac{6*2.4\sqrt{10}}{6*\sqrt{2.6}} = \frac{2.4*10}{\sqrt{26}} = \frac{12\sqrt{26}}{13}$$

$$Ответ: \frac{12\sqrt{26}}{13}$$

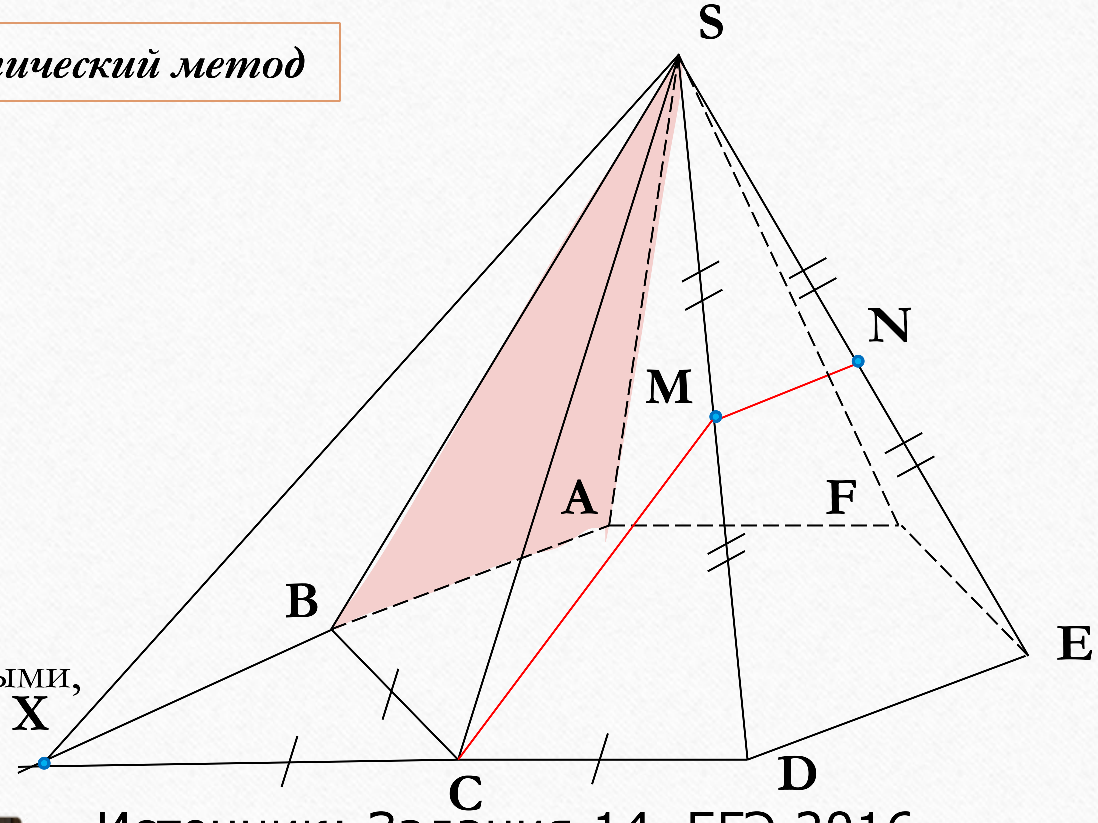
Нахождение расстояния между плоскостями



Дано: шестиугольная правильная пирамида SABDEF с ребром основания 1, боковой стороной 2. N-середина SE, M-середина SD.

Найти: расстояние от (MNC) до (SAB).

Аналитический метод



Решение:

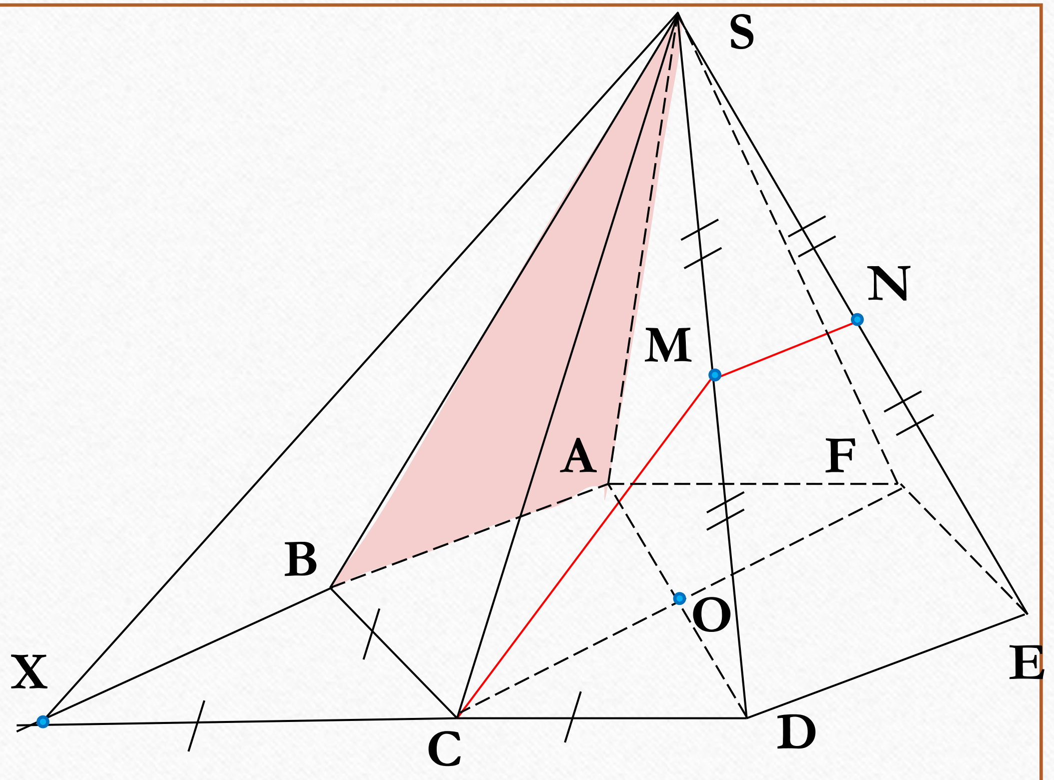
- MN||DE по св-ву средней линии
  AB||DE
  =>MN||AB
- AB∩CD=X, ∠XBC= ∠XCB=60° как смежные с равными, тогда ΔXBC-равносторонний по признаку, XC=BC
- XC=BC, BC=CD=>CM-средняя линия ΔXSD

Источник: Задания 14 ЕГЭ 2016

- CM||XS по св-ву средней линии
  MN||AB
  CM∩MN=M
  XS и AB ⊂(SAB)
  MN и CM ⊂(MNC)
  =>(SAB)||(MNC)

- MN||DE
  DE ⊂(ABC)
  =>MN||(ABC) по признаку
- MN||(ABC)
  MN ⊂(MNC)
  (ABC)∩(MNC)=a
  => a||MN по теореме
- a||MN
  DE||MN
  =>a||DE, тогда C,F ∈ a

- a⊂(MNC)=>CF ⊂(MNC)



- Возьмем т.О-центр описанной вокруг ABCDEF окружности, O ∈ CF, тогда O ∈ (MNC), и расстояние от т. О до (SAB)-искомое.

- Пусть т. K-середина AB, OH⊥SK
- OK⊥AB, SK⊥AB по св-ву равнобедренного треугольника
- SK∩KO=K

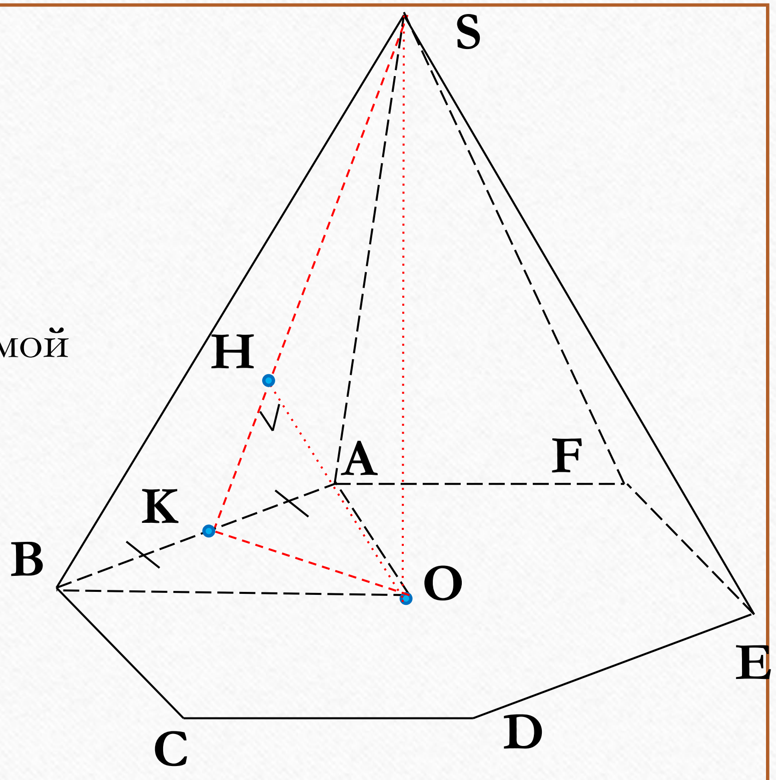
SK ⊂(SKO)
KO ⊂(SKO)
SK⊥AB
OK⊥AB

=>AB⊥(SOK) по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, тогда OH⊥ AB

- OH⊥SK

OH⊥ AB
SK∩AB=K
SK⊂(ABS)
AB⊂(ABS)

⇒ OH⊥(ABS) по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, тогда OH-искомое расстояние



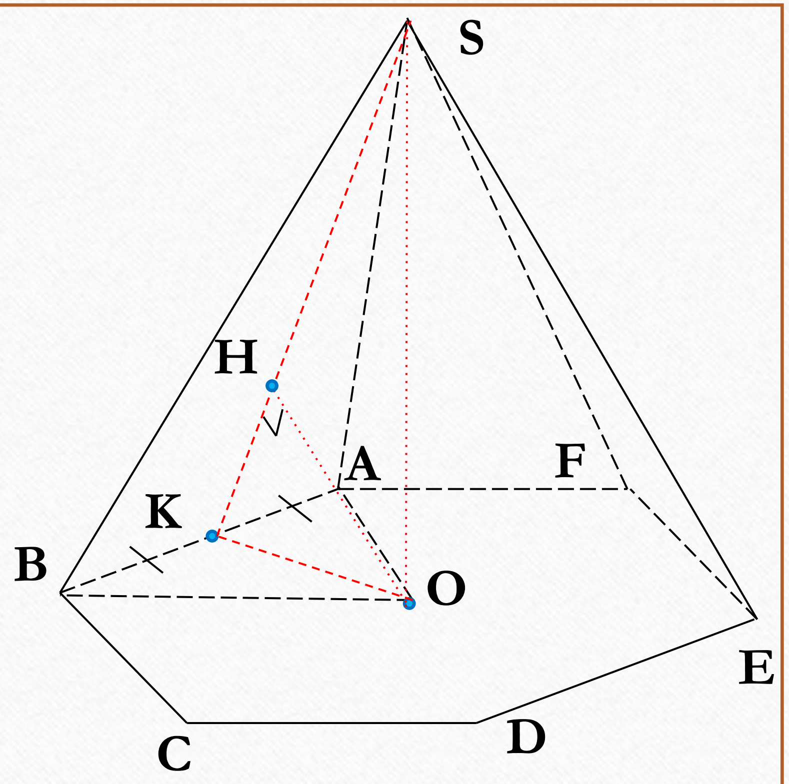
•ΔABO-равносторонний, тогда OK= $\frac{\sqrt{3}}{2}$

