Занятие 1. Электростатическое поле в вакууме. Принцип суперпозиции. Проводники в электростатическом поле

- ***Напряжённость электростатического поля. Принцип суперпозиции***
- ***Теорема Гаусса в интегральной, дифференциальной формах***
- ***Потенциал от системы дискретно и непрерывно распределённых в пространстве неподвижных зарядов***
- ***Метод изображений***
- ***Ауд.: Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Бином, 1998÷2010. №№ 2.18, 2.27, 2.36, 2.69***

Напряжённость электростатического поля. Принцип суперпозиции

МГТУ им. Н. Э. Баумана

Результирующий вектор $\mathbf{E}_p$ напряжённости электростатического поля в вакууме от системы неподвижных точечных $q_1, q_2, \ldots, q_n$ зарядов:

$$\vec{E}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\left(\frac{\vec{r}_i}{r_i}\right), \qquad (1)$$

где $\mathbf{r}_i$ – вектор, направленный от i – го точечного q_i заряда в рассматриваемую точку пространства; $\mathbf{r}_i/r_i$ – единичный вектор для $\mathbf{r}_i$ вектора.

Вектор $d\mathbf{E}$ напряжённости электростатического поля в вакууме, создаваемого в рассматриваемой точке пространства элементарным dq зарядом:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \qquad (2)$$

Результирующий вектор $\mathbf{E}_p$ напряжённости электростатического поля в вакууме в рассматриваемой точке пространства, создаваемого непрерывно распределёнными в V объёме элементарными dq зарядами и не находящимися в этой точке пространства:

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(q)} \frac{dq}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right), \quad (3)$$

где $\mathbf{r}$– вектор, направленный от элементарного dq заряда в точку пространства, где вычисляется результирующий вектор $\mathbf{E}_p$ напряжённости электростатического поля в вакууме; $\mathbf{r}/r$ – единичный вектор для $\mathbf{r}_i$ вектора.

Теорема Гаусса в интегральной, дифференциальной формах

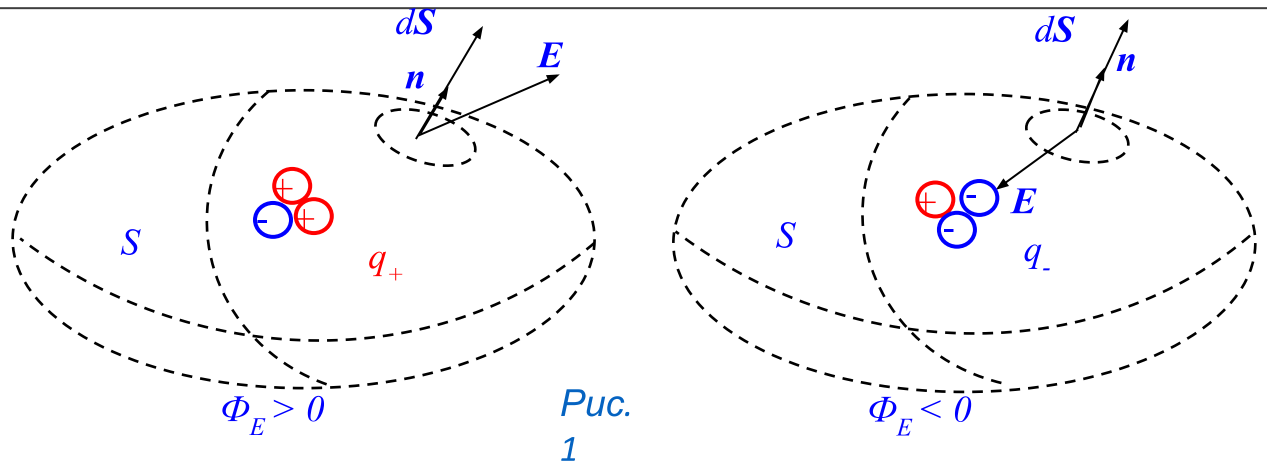

Рис. 1

Поток $Ф_E$ результирующего $\boldsymbol{E}_p$ вектора напряжённости в вакууме электростатического поля сквозь произвольную замкнутую воображаемую поверхность S площадью, проведённую в поле и охватывающую непрерывно распределённый в V объёме q заряд, пропорционален интегралу по V объёму с подинтегральной функцией, равной объёмной $\rho = dq/dV$ плотности этих q зарядов:

$$\Phi_E = \oiint_{(S)} \vec{E}_p d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dV \quad (4)$$

