Лекция 7. Механические волны

1. Виды механических волн
2. Упругие волны в стержнях
3. Волновое уравнение
4. Плоская гармоническая волна
5. Сферические волны
6. Объемная плотность энергии волны
7. Вектор Умова
8. Когерентные волны
9. Интерференция волн
10. Стоячая волна.

Кто много говорит, тот мало думает

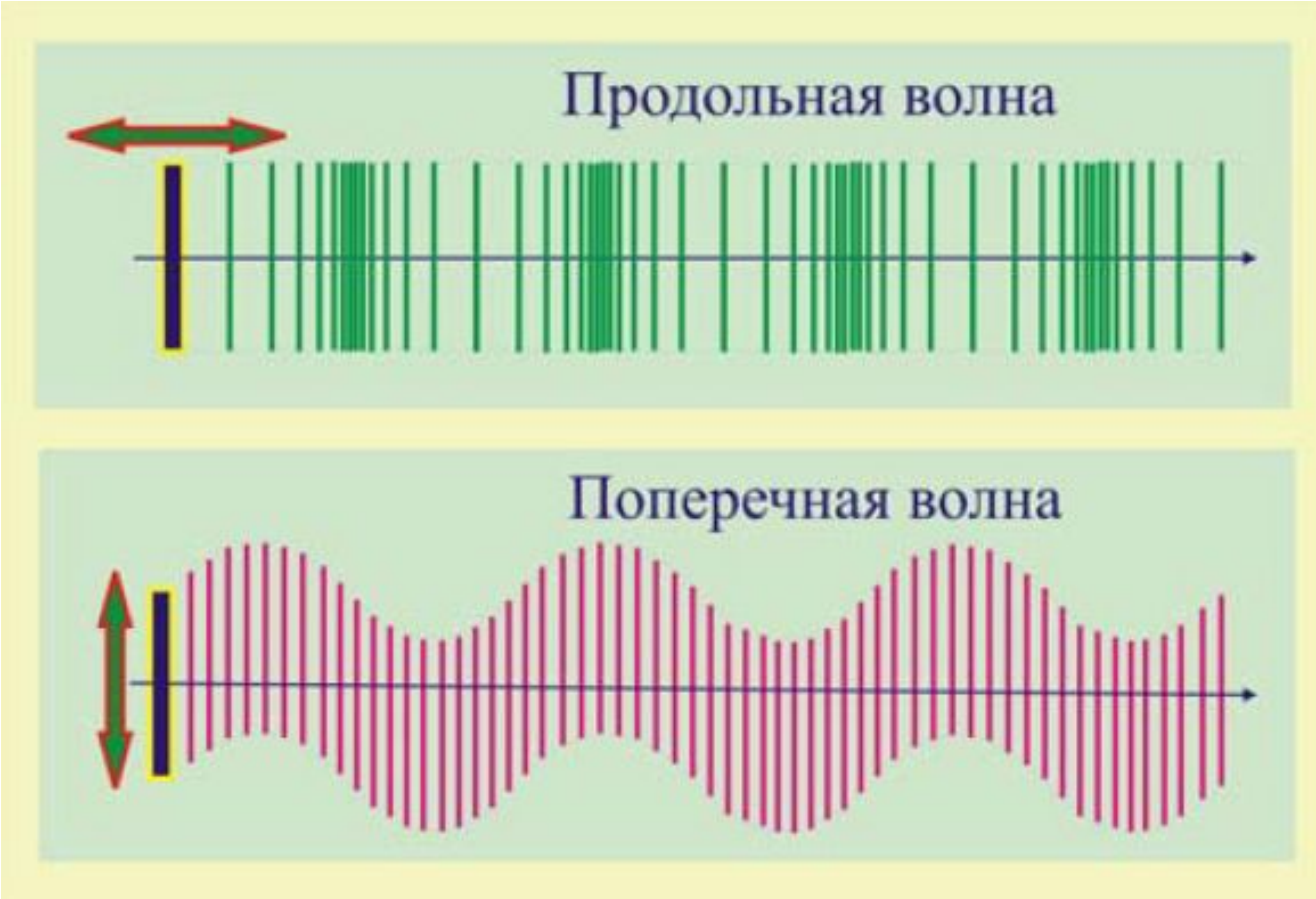
Досен

Когда человек говорит – он не думает, а когда думает не говорит

Очевидная истина

Виды механических волн

- Бегущие
- Стоячие
- Продольные
- Поперечные
- Плоские
- Сферические
- Цилиндрические
- Линейные
- Нелинейные


Продольная волна
Поперечная волна

Упругость – свойство тел и сред восстанавливать свою форму и объем (Т) или только объем (Ж и Г) после прекращения действия внешних сил или других воздействий

Механическая волна – процесс распространения механических колебаний (возмущений) в упругой среде

Основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества

Описание волны уравнением первой степени

Рассмотрим для простоты распространение возмущения вдоль длинного натянутого шнура, с которым совместим ось X. Мы можем представить возмущение ξ — смещение элементов шнура из положения равновесия — как функцию координаты x и времени t, т. е. $\xi = f(x,t)$. Легко видеть, что распространение возмущения со скоростью v в положительном направлении оси X изобразится той же функцией f, если в ее аргумент x и t будут входить в виде комбинации $(vt - x)$ или $(t - x/v)$. Действительно, такое строение аргумента показывает, что значение функции f, которое она имела в точке x в момент t, будет в дальнейшем сохраняться, если $vt - x = \text{const}$. Но это так и есть, поскольку именно при этом условии $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v$.

Итак, любая функция от аргумента $(vt - x)$ или $(t - x/v)$ выражает распространение возмущения со скоростью v:

$$\xi(x,t) = f(t - x/v).$$

Это и есть уравнение волны, распространяющейся в положительном направлении оси X. Волна же, распространяющаяся в отрицательном направлении X, описывается уравнением

$$\xi(x,t) = f(t + x/v).$$

Особую роль среди различных волн играет *гармоническая волна*. Во многих отношениях это простейшее волновое движение и его выделенность связана с особыми свойствами гармонических осцилляторов. Уравнение гармонической волны имеет вид

$$\xi(x,t) = a\cos\omega(t - x/v),$$

$$\boxed{\xi(x,t) = a\cos\omega(t - x/v),}$$

где a — амплитуда волны, ω — циклическая (круговая) частота колебаний частиц среды (c^{-1}). Эта волна периодична во времени и пространстве, поскольку сама функция периодична и ее период равен 2π. Из периодичности во времени $\omega\Delta t = 2\pi$ находим $\Delta t = 2\pi/\omega$. Этот промежуток времени называют *периодом колебаний*:

$$T = 2\pi/\omega.$$

Из периодичности в пространстве $\omega\,\Delta x/\upsilon = 2\pi$ находим $\Delta x = 2\pi\,\upsilon/\omega = \upsilon T$. Расстояние Δx называют *длиной волны* λ. Таким образом, длина волны — это расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися с разностью фаз 2π. Другими словами, это расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний T:

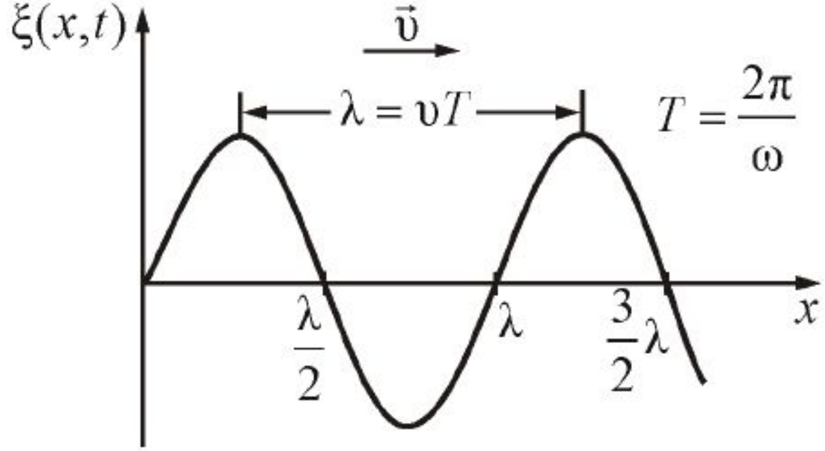
$$\lambda = \upsilon T.$$

$$\xi = a\cos(\omega t - kx).$$

где $k = \omega/v = 2\pi/Tv$, или

$$k = 2\pi/\lambda.$$

Величину k называют *волновым числом*.



Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется *длиной волны* λ:

$$\lambda = \upsilon T,$$

где υ – скорость распространения волны, $T = \frac{1}{\nu}$ – период, ν – частота.

Отсюда скорость распространения волны можно найти по формуле:

$$\upsilon = \lambda\nu.$$

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется ***волновой поверхностью***. Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченную волновым процессом, т.е. волновых поверхностей бесконечное множество.

Граница, отделяющая колеблющиеся частицы от частиц еще не начавших колебаться, называется ***фронтом волны.***

Фронт волны распространяется с фазовой скоростью.

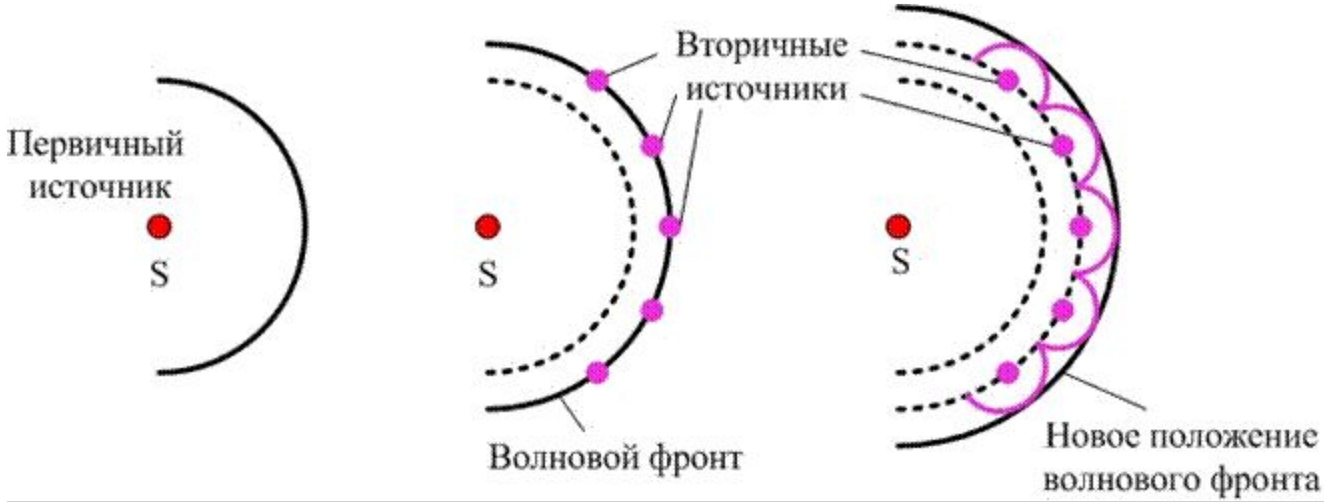
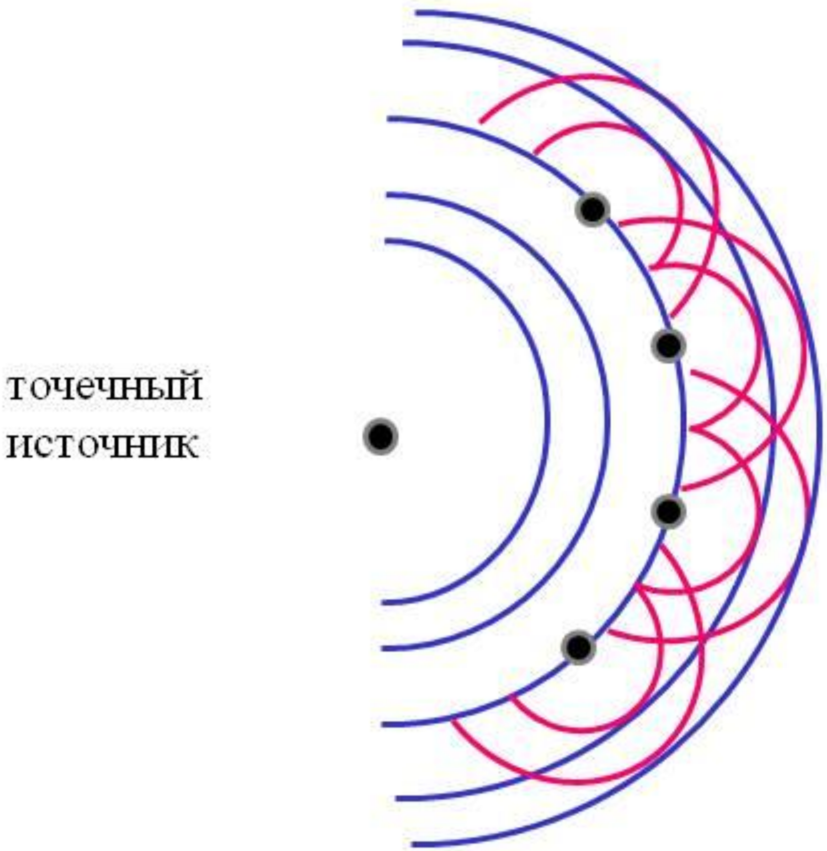


Рис.18.23

Заметим, что в отличие от волнового вектора, фазовая скорость v *не является вектором*: в любом направлении, составляющем угол α с волновым вектором **k**, скорость перемещения данной фазы равна $v/\cos\alpha > v$ (а не $v\cos\alpha$, как должно быть, если бы скорость являлась вектором). Игнорирование этого обстоятельства неизбежно приводит к различного рода недоразумениям.