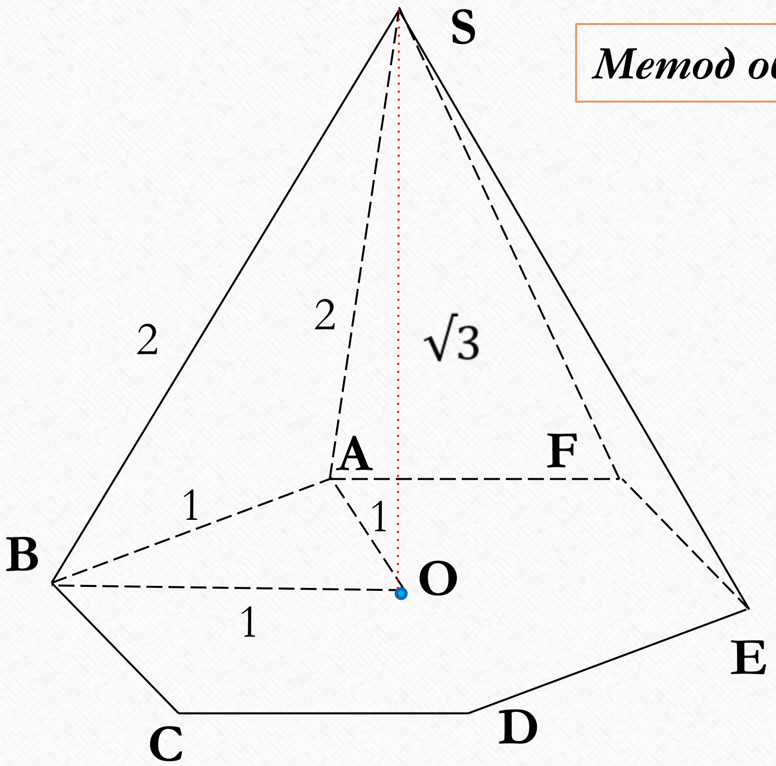
•ΔAKS: $\angle$SKA=90º, по т.Пифагора SK= $\sqrt{4-1/4}=\frac{\sqrt{15}}{2}$

•SO-высота пирамиды, тогда ΔOKS: $\angle$SOK=90º, по т. Пифагора SO= $\sqrt{15/4-3/4}=\sqrt{3}$

•ΔSOK: $\angle$SOK=90º, тогда OH= $\frac{OK*OS}{SK}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}*\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$

$$Ответ: \sqrt{\frac{3}{5}}$$





Метод объемов

Дано: шестиугольная правильная пирамида SABDEF с ребром основания 1, боковой стороной 2. N-середина SE, M-середина SD.

Найти: расстояние h от (MNC) до (SAB).

Решение:

- $V_{SABO}=\frac{1}{3}*S_{ABS}*h=\frac{1}{3}*S_{ABO}*SO$
- $S_{ABS}=\sqrt{p*(p-AB)*(p-BS)*(p-AC)}=\sqrt{2{,}5*0{,}5*0{,}5*1{,}5}=0{,}25\sqrt{15}$
  $p=(1+2+2)/2=2{,}5$

- $SABO=\frac{1*\sqrt{3}}{4}$
- $0{,}25\sqrt{15}*h=\frac{\sqrt{3}}{4}*\sqrt{3}$

$h=\sqrt{\frac{3}{5}}$

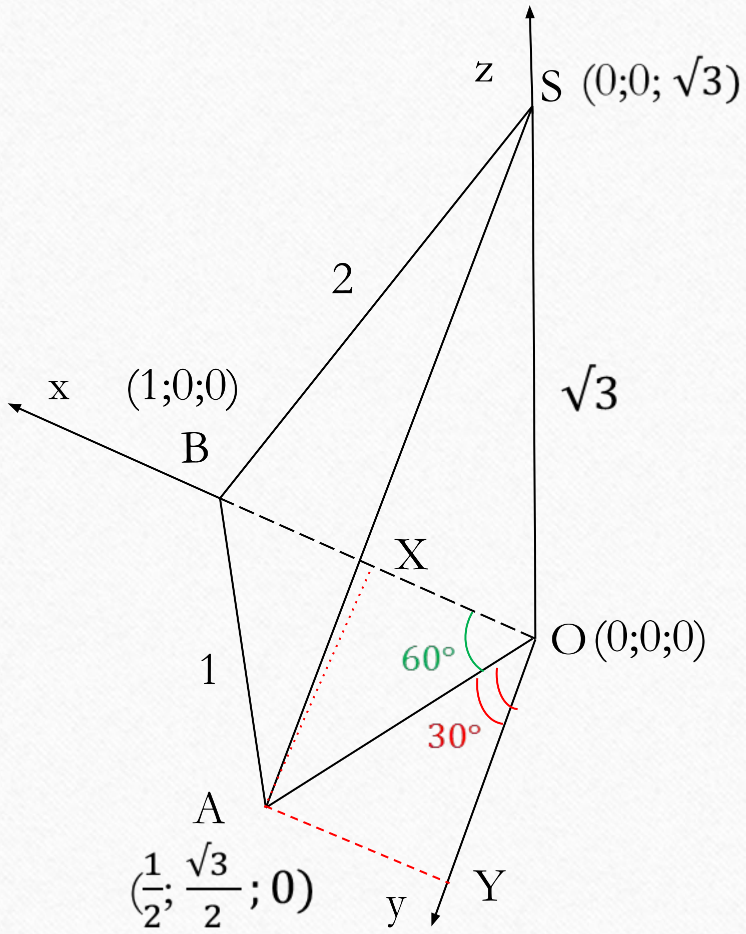
Ответ: $\sqrt{\frac{3}{5}}$

Дано: шестиугольная правильная пирамида SABDEF с ребром основания 1, боковой стороной 2. N-середина SE, M-середина SD.
Найти: расстояние h от (MNC) до (SAB).

Метод координат

Решение:

- Поместим SABOв систему координат
- Доп. построение AY ⊥OY, AX⊥OX
- ΔAXO: $\angle AXO=90°$, $\cos 60°=OX/AO$
  $OX=1/2$
- ΔAYO: $\angle AYO=90°$, $\cos 30°=OY/AO$
$OX=\sqrt{3}/2$



- Уравнение плоскости (ABS): ax+by+cx+d=0

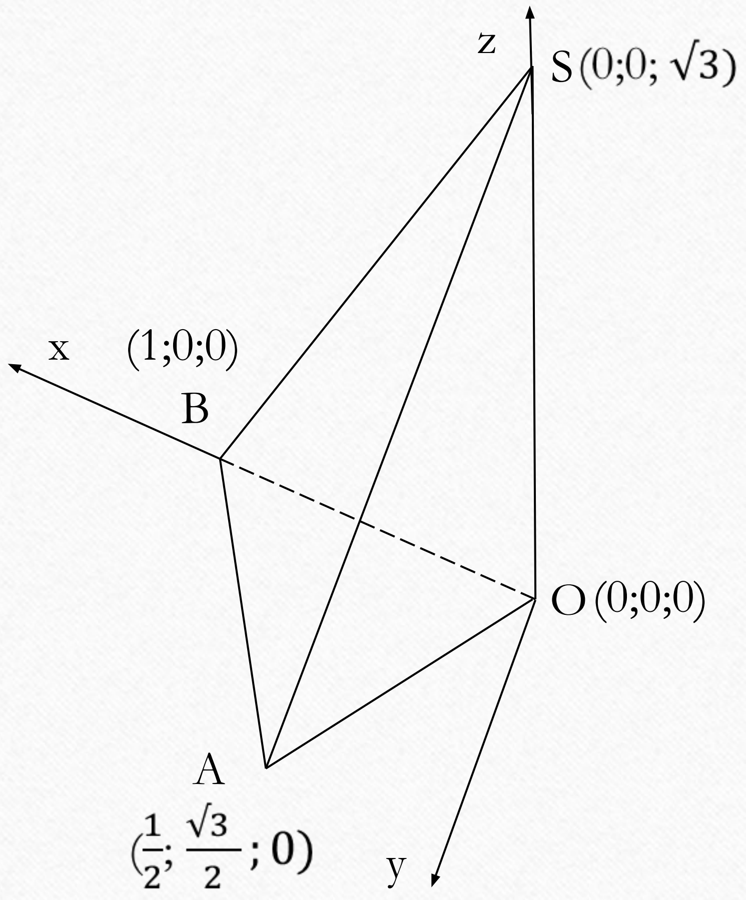
$$\begin{cases} a+d=0 \\ \sqrt{3}c+d=0; \\ \frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}b}{2}+d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} d=-a \\ c=\frac{\sqrt{3}a}{3} \\ b=\frac{\sqrt{3}a}{3} \end{cases}$$

- $ax+\frac{\sqrt{3}ay}{3}+\frac{\sqrt{3}az}{3}-a=0$

$$3x+\sqrt{3}y+\sqrt{3}z-3=0$$

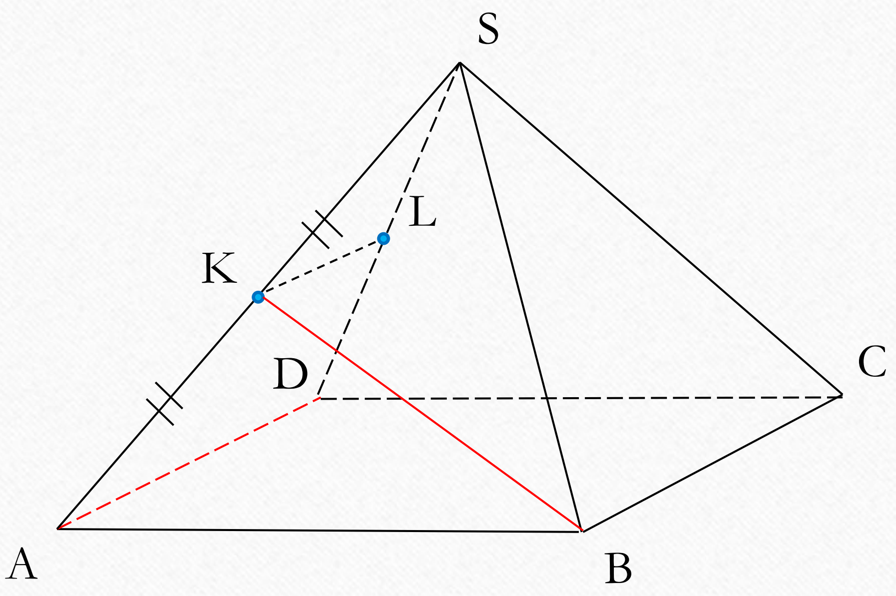
$$h=\frac{|-3|}{\sqrt{9+3+3}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{3}{5}}$



$$\boxed{p(M,\alpha)=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми



Дано: четырехугольная правильная пирамида SABD, длина каждого ребра равна 4, т. К-середина AS.
Найти: расстояние между AD и BK.