Дифференциальная форма теоремы *Гаусса*: дивергенция *div**E**$_p$* результирующего ***E**$_p$* вектора напряжённости в вакууме электростатического поля, которое обозначается также *Δ**E**$_p$*, численно равен сумме приращений проекций на *OX*, *OY*, *OZ* координат ***E**$_p$* вектора напряжённости на единице длины каждой из координат в рассматриваемой точке некоторого объёма и пропорциональна объёмной *ρ = dq/dV* плотности в рассматриваемой точке

некоторого объёма *q* зарядов:

$$\Delta E_p = divE_p = \frac{\partial E_X}{\partial x} + \frac{\partial E_Y}{\partial y} + \frac{\partial E_Z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (5)$$

Потенциал от системы дискретно и непрерывно распределённых в пространстве неподвижных зарядов

Принцип суперпозиции: при наложении электростатических полей φ_j потенциал в j – ой точке пространства является алгебраической суммой от каждого одиночного q_i заряда из системы n точечных q_1, q_2 ,..., q_n зарядов:

$$\varphi_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}, \qquad (6)$$

где r_{ij} – модули $\boldsymbol{r}_{ij}$ векторов, направленных от каждого q_i заряда в эту j – ую точку пространства.

Для непрерывно распределённых зарядов:

$$\varphi_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(q)}\frac{dq}{r}, \qquad (7)$$

где r– модули $\boldsymbol{r}$ векторов, направленных от каждого элементарного dq заряда в j – ую точке пространства, где определяется φ_j потенциал.

Метод изображений

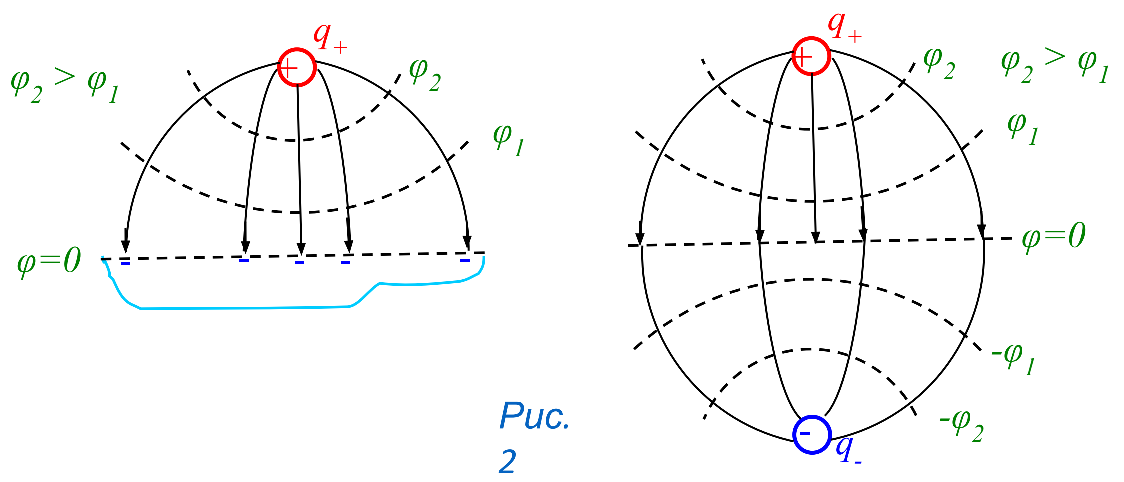

Рис. 2

Электростатическое поле от одиночного точечного q_+ заряда в верхнем полупространстве над бесконечной проводящей плоскостью определяется расположением фиктивного q_- заряда-изображения противоположного знака симметрично относительно этой

плоскости. Потенциал φ в плоскости, относительно которой оба заряды симметричны, остался прежним: $\varphi=0$, как в случае при расположении точечного q_+ заряда над бесконечной проводящей плоскостью.