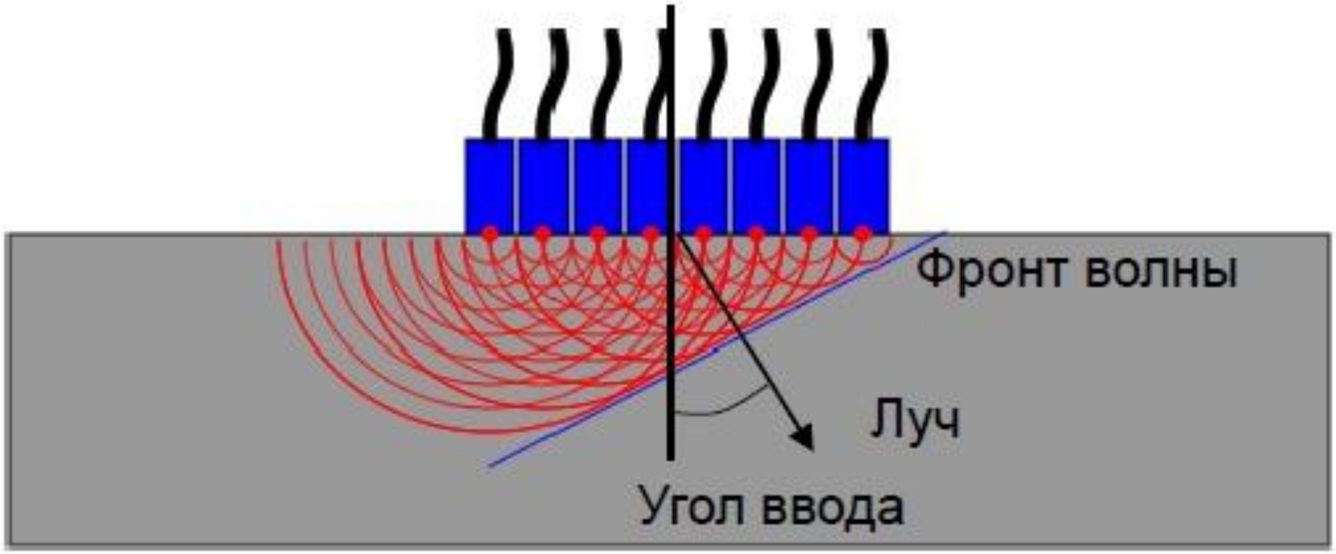
Принцип Гюйгенса

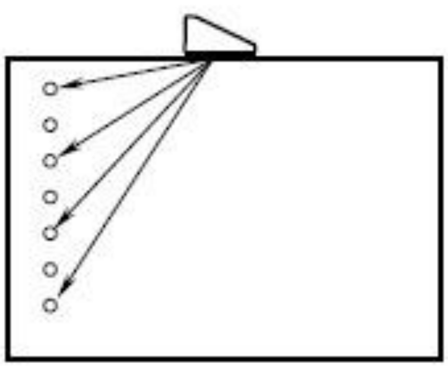
Каждая точка среды, до которой дошла волна, сама становится источником вторичных волн.

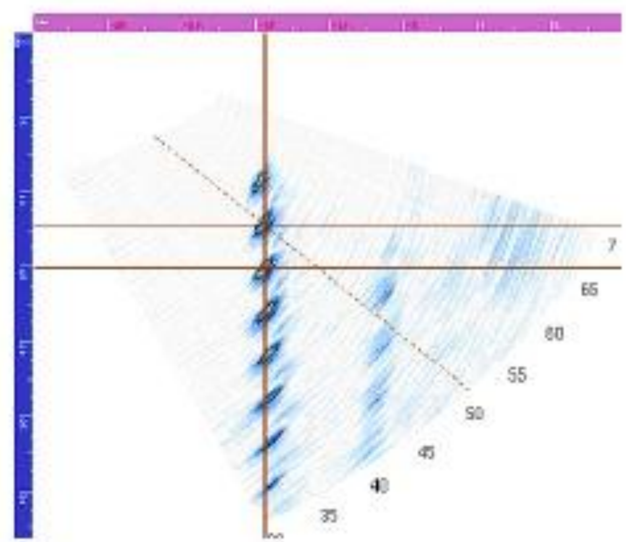


Фронт волны – это огибающая фронтов вторичных волн.