Аналитический метод

Решение:

- Построим сечение (KBC):

$\left.\begin{array}{l} BC \| AD \\ AD \subset (ASD) \end{array}\right|$ => BC||(ASD) по признаку параллельности прямой и плоскости

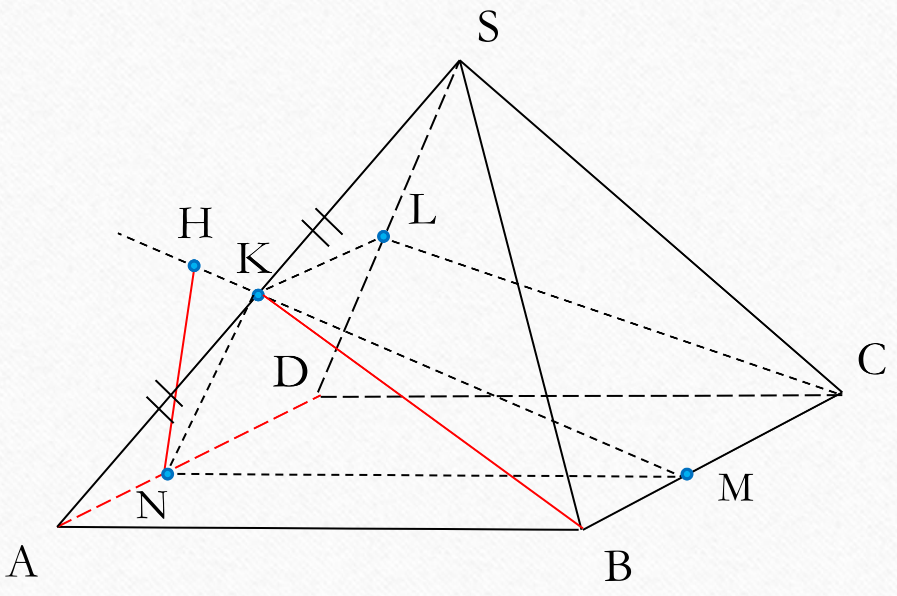
- $\left.\begin{array}{l} BC \| (ASD) \\ BC \subset (KBC) \\ (ASD) \cap (KBC) = KL \end{array}\right|$ => KL||BC по теореме
- KL||BC, AD||BC, тогда AD||KL

Источник: Задания 14 ЕГЭ 2015

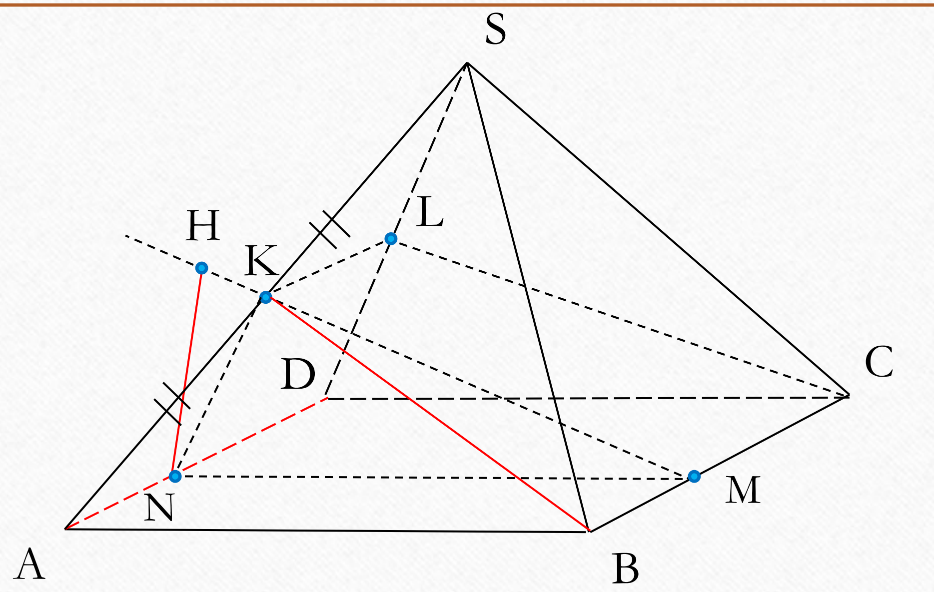
- $\left.\begin{array}{l} AD \parallel KL \\ KL \subset (KBC) \end{array}\right|$ => $AD \parallel (KBC)$ по признаку параллельности прямой и плоскости,

тогда расстояние между AD и KB равно расстоянию от любой точки AD до (KBC)

- Доп. построение $KN \perp AD$, $MN \perp AD$, $MK \perp NH$
- $\left.\begin{array}{l} KN \perp AD \\ KL \parallel AD \end{array}\right|$ => $KN \perp KL$
- $\left.\begin{array}{l} KN \perp AD \\ MN \perp AD \\ MN \subset (KMN) \\ KN \subset (KMN) \end{array}\right|$ $\Rightarrow$ $AD \perp (KMN)$ по признаку , $NH \subset (KMN)$, тогда $AD \perp NH$ по определению прямой, перпендикулярной к плоскости
- $\left.\begin{array}{l} AD \parallel KL \\ AD \perp NH \end{array}\right|$ => $NH \perp KL$ по лемме
- $\left.\begin{array}{l} NH \perp KL \\ NH \perp MK \\ KL \cap KM = K \\ KL \subset (KBC) \\ KM \subset (KBC) \end{array}\right|$ => $NH \perp (KBC)$ по признаку, тогда NH-искомое расстояние



- KL||AD, AK=KS,тогда по т. Фалеса SL=LD, KL-средняя линияΔASD, KL=AD/2=2
- KB=CL как медианы в равных равносторонних треугольниках ASB и DCS
- KL||BC, KB=LC, тогда □BKLC –равнобокая трапеция с основаниями KL и BC



- KB=LC-высоты, тогда $KB=LC=2\sqrt{3}$

- AD$\perp$(NKM)
  AD||BC

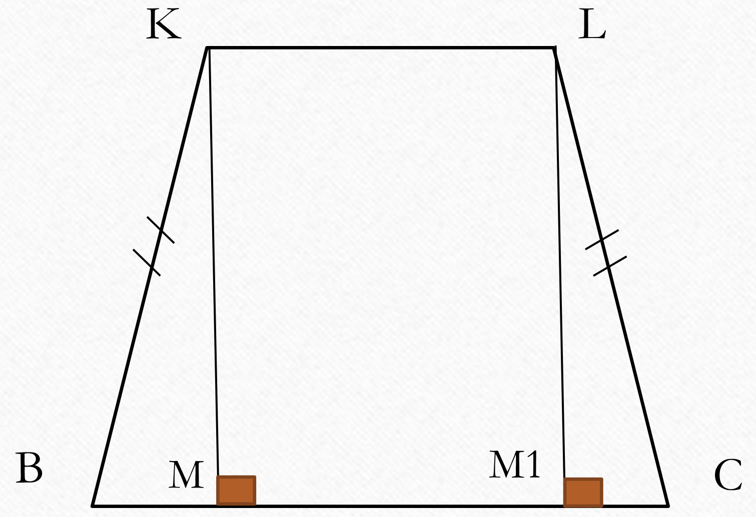
  =>BC $\perp$(NKM) по теореме, тогда KM $\perp$BC по определению и KM-высота □BKLC

- $KL=MM_1=2$

- $\Delta BKM=\Delta LCM_1$по гипотенузе и катету,

$BM=CM_1=(BC-MM1)/2=1$

- ΔBKM: $\angle BMK=90^\circ$, по т. Пифагора $KM=\sqrt{BK^2-BM^2}=\sqrt{11}$



- ΔASD-равносторонний=> $\angle$SAD=60º

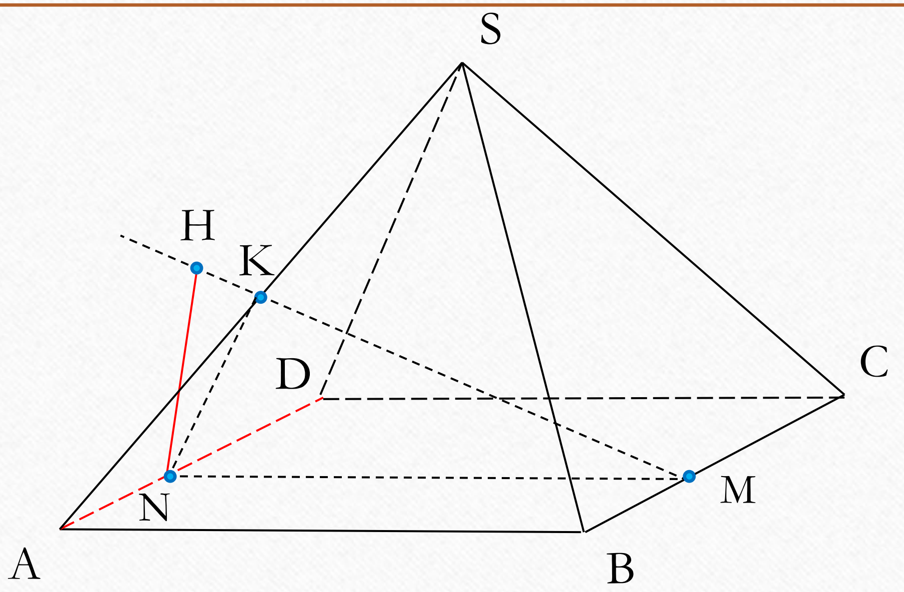
ΔAKN: $\angle$KNA=90º, sin60º=KN/AK

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{KN}{2} \Rightarrow KN = \sqrt{3}$$

- ΔKNM, по теореме косинусов:

$$3 = 16 + 11 - 8 * \sqrt{11} \cos NMK$$

$$\cos NMK = \frac{3}{\sqrt{11}}, \sin NMK = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$$

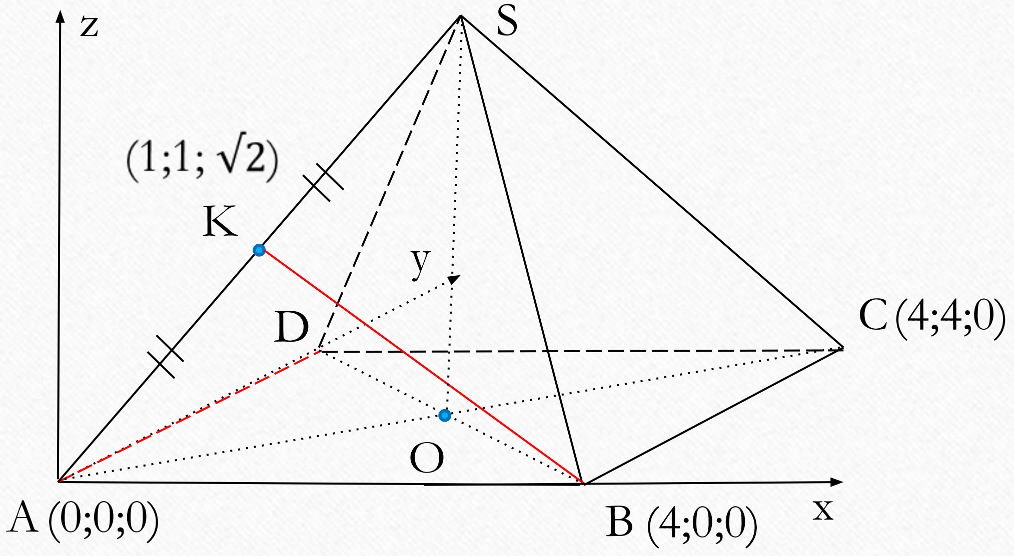


- ΔNHM, $\angle$NHM=90º, sinNMK=NH/NM

NM=AB=4

$$NH = \frac{4 * \sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{4 * \sqrt{22}}{11}$$

$$\textit{Ответ}: \frac{4 * \sqrt{22}}{11}$$



Дано: четырехугольная правильная пирамида SABD, длина каждого ребра равна 4, т. К-середина AS.
Найти: расстояние h между AD и BK.