Задача № 2.18

Находящийся в вакууме тонкий прямой стержень $2a$ длиной заряжен равномерно q зарядом.
Найти модуль напряжённости электрического поля как функцию r расстояния от центра стержня до точки прямой, а) перпендикулярной стержню и проходящей через его центр; б) совпадающей с осью стержня, если $r > a$. Исследовать выражения при $r >> a$.

Ответ: а) $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{r^2 + a^2}}$; б) $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 - a^2)}$.

В обоих случаях при $r >> a$ напряжённость $E \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

Решение:

МГТУ им. Н. Э. Баумана

а) Дано: $2a, q, r$/

$E_M(r)=?$

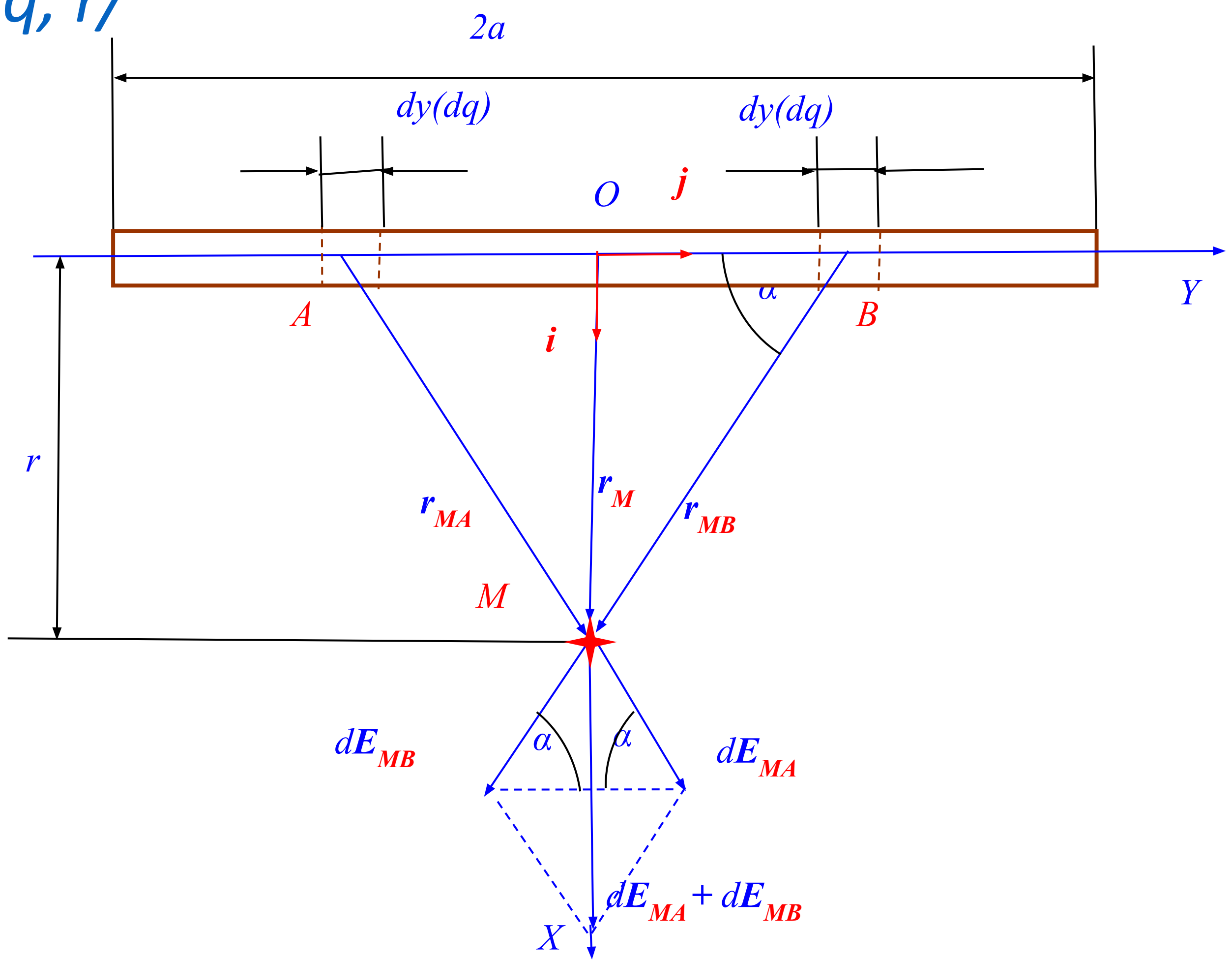

Рис. 3

Вектор напряжённости электростатического поля в плоскости, перпендикулярной оси стержня и проходящей через его центр, сонаправлен $\mathbf{r}_M$ радиусу-вектору, а величина его E модуля постоянна, поэтому достаточно определить E модуль в M точке. Векторы $d\mathbf{E}_{MA}$, $d\mathbf{E}_{MB}$ в M точке от симметрично расположенных в т.т. A, B элементарных $dq = (q/2a)dy$ зарядов, где $q/2a$ - линейная плотность зарядов на стержне:

$$d\vec{E}_{MA} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r_{MA}^2}\left(\frac{\vec{r}_{MA}}{r_{MA}}\right); d\vec{E}_{MB} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r_{MB}^2}\left(\frac{\vec{r}_{MB}}{r_{MB}}\right). \quad (8)$$