Управление диаграммой излучения

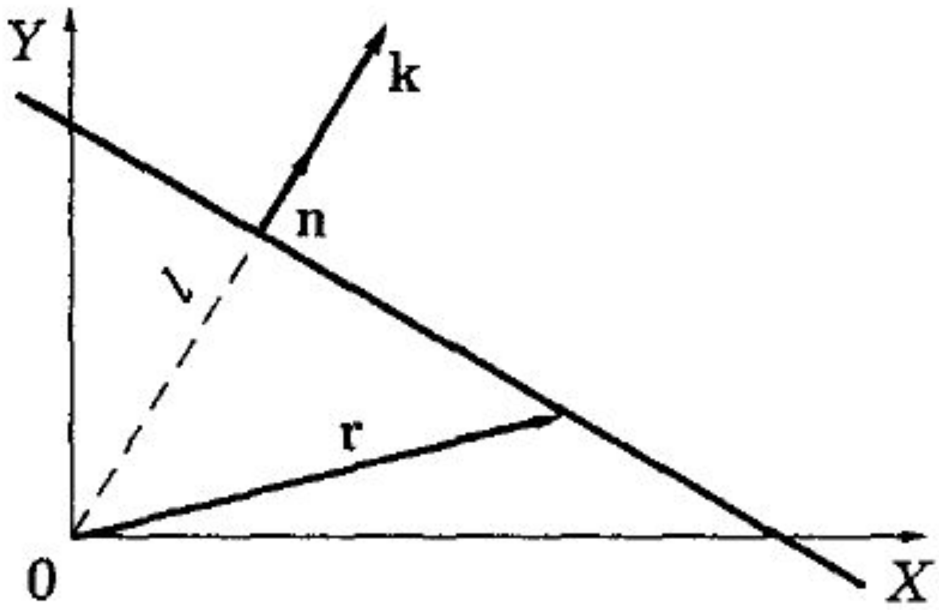






Плоская волна

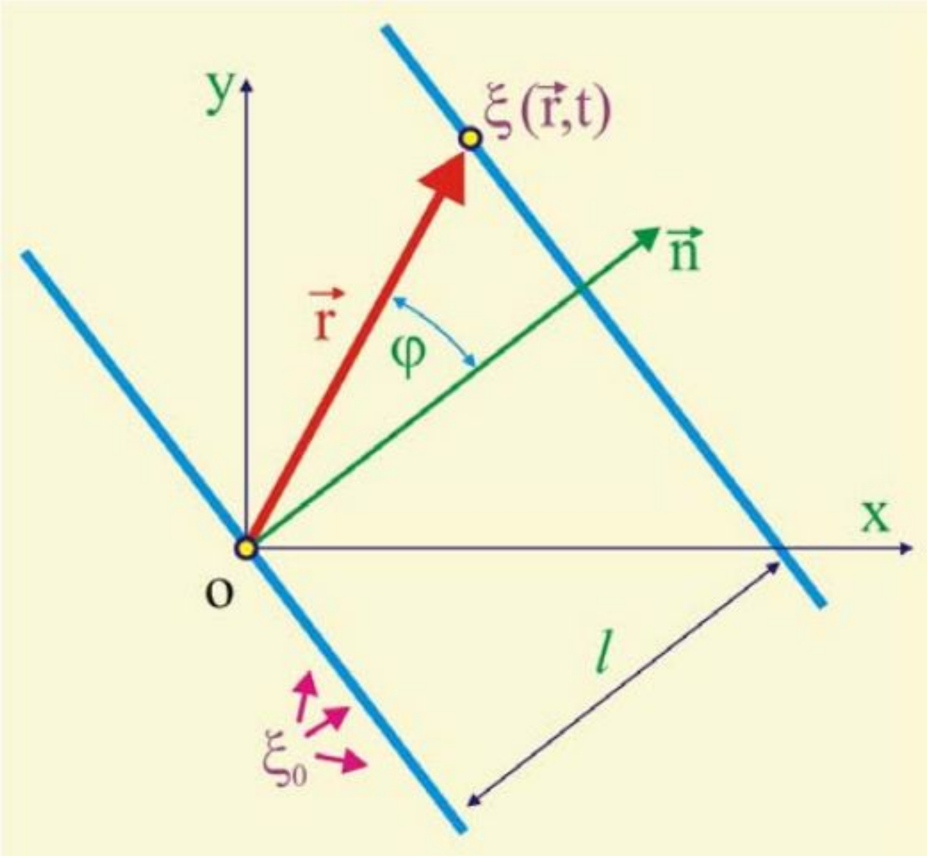
Не срисовывать



k — *волновой вектор*:

$$\boxed{\mathbf{k} = (\omega/v)\mathbf{n} = (2\pi/\lambda)\mathbf{n}.}$$

Уравнение плоской волны



Колебания в источнике:

$$\xi_0 = a\cos(\omega t + \alpha)$$

Колебания в произвольной точке на фронте волны:

$$\xi = a\cos\left[\omega\left(t - \frac{\ell}{v} + \alpha\right)\right]$$

С учетом: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \dfrac{\omega}{v}$

$$\xi = a\cos(\omega t - k\ell + \alpha).$$

Расстояние *l* можно выразить через радиус вектор $\vec{r}$ и вектор нормали $\vec{n}$

$$\vec{n}\vec{r} = r\cos\alpha = \ell.$$

Итоговое уравнение

$$\xi = a\cos\left(\omega t - k\vec{n}\vec{r} + \alpha\right) = a\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha\right).$$

Полученное уравнение соответствует плоской незатухающей волне, распространяющейся в среде в направлении волнового вектора $\vec{k}$.

Если волна затухает, то уравнение волны необходимо дополнить множителем $\exp(-\beta r)$.

В декартовых координатах:

$$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha x + \frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta y + \frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma z$$

$$\xi(x, y, z; t) = a\cos\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha\right).$$

Функция ·$\xi(x,y,z;t)$ позволяет определять отклонение точки среды с координатами $\{x,y,z\}$ в момент времени t. Волновое уравнение для рассматриваемого случая запишется так

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2};$$

$$\boxed{\Delta\xi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},}$$

где Δ – оператор Лапласа.

Вывод уравнения в конце презентации

Общее одномерное волновое уравнение

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.}$$

$$\xi = f_1(t - x/v) + f_2(t + x/v),$$

При наличии затухания одномерное волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + 2\gamma\frac{\partial\xi}{\partial x} + \gamma^2\xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

где γ — коэффициент затухания волны.

Уравнение волны с затуханием по амплитуде

$$\xi = a_0 e^{-\gamma x}\cos(\omega t - kx).$$

Сферические и цилиндрические волны

уравнение сферической волны:

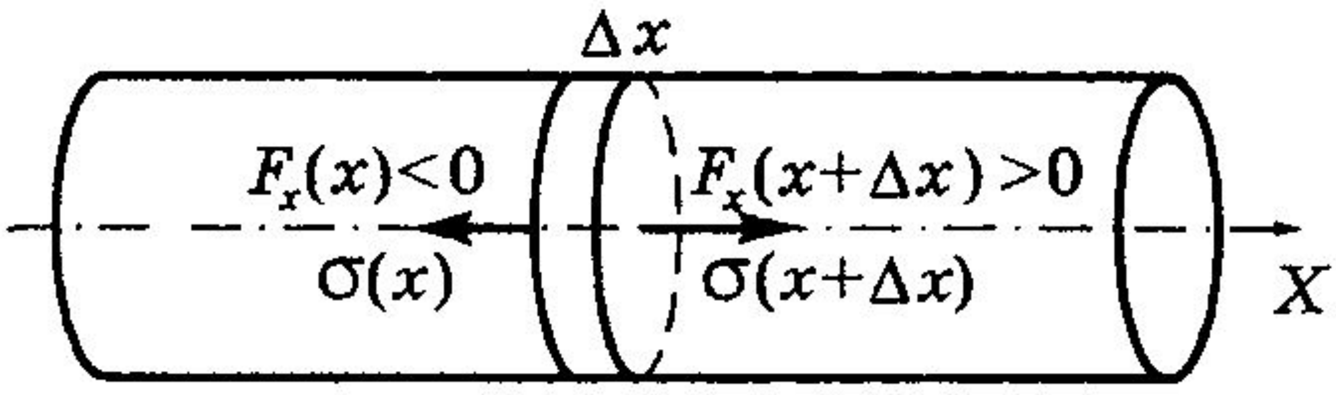
$$\xi = \frac{A}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right), \text{ или } \xi = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr)$$

k - скаляр

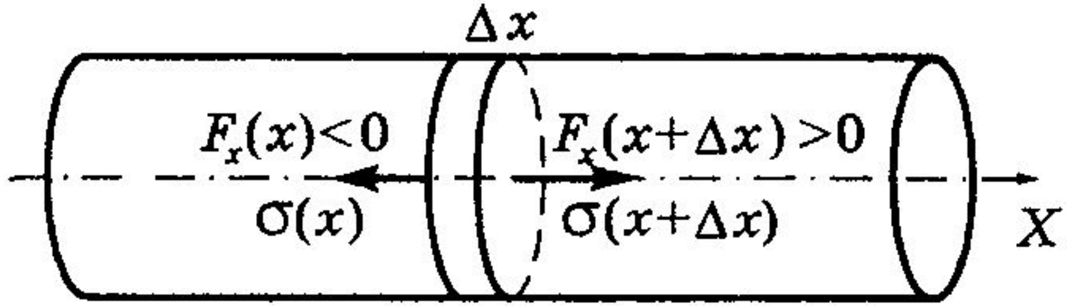
цилиндрические волны:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{R}} f\left(t - \frac{R}{v}\right) \qquad \xi = \frac{A}{\sqrt{R}}\cos(\omega t - kR)$$