Метод координат

Решение:

- Поместим пирамиду в систему координат

- т.О-проекция т.S на (ABC), т.О-точка пересечения диагоналей □ABCD

- Уравнение плоскости (BKC): ax+by+cz+d=0

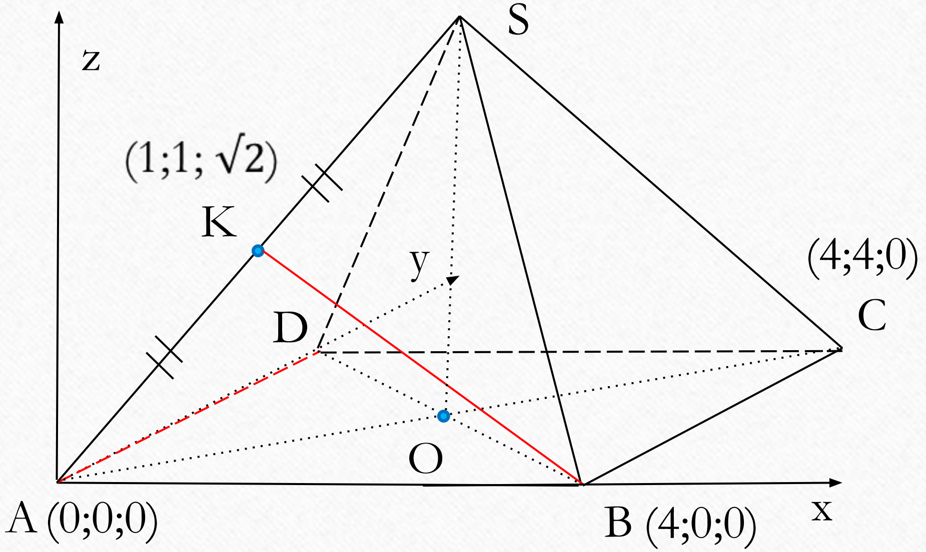
$$\begin{cases} 4a+d=0 \\ 4a+4b+d=0; \\ a+b+\sqrt{2}c+d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} d=-4a \\ b=0; \\ a-4a+\sqrt{2}c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} d=-4a \\ b=0; \\ c=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$ax+0b+\frac{3a\sqrt{2}}{2}z-4a=0$$

$$2x+3\sqrt{2}z-8=0$$

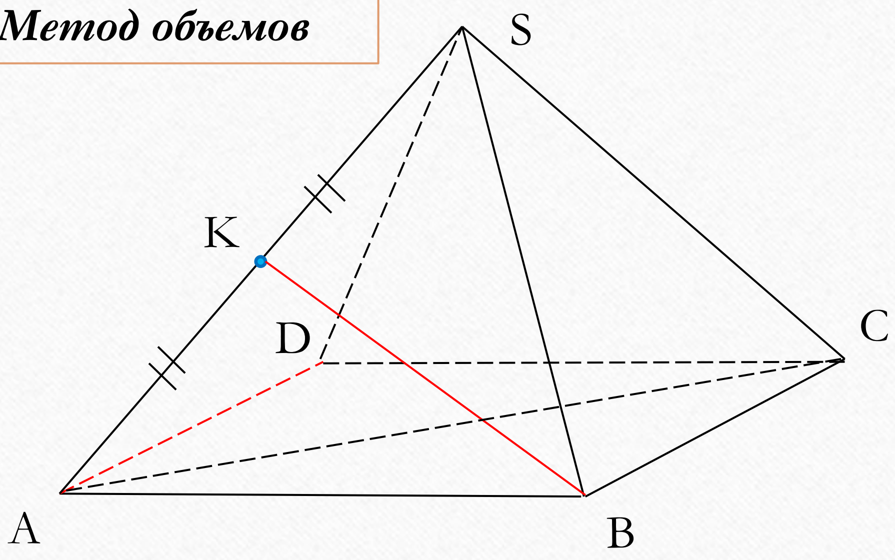
- $h=\dfrac{|-8|}{\sqrt{4+18}}=\dfrac{4\sqrt{22}}{11}$

$$\textit{Ответ}: \frac{4\sqrt{22}}{11}$$



$$\boxed{p(M,\alpha)=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

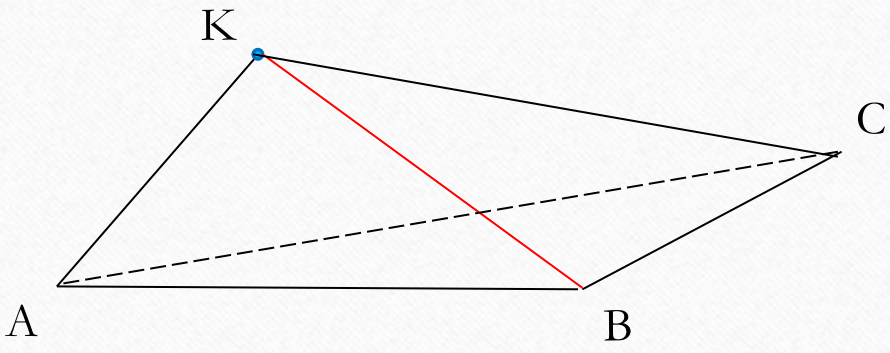
Метод объемов



Дано: четырехугольная правильная пирамида SABD, длина каждого ребра равна 4, т. К-середина AS.
Найти: расстояние h между AD и BK.

Решение:

- h-расстояние от т. А до (KBC), т.е. высота пирамиды АВСK, проведенная из вершины А.



- $V_{ABCK}=\frac{1}{3}*S_{KBC}*h=\frac{1}{3}*S_{ABC}*h1$

- ΔKMC: $\angle$KMC=90º, по т. Пифагора КС=$\sqrt{KM^2+MC^2}$ =$\sqrt{11+(4-1)^2}$=$2\sqrt{5}$
- ΔKBC, по теореме косинусов KC^2=KB^2+BC^2-2*KB*BC*cosKBC

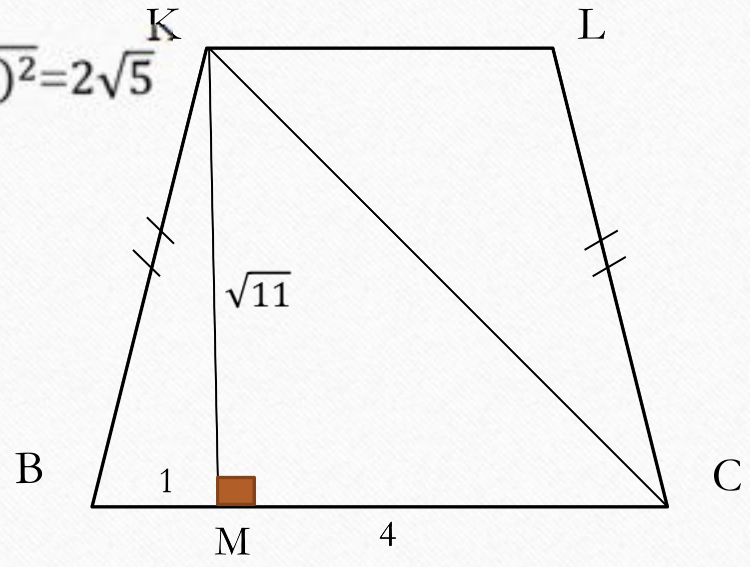
20=16+12-2*4*2*$\sqrt{3}$*cosKBC

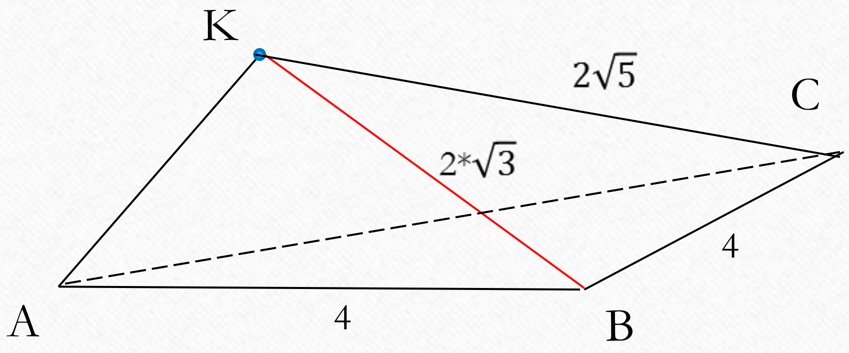
cosKBC=$\frac{\sqrt{3}}{6}$, тогда sinKBC=$\frac{\sqrt{33}}{6}$

- S_{KBC}=sinKBC*B*KB/2=$\frac{\sqrt{33}}{6}$*4*2*$\sqrt{3}$/2=2*$\sqrt{11}$
- ΔABC: $\angle$ABC=90º, S_{ABC}=4*4/2=8
- h1=$\sqrt{2}$ из прошлых способов, тогда
- S_{KBC}*h=S_{ABC}*h1

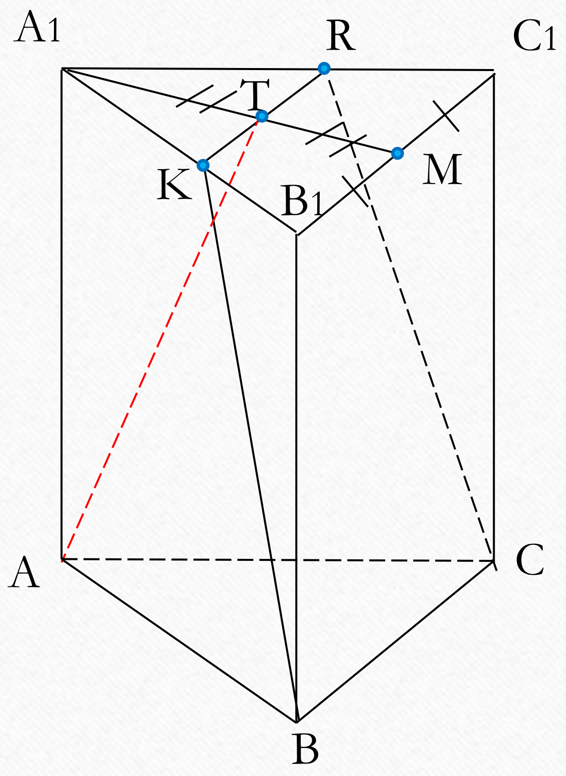
h=$\frac{8*\sqrt{2}}{2*\sqrt{11}}$=$\frac{4*\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$=$\frac{4\sqrt{22}}{11}$

Ответ:$\frac{4\sqrt{22}}{11}$





Угол между прямой и плоскостью



Дано: В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны ребра: $AB=3\sqrt{3}$, $BB_1=6$. M-середина B_1C_1, T-середина A_1M.
Найти: угол между (BCT) и AT.