Согласно принципу суперпозиции результирующий вектор $d\mathbf{E}_{Mp}$ напряженности электростатического поля, направленный по OX оси, в M точке на боковой поверхности цилиндра r радиусом с учётом r^2_{MA} =

$= r^2_{MB} = y^2 + r^2$; $dq = (q/2a)dy$:

$$d\vec{E}_{Mp} = d\vec{E}_{MA} + d\vec{E}_{MB} = \frac{q\,dy}{8a\pi\varepsilon_0 (y^2 + r^2)^{3/2}} (\vec{r}_{MA} + \vec{r}_{MB}) = \frac{qr\,dy}{4a\pi\varepsilon_0 (y^2 + r^2)^{3/2}} \vec{i}, \quad (9)$$

где $\mathbf{r}_{MA} + \mathbf{r}_{MB} = 2r\mathbf{i}$ - сумма двух векторов, а $\mathbf{i}$ – единичный вектор OX оси;

$$dE_{Mp} = \frac{qrdy}{4a\pi\varepsilon_0 (y^2 + r^2)^{3/2}} -$$ модуль вектора dE_{Mp} напряженности электростатического поля.

Согласно принципу суперпозиции E_{Mp} модуль результирующего вектора E_{Mp} напряженности электростатического поля, направленный по *OX* оси, от всех симметрично расположенных относительно этой *OX* оси элементарных зарядов:

$$E_{Mp} = \int_{(q)} dE_{Mp} = \frac{qr}{4a\pi\varepsilon_0} \int_0^a \frac{dy}{(y^2 + r^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{a^2 + r^2}}. \qquad (10)$$

При $r >> a$ модуль E_{Mp} результирующего вектора $\mathbf{E}_{Mp}$ напряженности электростатического поля:

$$E_{Mp} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \quad (11)$$

б) Дано: $2a, q, r$/ $E_M(r) = ?$

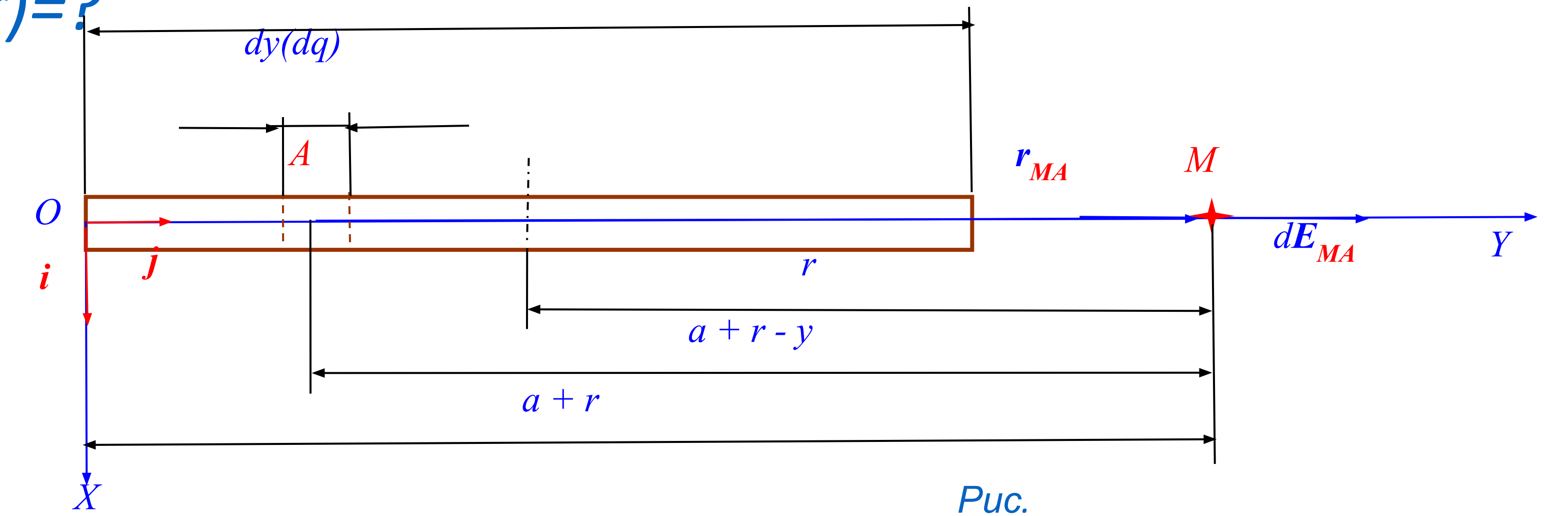

Рис. 4

Модуль dE_{MA} вектора $d\mathbf{E}_{MA}$ в M точке от расположенного в т. A элементарного $dq = (q/2a)dy$ заряда, где $q/2a$ - линейная плотность зарядов на стержне:

$$dE_M = \frac{qdy}{8a\pi\varepsilon_0(a+r-y)^2}. \qquad (12)$$

Согласно принципу суперпозиции E_M модуль вектора $\mathbf{E}_M$ напряженности электростатического поля, направленный по OY оси, от всех элементарных зарядов на стержне:

$$E_M = \int_{(q)} dE_M = \frac{q}{8a\pi\varepsilon_0}\int_0^{2a}\frac{dy}{(a+r-y)^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r^2-a^2)}. \qquad (13)$$

При $r >> a$ модуль E_M вектора $\mathbf{E}_M$ напряженности электростатического поля:

$$E_{Mp} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (14)$$

Задача №2.27

Бесконечно длинная круглая цилиндрическая поверхность заряжена равномерно в вакууме по длине с поверхностной плотностью

$\sigma = \sigma_0 \cos\varphi$, где φ - полярный угол цилиндрической системы координат, ось OZ которой совпадает с осью данной поверхности. Найти

E модуль и направление $\boldsymbol{E}$ вектора напряжённости электростатического поля

Ответ: $E = \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$, вектор $\boldsymbol{E}$ направлен OZ под углом $\varphi = \pi$.