Упругие волны в стержнях



За время t возмущение проходит путь $l = ct$,



закон Гука: $\sigma = E\varepsilon,$

σ — напряжение (Н/м^2),

$\boldsymbol{E}$ — модуль Юнга (Па),

$\varepsilon = \partial\xi/\partial x.$

$\Delta\sigma = P$

$$m\ddot{x} = F \quad \Rightarrow \quad \rho_0 S_0 \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S_0 \sigma(x+\Delta x) - S_0 \sigma(x)$$

Разделим уравнение на $S_0 \Delta x$: (объем)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\sigma(x+\Delta x) - \sigma(x)}{\Delta x}$$

Перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим уравнение

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

$\boxed{\textit{закон Гука:} \quad \sigma = E\varepsilon,}$ где $\boxed{\varepsilon = \partial\xi/\partial x.}$

Тогда $$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$ и $$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Сравнивая с общим волновым уравнением получаем, что скорость продольной волны в тонком стержне

$$\text{v} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Справка

Общее одномерное волновое уравнение

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.}$$

Для поперечных волн та же формула имеет вид:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G – модуль сдвига

ρ - плотность

Для волн в газах:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

γ - показатель адиабаты

p – давление

ρ - плотность

Объемная плотность энергии волны

В ВОЛНЕ РАБОТА ПО РАСТЯЖЕНИЮ СТЕРЖНЯ ИДЕТ НА УВЕЛИЧЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ

$$A = \int_0^x F(x)\mathrm{d}x = \varkappa \int_0^x x\mathrm{d}x = \frac{\varkappa x^2}{2} \qquad U = \varkappa x^2/2.$$

Плотность энергии: $w_{\text{п}} = U/Sl$

учитывая, что $\varkappa x = F = \sigma S$, $\sigma = E\varepsilon$ и $\varepsilon = x/l$,

$$U = \frac{Fx}{2} = \frac{\sigma S \cdot \varepsilon l}{2} = \frac{E\varepsilon^2}{2} Sl. \qquad w_{\text{п}} = E\varepsilon^2/2.$$

Плотность полной энергии

$$w = w_к + w_п = \rho\,\dot{\xi}^2/2 + E\varepsilon^2/2.$$

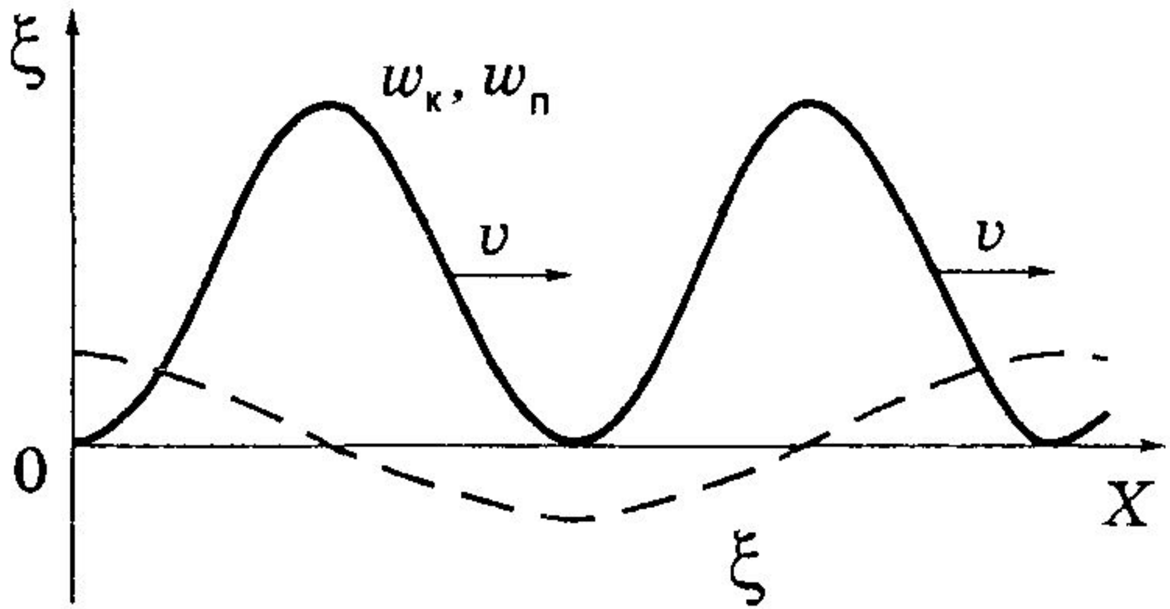
$$\boxed{\text{Для тонкого стержня } E = \rho\upsilon^2,}$$

Тогда: $$w = \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right].$$

$$w = \rho\,\dot{\xi}^2.$$

Скорость движения частиц среды максимальна в моменты максимального уплотнения и разуплотнения среды (смотрите доп. Презентацию к лекции) для гармонической волны $\xi = a\cos(\omega t - kx)$

$$w = \rho a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx).$$



Изменения объемных плотностей кинетической и потенциальной энергий в бегущей волне синфазны!!!

Плотность потока энергии. Вектор Умова

Поток энергии: $\Phi = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t,$

Плотность потока энергии $j = d\Phi / dS_{\perp}$

$$\mathrm{d}W = wv\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S\cos\alpha = wv\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S_{\perp}.$$

вектор Умова **j**: $\boxed{\mathbf{j} = w\mathbf{v}}$

Для гармонической волны $\mathbf{v} = (\omega/k)\mathbf{n}.$

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \frac{1}{2}\rho a^2 \omega^2 \mathbf{v}.$$

Интенсивность волны: $I = \langle j \rangle.$

$\boxed{\mathbf{j} = w\mathbf{v}}$ - справедливо для бегущей волны

Для суперпозиции волн: $\vec{j} = -\sigma \cdot \vec{u}$

σ - напряжение (или избыточное давление);

$\vec{u}$ - скорость частиц среды (не скорость волн).