Традиционный способ

Решение:

- $\left.\begin{array}{l} BC \| B_1C_1 \\ B_1C_1 \subset (A_1B_1C_1) \end{array}\right| \Rightarrow BC \| (A_1B_1C_1)$ при признаку параллельности прямой и плоскости
- $\left.\begin{array}{l} BC \| (A_1B_1C_1) \\ (A_1B_1C_1) \cap (ABC)=KR \end{array}\right| \Rightarrow KR \| BC$, тогда $KR \| BC \| B_1C_1$

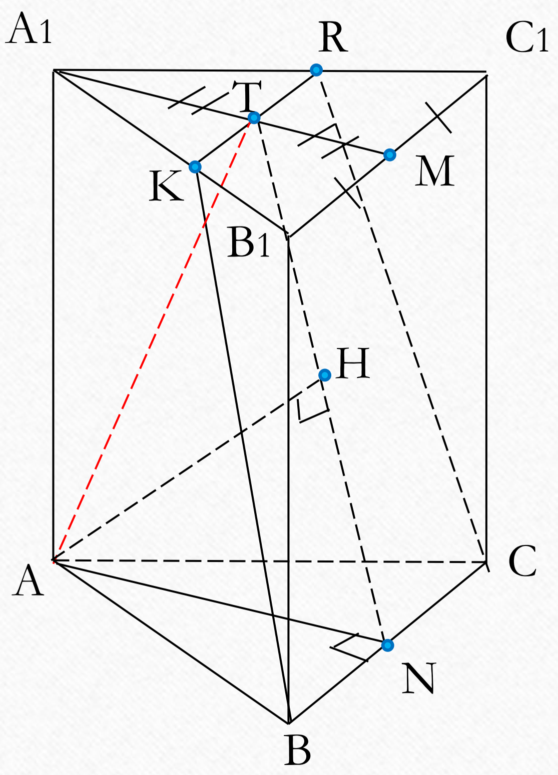
Диагностические работы 2017 года

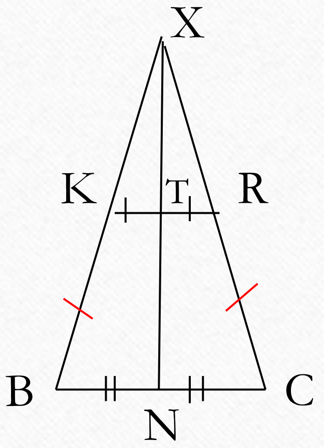
- Доп. построение $AN \perp BC$, $AH \perp TN$

- $KR || B_1C_1$, $A_1T = TM$ | => $A_1K = KB_1 = A_1R = RC_1$ т.к. $A_1B_1 = A_1C_1$ по теореме Фалеса.

- $KB_1 = RC_1$, $BB_1 = CC_1$, $\angle BB_1K = \angle RC_1C = 90°$ => $\Delta KB_1B = \Delta RC_1C$ по двум катетам, тогда $BK = RC$

- $A_1M \perp B_1C_1$ => $A_1T \perp KR$, тогда $\Delta A_1TK = \Delta A_1RT$ по катету и гипотенузе=> $KT = TR$





- $TN \perp BC$, $BC \perp AN$ | => $BC \perp (ANT)$ по признаку, тогда $BC \perp AH$ по определению

- $BC \perp AH$, $AH \perp TN$ | => $AH \perp (BCT)$ по признаку, тогда $\angle ATH$- искомый

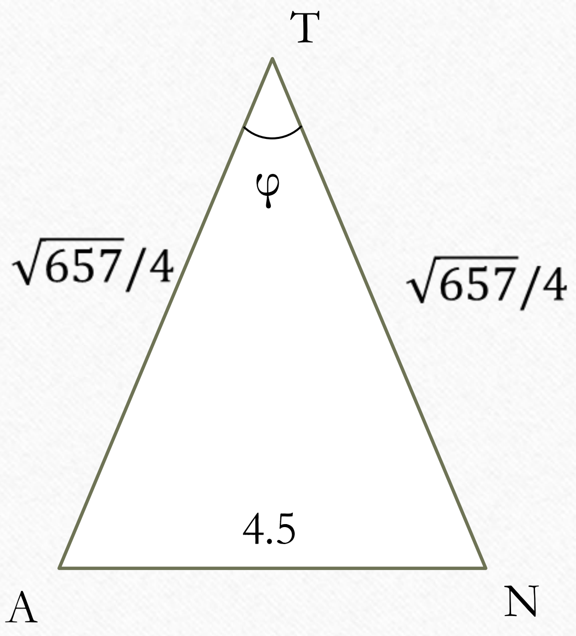
•$A_1M = AN = 3*\sqrt{3}* \sqrt{3}/2 = 4{,}5$

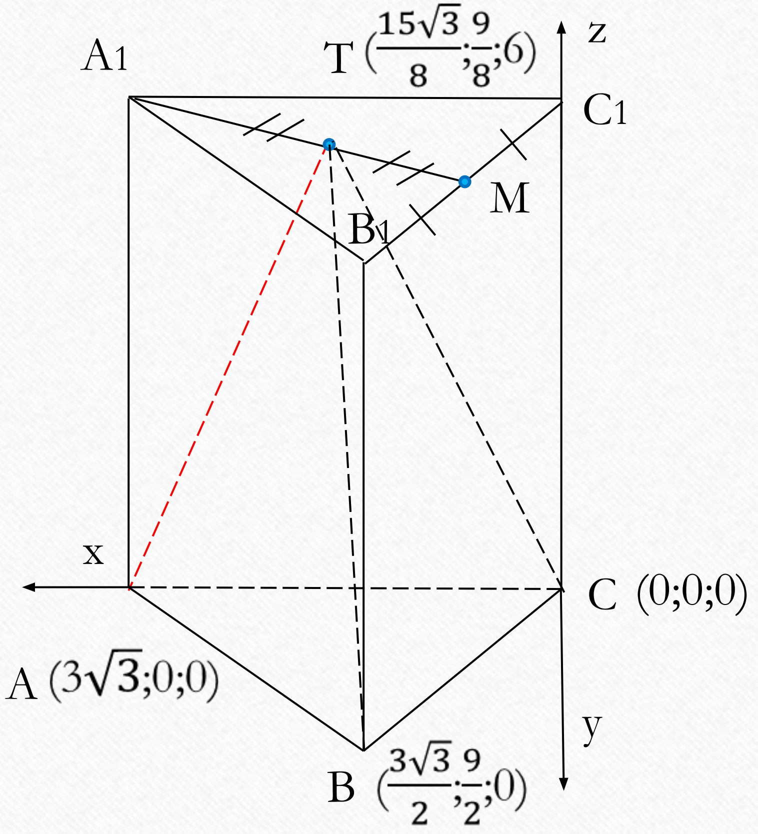
•$AA_1 \perp (A_1B_1C_1)$ => $AA_1 \perp A_1T$ по определению, по т. Пифагора $AT = \sqrt{657/4}$, аналогично $TN = AT = \sqrt{657/4}$

• По т. Косинусов $4{,}5^2 = \frac{657}{16} + \frac{657}{16} - \frac{657\cos\varphi}{8}$

$$\cos\varphi = \frac{55}{73}$$

$$\textit{Ответ}: \arccos(\frac{55}{73})$$





Дано: В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны ребра: $AB=3\sqrt{3}$, $BB_1=6$. M-середина B_1C_1, T-середина A_1M.

Найти: угол между (BCT) и AT.

Векторный способ

$$\sin\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Решение:

- Поместим призму в систему координат

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-9\sqrt{3}}{8} \\ y_1 = \dfrac{9}{8} \\ z_1 = 6 \end{cases}$$

- Составим уравнение плоскости (BTC)

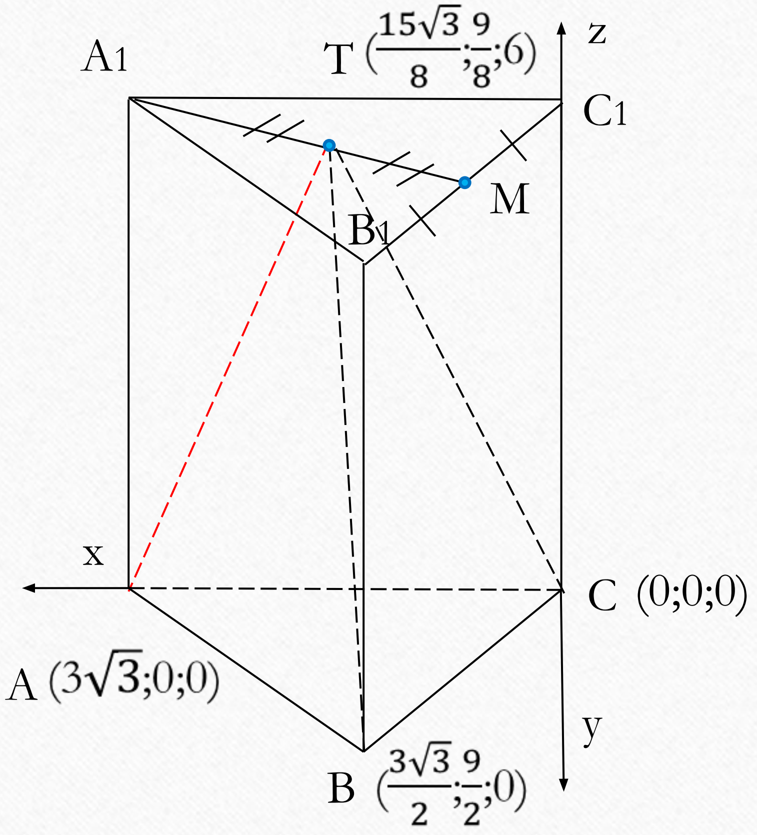
$$\begin{cases} 0a+0b+0c+d=0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}a+\frac{9}{2}b+0c+d=0 \\ \frac{15\sqrt{3}}{8}a+\frac{9}{8}b+6c+d=0 \end{cases}$$