Решение:

Дано:

$\sigma=\sigma_0 \cos\varphi / E_{OZ}=?$

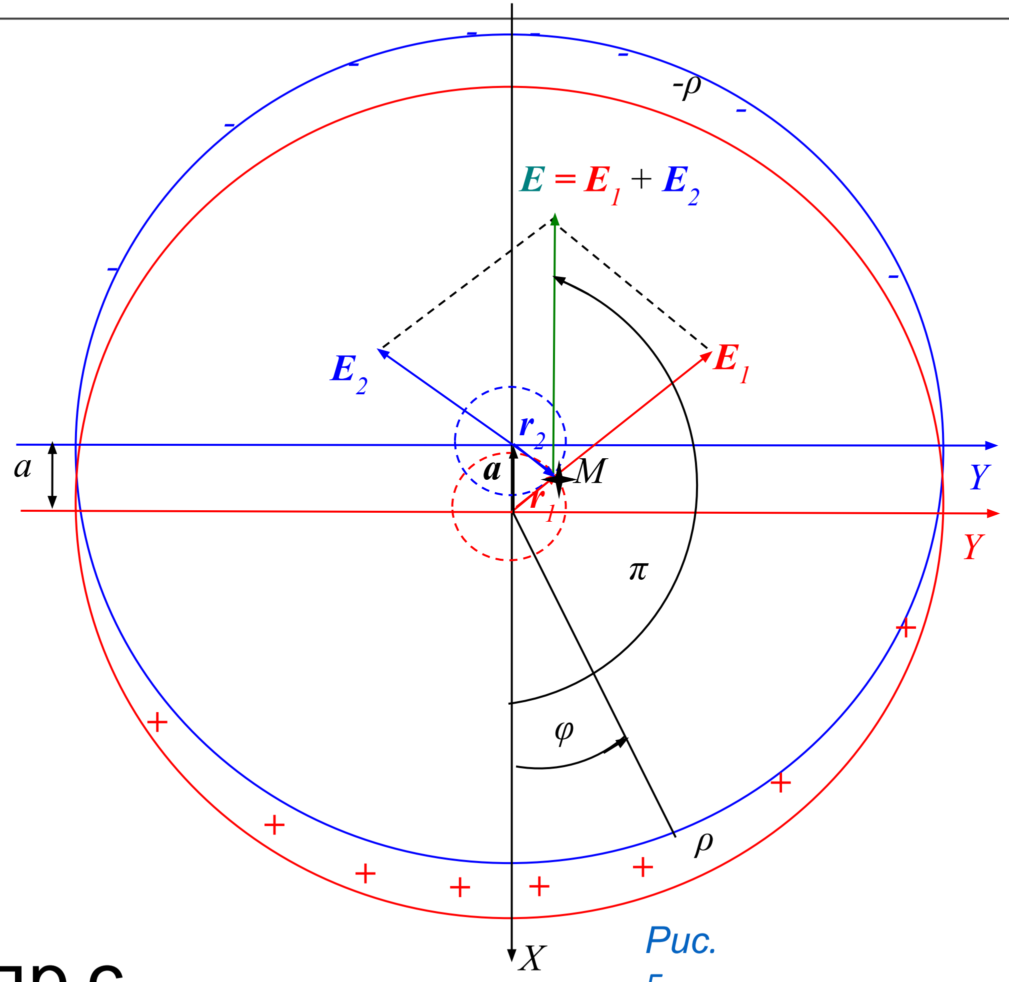

Рис. 5

Представляем цилиндр с зарядом, распределённым по поверхности, двумя одинаковыми цилиндрами с положительным и отрицательным зарядами с *ρ* и -*ρ* объёмными плотностями, наложенными друг на друга с малым смещением их центров на длину ***a*** вектора. Тогда в пересечении этих цилиндров заряд отсутствует, а его поверхностная плотность заряда соответствует заданной.Согласно теореме *Гаусса* модули E_1, E_2 векторов $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ на боковой поверхности в *M* точке каждого заряженного цилиндров r_1, r_2 радиусами:

$$\oint\limits_{(S)} E_{1,2} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_V \rho dV \leftrightarrow E_{1,2} 2\pi r_{1,2} H = \frac{\pi r_{1,2}^{\;2} \rho}{\varepsilon_0} H \leftrightarrow E_{1,2} = \frac{r_{1,2} \rho}{2\varepsilon_0}, \quad (15)$$

где *H* – высота цилиндра.