Когерентные волны

Когерентность волны означает, что в различных точках волны осцилляции происходят синхронно, то есть разность фаз между двумя точками не зависит от времени.

Интерференция волн

Интерференция – эффект (картина) взаимного усиления и ослабления волн при наложении друг на друга

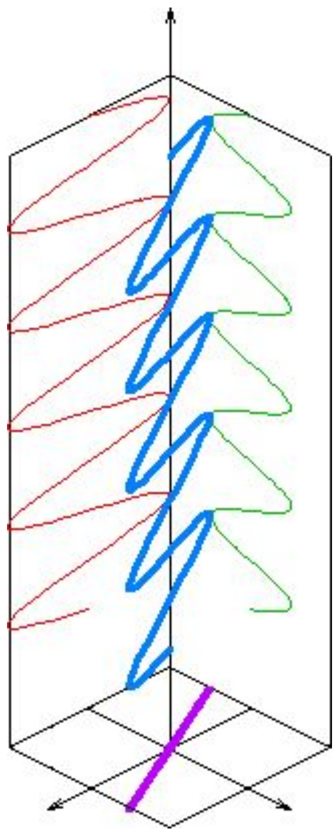
Интерференционная картина когерентных волн неподвижна в пространстве

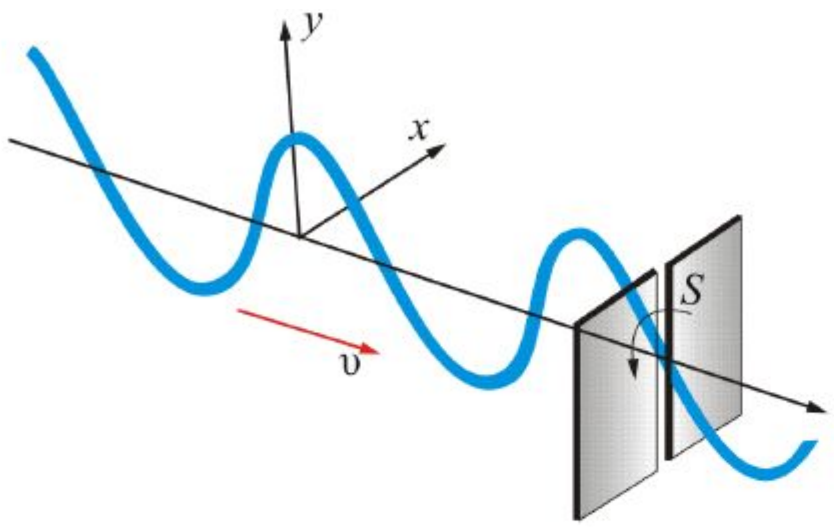
Принцип суперпозиции для волн (при малых возмущениях)

Это означает, что *всякое возмущение, существующее в среде, не влияет на распространение другого возмущения. Каждое возмущение распространяется так, как если бы других возмущений в среде не было.*

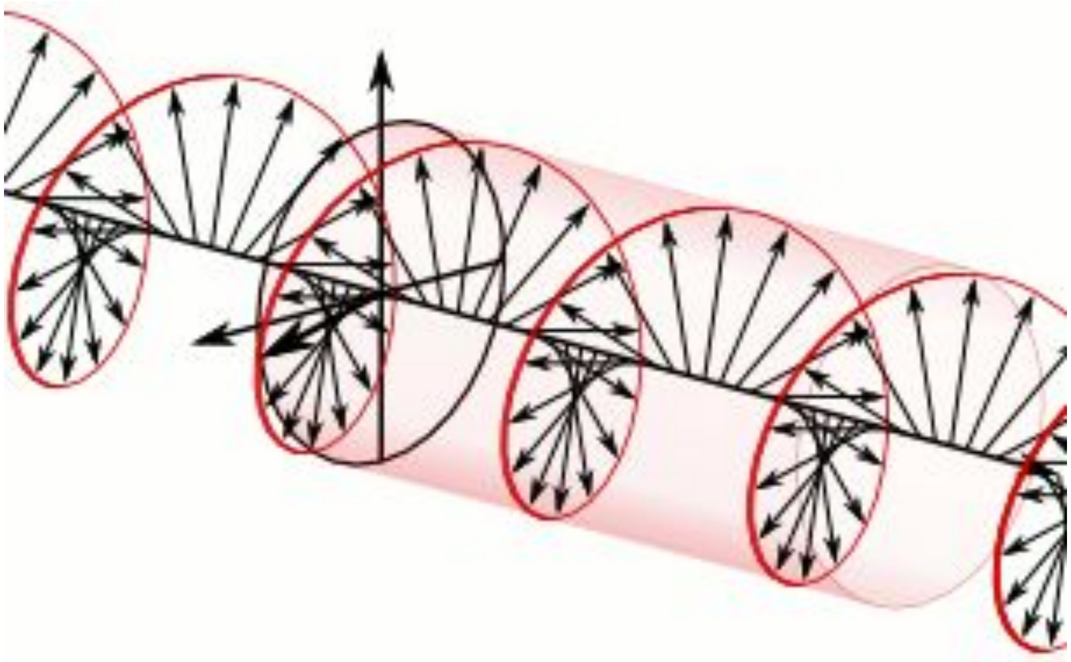
Спайдер эффект

Плоская поляризация волн





Круговая поляризация волн



Стоячие волны

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях (начальная фаза $\varphi = 0$):

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= A\cos(\omega t - kx) \\ \xi_2 &= A\cos(\omega t + kx) \end{aligned}\right\}.$$

Сложим уравнения и преобразуем по формуле суммы косинусов

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2}\right).$$

Т.к. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, то можно записать:

$$\xi = 2A\cos\omega t\,\cos kx = 2A\cos kx\,\cos\omega t\,.$$

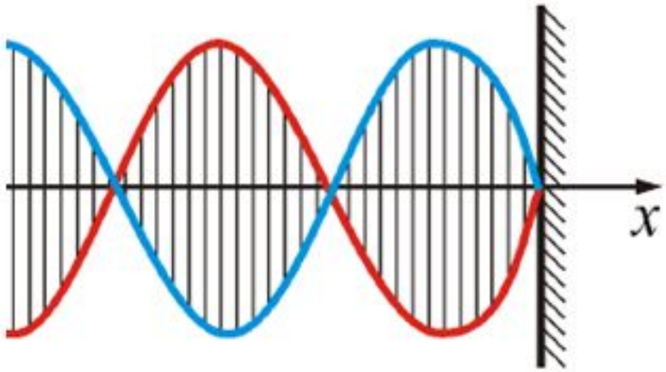
Учитывая, что $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, получим ***уравнение стоячей волны***:

$$\xi = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t\,.$$

$$\xi = A^*\cos\omega t\,, \quad \text{где} \quad A^* = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