$$ax-\frac{a\sqrt{3}y}{3}-\frac{a\sqrt{3}z}{4}=0$$

Уравнение плоскости (BTC): $12x-4\sqrt{3}y-3\sqrt{3}z=0$

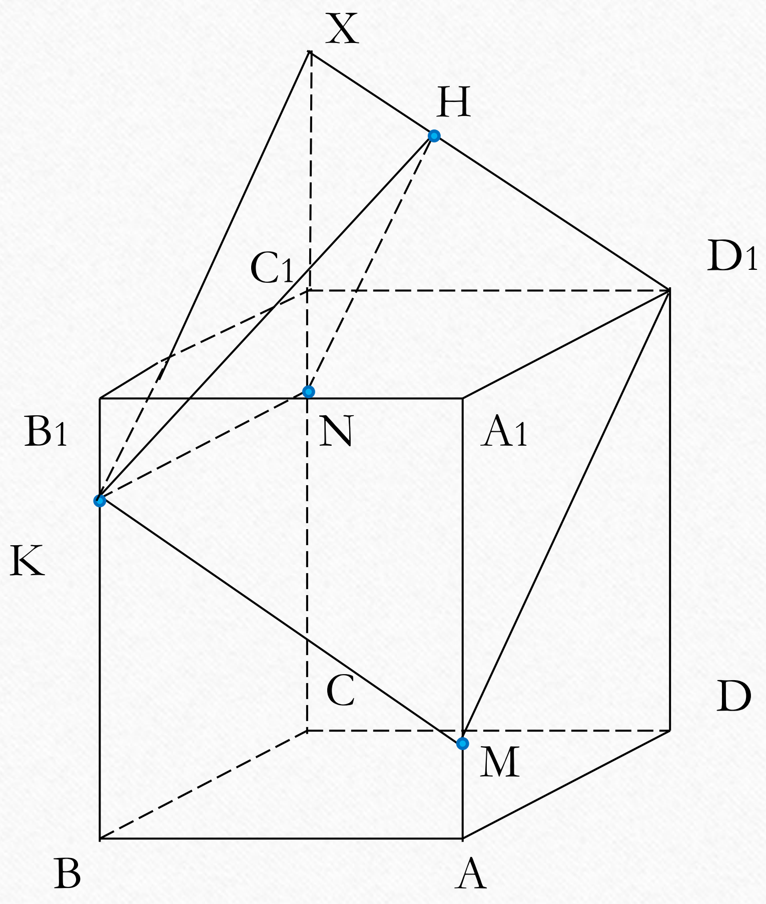
$$\begin{cases} x_1=\frac{-9\sqrt{3}}{8} \\ y_1=\frac{9}{8}; \\ z_1=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=12 \\ y_2=-4\sqrt{3}; \\ z_2=-3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$sin\varphi=\frac{\left|\frac{9\sqrt{3}}{8}*12+\frac{9}{8}*4\sqrt{3}\;+6*3\sqrt{3}\right|}{\sqrt{(\frac{9\sqrt{3}}{8})^2+(\frac{9}{8})^2+6^2}*\sqrt{12^2+(4\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2}}$$



Ответ : $\arcsin(\frac{48}{73})$

Угол между плоскостями



Дано: правильная четырехугольная призма со стороной основания 4 и высотой 7. На AA_1 взята точка M так, что AM=2. На BB_1 взята точка так, что $B_1K=2$.

Найти: угол между (D_1MK) и (CC_1D_1).

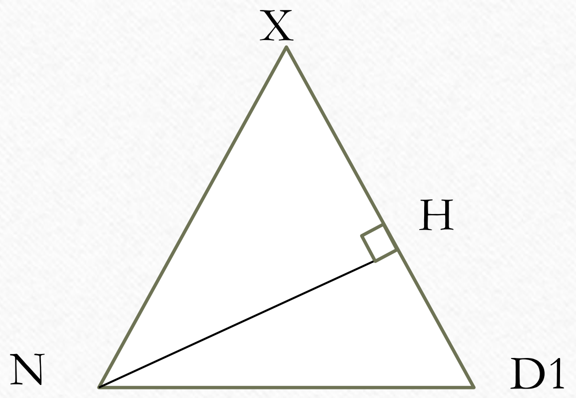
Традиционный способ

Решение:

- $(ABB_1) \cap (D_1MK) = KM$
  $(D_1MK) \cap (CC_1D_1) = XD_1$
  $(ABB_1) \| (CC_1D_1)$
  $\Rightarrow KM \| XD_1$ по св-ву параллельных плоскостей
- Аналогично $KX \| MD_1$, тогда $\square XKMD_1$-параллелограмм по определению, $KM=XD_1$, $KX=MD_1$
- Доп. построение $KH \perp XD_1$, $KN \| B1C1$, $B1C1 \perp (CC_1D_1)$, тогда $KN \perp (CC_1D_1) \Rightarrow NH$-проекция KH на (CC_1D_1),
- По теореме о трех перпендикулярах $NH \perp XD_1$, тогда $\angle KHN$-искомый

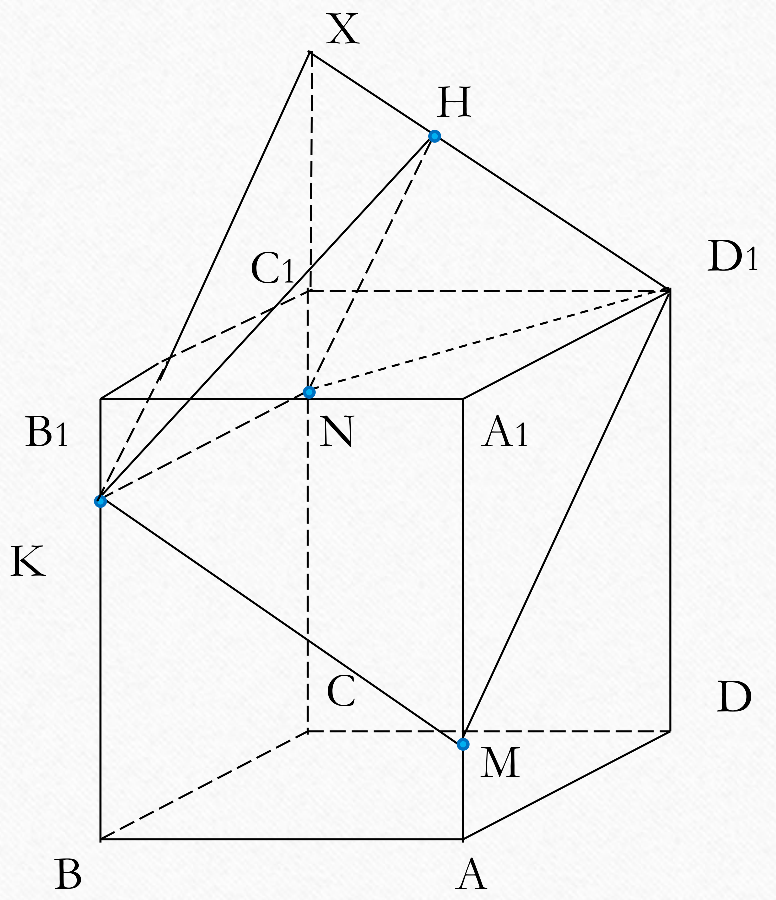
Диагностические работы 2017 года

- $KN=B_1C_1=4$
- $KX=MD_1=\sqrt{41}$ (находится через т. Пифагора)
- ΔXNK, $\angle XNK=90^\circ$, по т.Пифагора $XN=5$, тогда $XC_1=3$
- ΔXC_1D_1, $\angle XC_1D_1=90^\circ$, по т.Пифагора$XD_1=5$
- $\Delta NC1D1$, $\angle NC_1D_1=90^\circ$, по т.Пифагора$ND1=2\sqrt{5}$

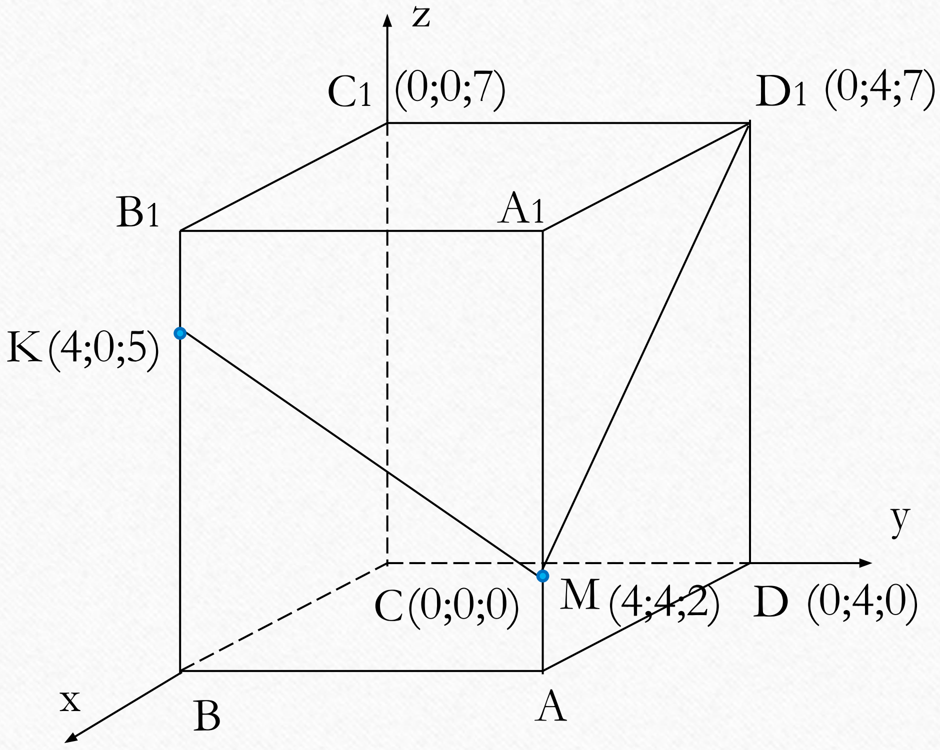


- ΔXND_1, по т. косинусов $\cos ND_1X = \frac{\sqrt{5}}{5}$

  тогда $\sin ND_1X = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
- $\Delta HND_1, \angle NHD_1=90^\circ, NH=2\sqrt{5} * \frac{2\sqrt{5}}{5} =4$
- $\left.\begin{matrix} KN\perp(CC_1D_1) \\ NH\subset(CC_1D_1)\end{matrix}\right|$ => $\angle KNH=90^\circ$ по определению



- ΔKNH, $\angle KNH=90^\circ$, $NK=NH=4$, тогда $\angle KHN=45^\circ$
- Ответ: $\angle KHN=45^\circ$



Дано: правильная четырехугольная призма со стороной основания 4 и высотой 7. На AA_1 взята точка M так, что AM=2. На BB_1 взята точка так, что B_1K=2.

Найти: угол между (D_1MK) и (CC_1D_1).