Вследствие отрицательного заряда, охватываемого боковой поверхностью цилиндра r_2 радиусом, $\mathbf{E}_2$ вектор направлен противоположно r_2 радиусу-вектору: $\vec{E}_1 = \dfrac{\vec{r}_1\rho}{2\varepsilon_0};\ \vec{E}_2 = -\dfrac{\vec{r}_2\rho}{2\varepsilon_0}.$ (16)

Вектор $E = E_1 + E_2$ напряжённости электростатического поля в M точке, находящейся на оси OZ бесконечно длинного цилиндра, как суперпозиция векторов E_1, E_2 от каждого заряженного цилиндра r_1, r_2 радиусами:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\vec{a}\rho}{2\varepsilon_0}, \qquad (17)$$

где $r_1 - r_2 = a$.

Вектор E сонаправлен a вектору и составляет π угол с OX осью. Поверхностную плотность σ_0 заряда бесконечно длинного цилиндра при $\varphi = 0$ нормируем: $\sigma_0 = \rho a$. Тогда E модуль вектора E на оси OZ бесконечно длинного заряженного цилиндра:

$$E = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}. \qquad (18)$$

Задача № 2.36

МГТУ им. Н. Э. Баумана

Имеются два тонких проволочных кольца R радиуса каждое, оси которых совпадают. Заряды колец равны q и $-q$. Найти разность потенциалов между центрами колец, отстоящими друг от друга на расстоянии l, если $R = 30$ см, $l = 52$ см и $q = 0{,}40$ мкКл.

Ответ:

$$\Delta\varphi = \frac{\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(l/R\right)^2}}\right) q}{2\pi\varepsilon_0 R} = 12 кВ.$$

Решение:

Дано: R, q, l/ $\Delta\varphi$=?