В точках, где координаты удовлетворяют условию $2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm n\pi$ (n = 1, 2, 3, …), $\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) = 1$, суммарная амплитуда равна максимальному значению: $A^* = 2A$, – это ***пучности*** стоячей волны. ***Координаты пучностей***:

$$x_{\text{пучн}} = \pm n\lambda / 2.$$

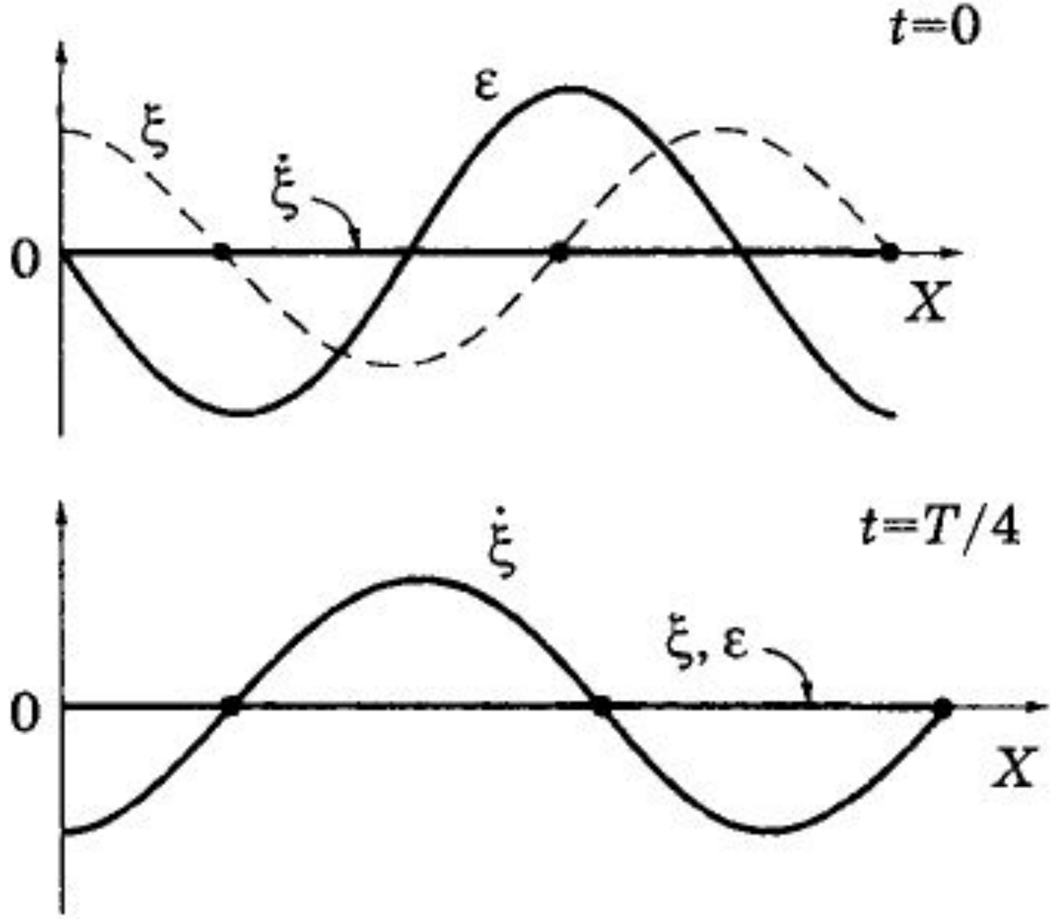


В точках, координаты которых удовлетворяют условию $2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm(n + \frac{1}{2})\pi$ (n = 0, 1, 2,…), $\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0$ и суммарная амплитуда колебаний равна нулю $A^* = 0$, – *это* ***узлы*** *стоячей волны*. ***Координаты узлов:***

$$x_{\text{узл}} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}.$$

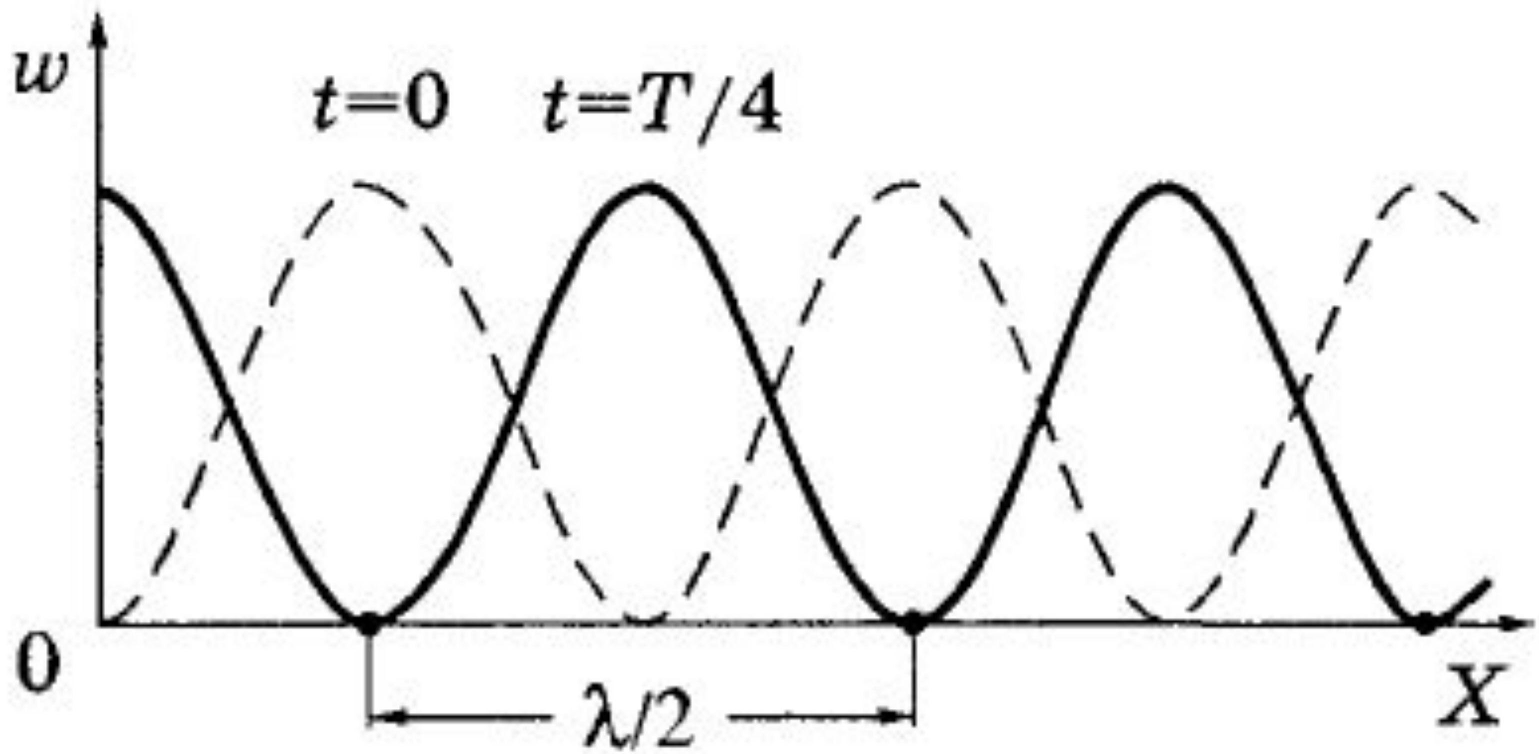
Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают.