Векторный способ

Решение:

- Поместим призму в систему координат
- Плоскость (CC_1D_1):

$$\begin{cases} 7c+d=0 \\ d=0; \\ 4b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=k \\ y_1=0; \\ z_1=0 \end{cases}$$

Плоскость (KMD_1)

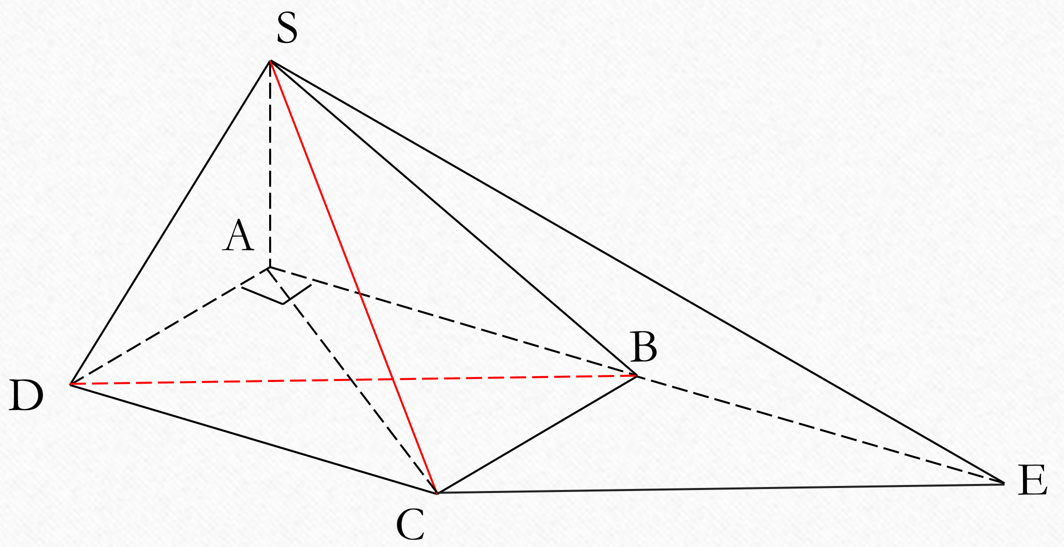
$$\begin{cases} 4a+5c+d=0 \\ 4a+4b+2c+d=0 \\ 4b+7c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=5 \\ y_2=3; \\ z_2=4 \end{cases}$$

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$cos\varphi = \frac{|k * 5|}{\sqrt{k^2} * \sqrt{25 + 9 + 16}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: 45º

Угол между скрещивающимися прямыми



Дано: В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{21}, SB = \sqrt{85}, SD = \sqrt{57}$

Найти: угол между SC и BD.

Традиционный способ

- ΔSAD, $SA^2 + DA^2 = DS^2$, тогда $SA \perp AD$
- ΔSAB, $SA^2 + BA^2 = BS^2$, тогда $SA \perp AB$

=> $SA \perp (ABC)$ по признаку

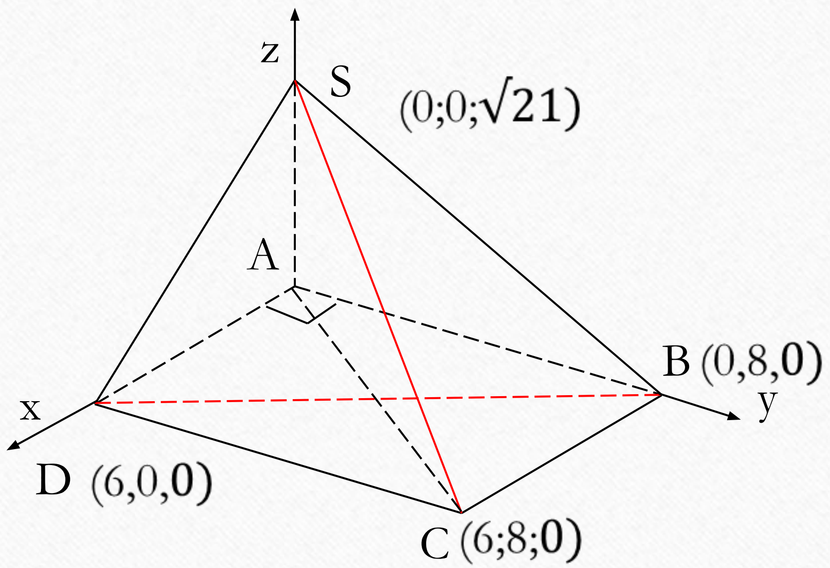
- Доп. Построение $CE || BD$, тогда $\angle SCE$-искомый
- $SA \perp (ABC)$, тогда $SA \perp AC$, $SA \perp AE$
- □BDCE-параллелограмм по определению, тогда BE=CD=8, BD=CE=10
- ΔSAC, $SA \perp AC$, по т.Пифагора SC=11
- ΔSAE, $SA \perp AE$, по т.Пифагора $SE=\sqrt{277}$
- ΔSCE, по т. косинусов $\cos SCE = \frac{14}{55}$

Ответ : $\arccos(\frac{14}{55})$

Дано: В основании четырёхугольной пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{21}, SB = \sqrt{85}, SD = \sqrt{57}$

Найти: угол между SC и BD.

Векторный способ



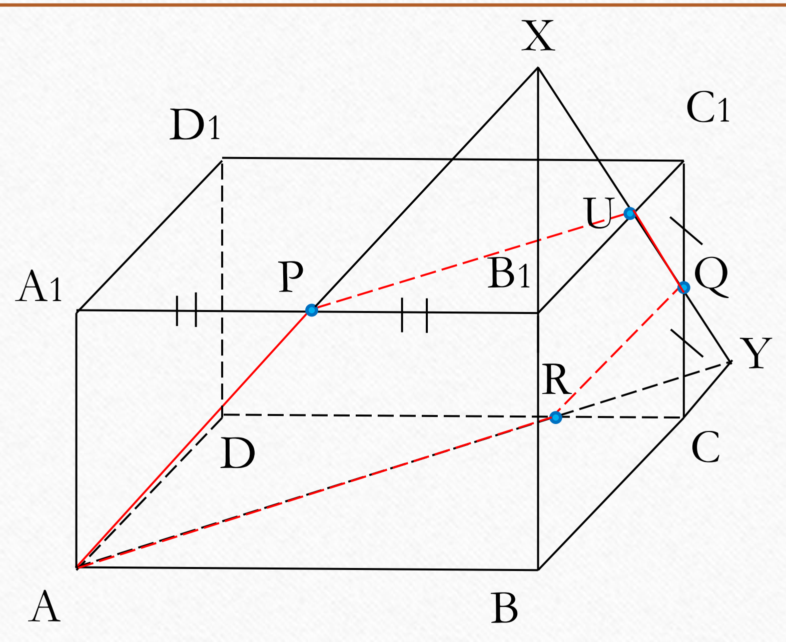
$$\cos\varphi = \frac{|\,x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\,|}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}\sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2}}}$$

- Поместим пирамиду в систему координат
- $\begin{cases} x_1=-6 \\ y_1=-8; \\ z_1=\sqrt{21} \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=6 \\ y_2=-8; \\ z_2=0 \end{cases}$

$$cos\varphi = \frac{|-6*6+8*8+\sqrt{21}\;*0|}{\sqrt{36+64+21}*\sqrt{36+64}} = \frac{28}{11*10} = \frac{14}{55}$$

Ответ : $\arccos(\frac{14}{55})$

Сечения многогранников



Дано: в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=4$, $BC=3$, $AA_1=2$. Точки P и Q- середины A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость (APQ) пересекает B_1C_1 в точке U.
Найти: площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью (APQ).

Традиционный способ

Решение:

- Построим сечение плоскостью (APQ)
- $\Delta XAB \sim \Delta XPB_1$ (по первому признаку подобия)=> $\frac{PB_1}{AB}=\frac{XB_1}{XB}=\frac{PX}{AX}=\frac{1}{2}$
- Аналогично $\frac{B_1U}{BY}=\frac{XU}{XY}=\frac{1}{2}=\frac{3-UC_1}{3+CY}$
- $\Delta UC_1Q=\Delta QYC$(по стороне и двум прилежащим к ней углам)=>$CY=UC_1$, тогда $3+CY=6-2CY$

$CY=1$

•$\Delta YCR \sim \Delta YBA$ (по первому признаку подобия)=> $\frac{RC}{AB}=\frac{1}{4}, RC=1$

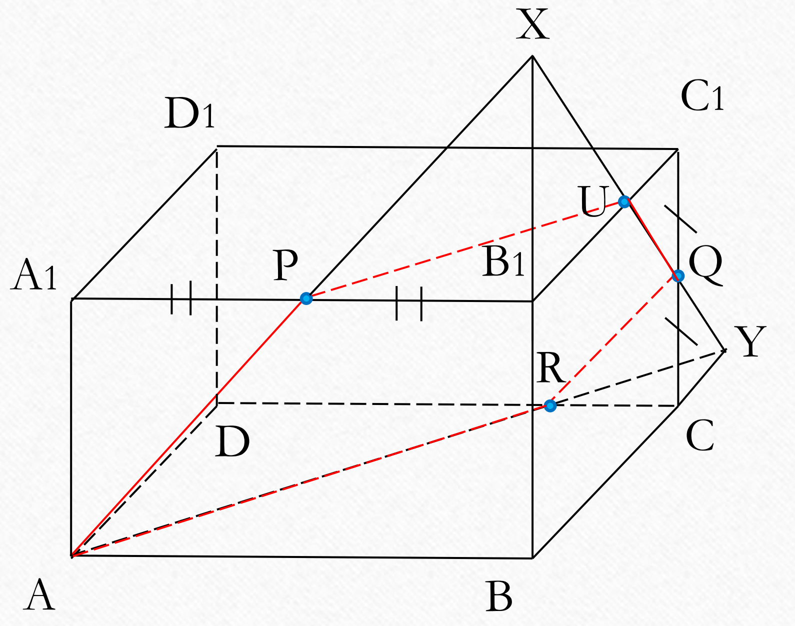
Задания 14 ЕГЭ 2016

•$\Delta CQY, \angle QCY=90^\circ$, по т.Пифагора $YQ=\sqrt{2}$

•Аналогично $RQ=RY=\sqrt{2}$

• $S_{RQY}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

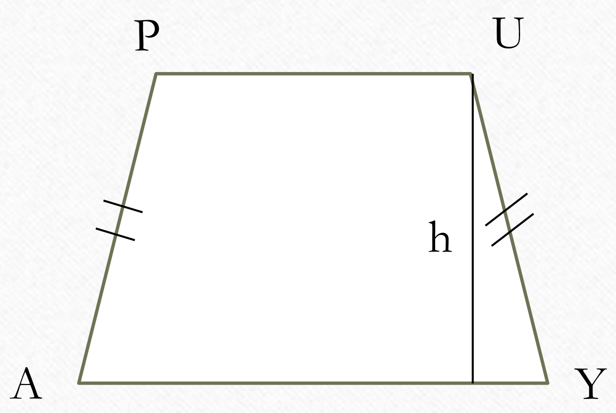
• $\Delta XPU \sim \Delta XAY$ (по второму признаку подобия), тогда $PU \parallel AY$,
□APUY-трапеция



•$\Delta ABY, \angle ABY=90^\circ$, по т.Пифагора $AY=4\sqrt{2}$

•ΔPB_1U, $\angle PB_1U=90^\circ$, по т.Пифагора $PU=2\sqrt{2}$

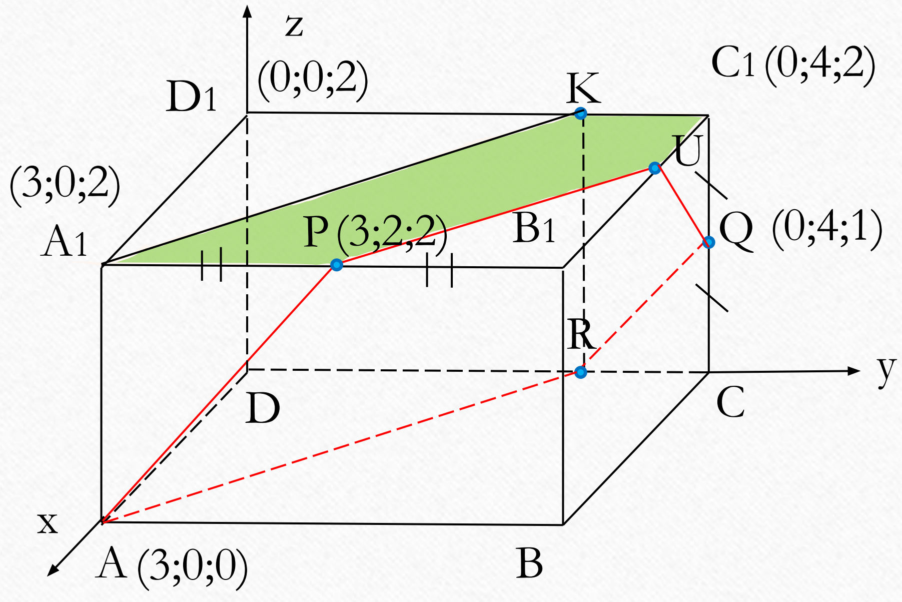
•$QY=UQ=\sqrt{2} \Rightarrow UY=AP=2\sqrt{2}$



•$h=\sqrt{AP^2-(AY-PU)^2/4}=\sqrt{8-8/4}=\sqrt{6}$

•$S_{APUY}=\sqrt{6}*3\sqrt{2}=6\sqrt{3}$

•$S_{APUQR}=S_{APUY}-S_{RQY}=$ $6\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{11\sqrt{3}}{2}$. Ответ: $\frac{11\sqrt{3}}{2}$.



Дано: в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=4$, $BC=3$, $AA_1=2$. Точки P и Q- середины A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость (APQ) пересекает B_1C_1 в точке U.

Найти: площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью (APQ).

Способ ортогональной проекции

$$S = \frac{S'}{\cos\varphi}$$

Решение:

- A_1KC_1UP-проекция ARQUP на $(A_1B_1C_1)$;
- Поместим параллелепипед в систему координат
- Плоскость (APQ):

$$\begin{cases} 3a+d=0 \\ 3a+2b+2c+d=0; \\ 4b+c+d=0 \end{cases}$$

Уравнение плоскости: $x+y-z-3=0$;

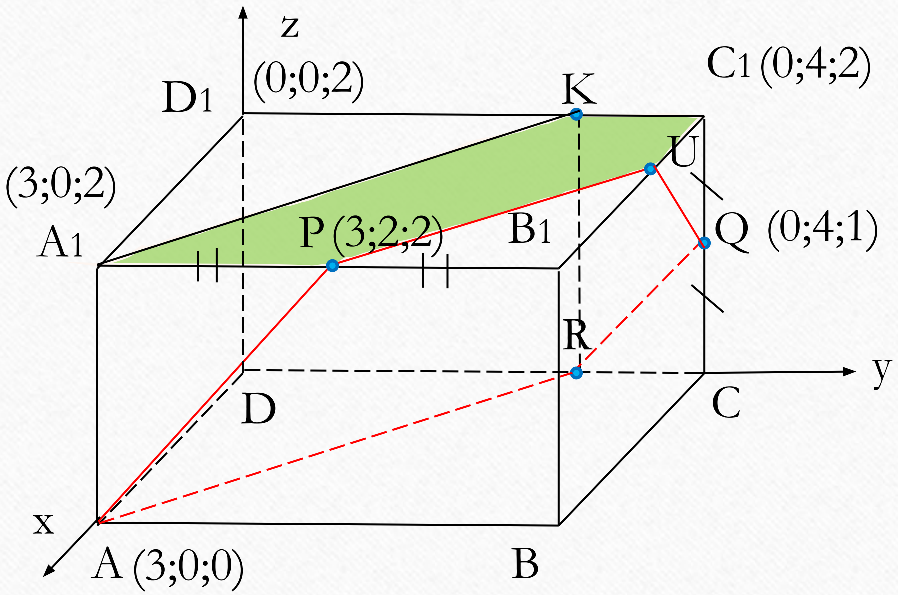
Плоскость $(A_1B_1C_1)$:

$$\begin{cases} 2c+d=0 \\ 3a+2c+d=0; \\ 4b+2c+d=0 \end{cases}$$

Уравнение плоскости: $z-2=0$;

$$\begin{cases} x1=1 \\ y1=1 \\ z1=-1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x2=0 \\ y2=0; \\ z2=1 \end{cases}$$

$$cos\varphi = \frac{|1*0+1*0-1*1|}{\sqrt{1+1+1}*\sqrt{0+0+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

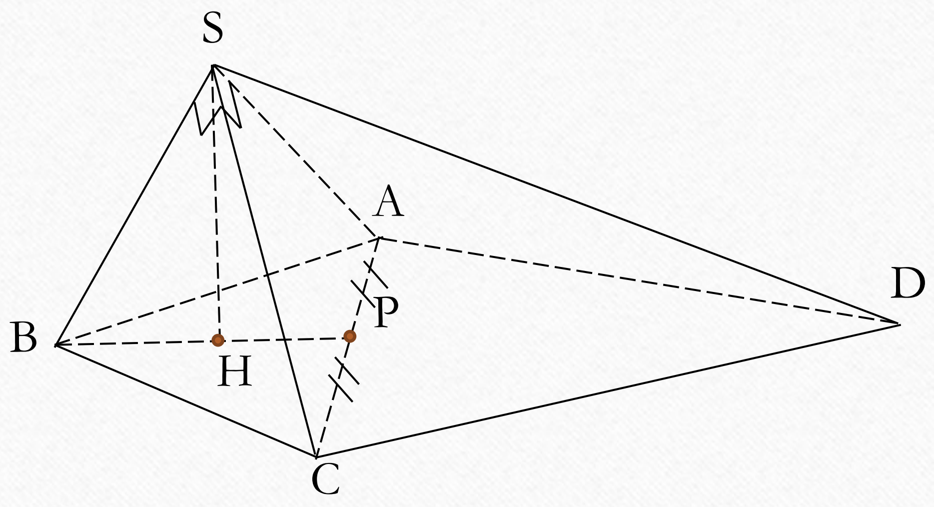


- S’=SA1B1C1D1-SA1D1K-SPB1U=3*4-3*3/2-2*2/2=12-2-4,5=11/2

- $S=\frac{S'}{cos\varphi}=\frac{11\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{11\sqrt{3}}{2}$

Объем многогранников



Дано: В четырехугольной пирамиде SABCD (четырехугольник в основании выпуклый) боковые ребра SA, SB и SC попарно перпендикулярны и имеют длину 3. Длина SD равна 9.

Найти: наибольшее возможное при этих условиях значение объема пирамиды SABCD.

Решение:

- Разобьем пирамиду на два тетраэдра
- По т. Пифагора AB=BC=AC= $3\sqrt{2}$, тогда ΔABC-правильный
- т. S равноудалена от вершин основания, значит высота пирамиды SH проходит через центр описанной окружности около ΔABC
- Значение объема SABCD максимально при наибольших SH, S_{ABC}, S_{ACD}, но SH и S_{ABC} -постоянные величины=> нам надо найти наибольшую S_{ACD}
- BH= $\dfrac{AB*AC*BC}{4S} = \dfrac{3*3*3*\sqrt{2}*\sqrt{2}*\sqrt{2}}{4*\dfrac{9\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6}$

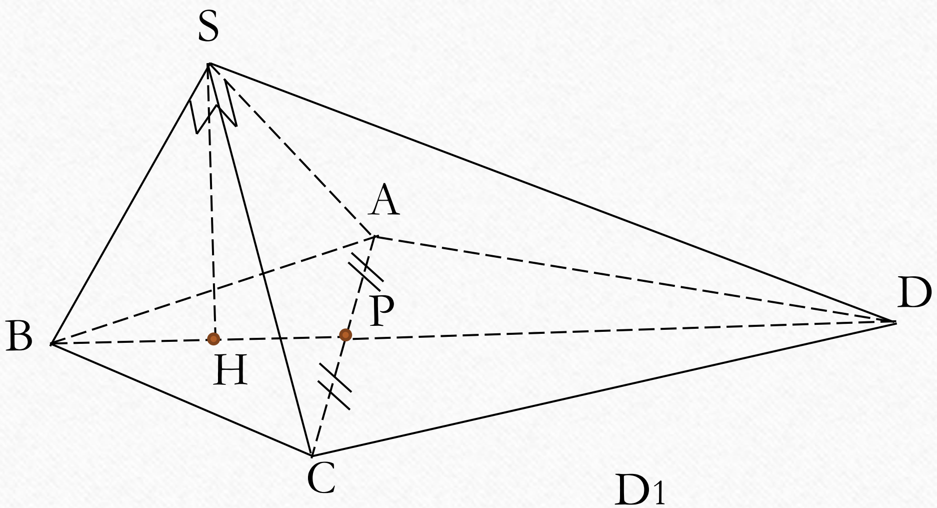
Тренировочный вариант 2017

•ΔSHB, по т. Пифагора SH= $\sqrt{9-6} = \sqrt{3}$

•SD=9, тогда в ΔSHD по т. Пифагора HD=√78

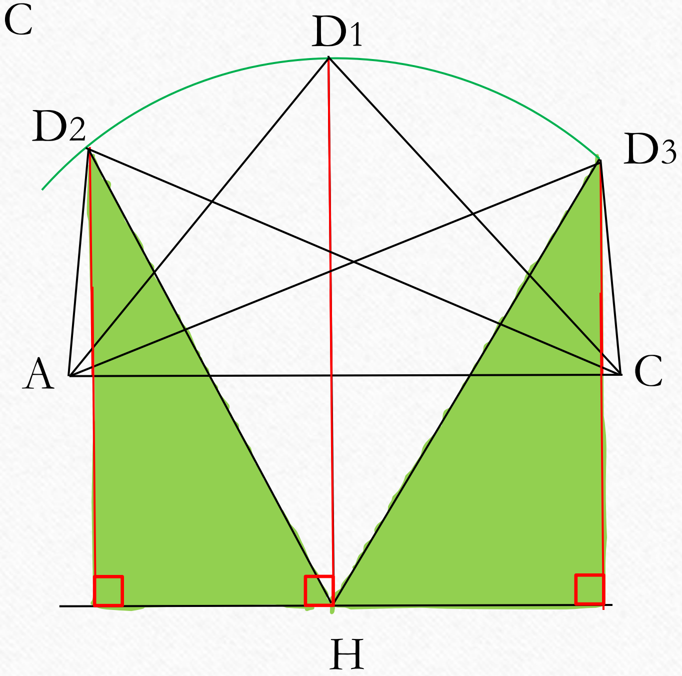
•S_{ACD} наибольшая, когда его высота –DH

•DH⊥AC, BH⊥AC, через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной, тогда B,H,P,D лежат на одной прямой



•S_{ABCD}= $\frac{1}{2} * AC * BP + \frac{1}{2} * AC * DP = \frac{1}{2} * AC * (BH + HD) =$

$$= \frac{1}{2} * 3\sqrt{2} * (\sqrt{6} + \sqrt{78}) = 3\sqrt{3}(\sqrt{13} + 1)$$



•V_{SABCD}= $\frac{1}{3} * \sqrt{3} * 3\sqrt{3}(\sqrt{13} + 1) = 3(\sqrt{13} + 1)$

Ответ : $3(\sqrt{13} + 1)$


СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!