Стоячие волны

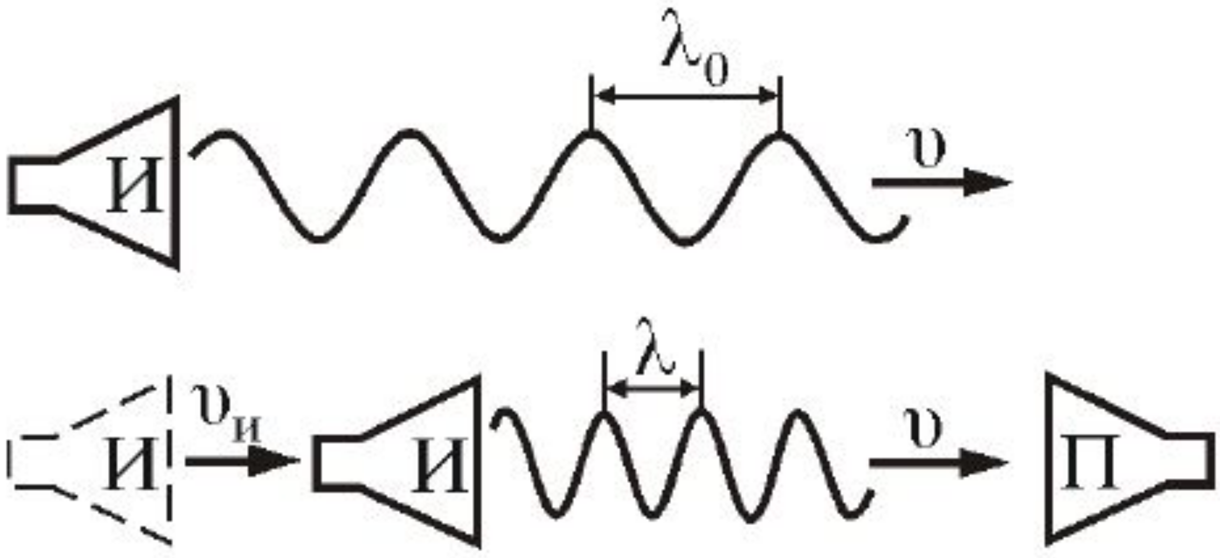


В стоячей поперечной волне сдвиг по фазе изменений скорости и амплитуды смещения (потенциальной и кинетической энергий)

Средний поток плотности энергии стоячей волны в любом сечении = 0



Эффект Доплера



О фазовой и групповой скоростях

$\upsilon = \dfrac{\omega}{k}$ – *фазовая скорость*, $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k} = u$ – *групповая скорость*.

В пределе выражение для групповой скорости:

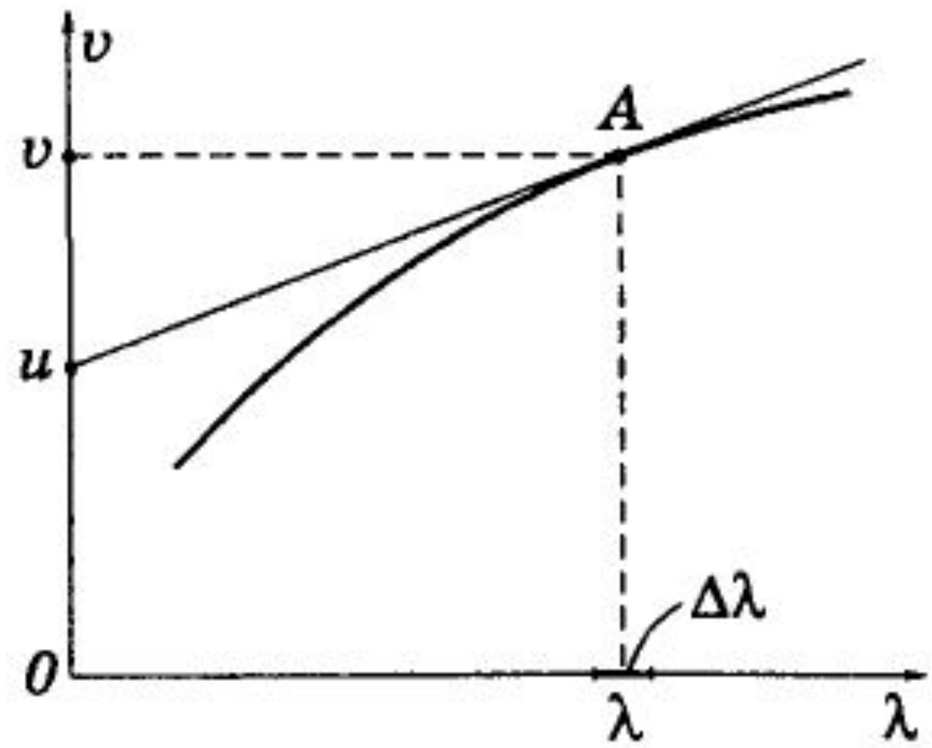
$$u = \frac{d\omega}{dk}. \qquad \text{Т.к } \omega = \upsilon k$$

$$u = \frac{d(\upsilon k)}{dk} = \upsilon + k\frac{d\upsilon}{dk}.$$

Так как $k = 2\pi/\lambda$ и $dk = -(2\pi/\lambda^2)d\lambda$, то

$$\boxed{u = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}.}$$

Это так называемая *формула Рэлея*



$$\boxed{u = \upsilon - \lambda \frac{d\upsilon}{d\lambda}.}$$

Из этой формулы следует, что ***в диспергирующей среде***, *в зависимости от знака* $\frac{d\upsilon}{d\lambda}$, *групповая скорость может быть больше или меньше фазовой.*

Вывод волнового уравнения для плоской гармонической волны

Уравнение плоской волны в начале координаты $x = 0$

- волновое число

- волновой вектор

- Фазовая скорость

Общее выражение

дважды дифференцируем по времени и координатам, далее получаем:

Отдельная презентация по синфазности изменений двух энергий в механических волнах

Конец лекции 7