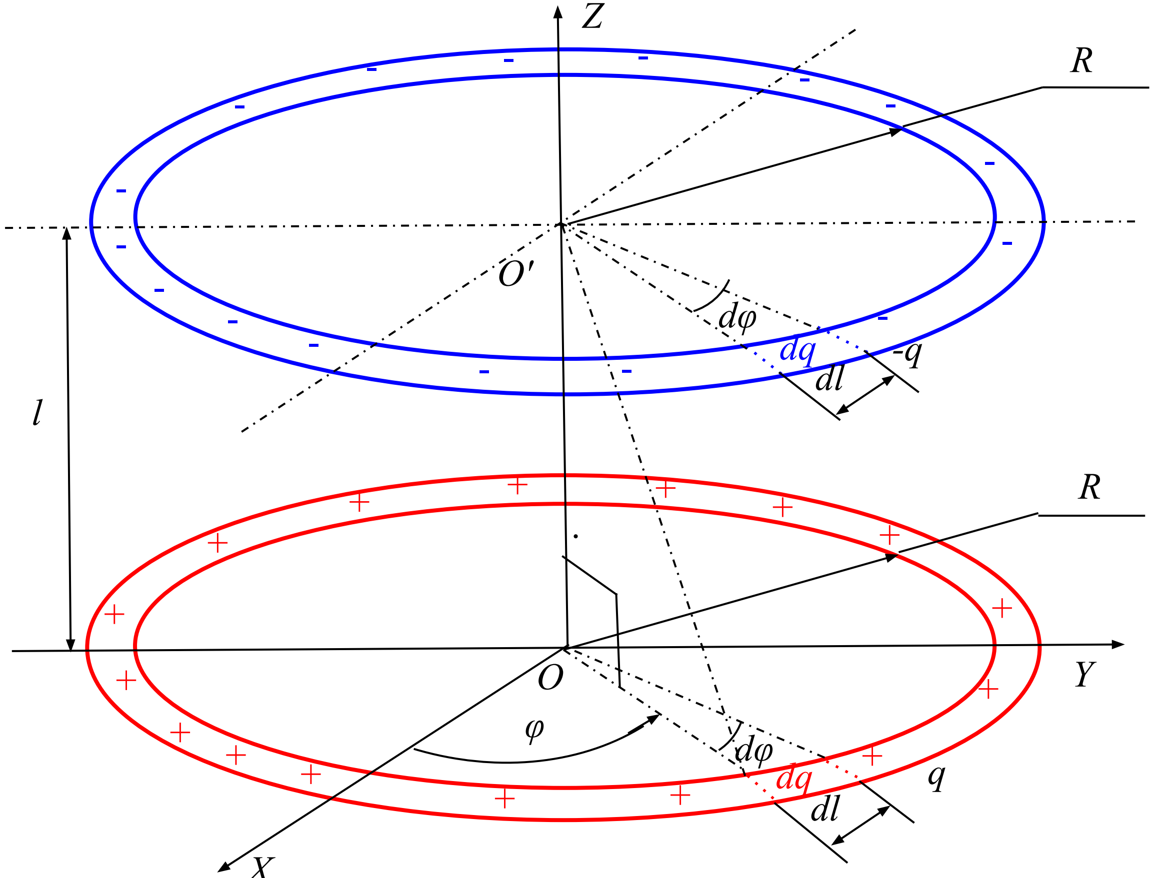

Рис. 6

Положительный q заряд распределён равномерно по окружности $2\pi R$ длиной, поэтому τ линейная плотность этого заряда:

$$\tau = \frac{q}{2\pi R}. \qquad (19)$$

Элементарный dq заряд на длине $dl = Rd\varphi$ кольца:

$$dq = \tau dl = \frac{qd\varphi}{2\pi}. \qquad (20)$$

Потенциал $d\varphi_{0+}$ в т.O от элементарного положительного dq заряда, находящегося на расстоянии R от центра кольца:

$$d\varphi_{0+} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{qd\varphi}{8\pi^2\varepsilon_0 R}. \qquad (21)$$

Согласно принципу суперпозиции суммарный потенциал $\varphi_{\Sigma O+}$ в т.O от элементарных положительных зарядов:

$$\varphi_{\Sigma 0+} = \int_{(q)} d\varphi_{0+} = \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 R}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (22)$$

Согласно принципу суперпозиции суммарный потенциал $\varphi_{\Sigma O-}$ в т.O от элементарных отрицательных зарядов:

$$\varphi_{\Sigma O-} = \int\limits_{(q)} d\varphi_{0-} = \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0\sqrt{R^2+l^2}}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+l^2}}. \qquad (23)$$

Суммарный потенциал $\varphi_{\Sigma O}$ в т.O от элементарных положительных и отрицательных зарядов:

$$\varphi_{\Sigma 0} = \varphi_{\Sigma O+} + \varphi_{\Sigma O-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+l^2}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(l/R)^2}}\right)q}{4\pi\varepsilon_0 R}. \qquad (24)$$

Суммарный потенциал $\varphi_{\Sigma O'}$ в т.O' от элементарных отрицательных и положительных зарядов:

$$\varphi_{\Sigma 0'} = \varphi_{\Sigma O'+} + \varphi_{\Sigma O'-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + l^2}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (l/R)^2}}\right) q}{4\pi\varepsilon_0 R}. \qquad (25)$$

Разность $\Delta\varphi$ потенциалов между центрами колец т. т.O,O':

$$\Delta\varphi = \varphi_{\Sigma 0} - \varphi_{\Sigma 0'} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (l/R)^2}}\right) q}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (0{,}52/0{,}30)^2}}\right) 4 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}30} \left[\frac{Кл}{\frac{Ф}{м} \cdot м}\right] \approx 12 кВ. \qquad (26)$$

Задача №2.69

Тонкое проволочное кольцо *R = 7,5 см* радиуса имеет *q = 5,2 мкКл* заряд. Кольцо расположено параллельно проводящей плоскости на *l = 6,0 см* расстоянии от неё. Найти *σ* поверхностную плотность заряда в точке плоскости, расположенной симметрично относительно кольца.

Ответ: $$\sigma = \frac{ql}{2\pi(l^2 + R^2)^{3/2}} \approx 56\frac{мкКл}{м^2}$$

Решение:

Дано: R, q, l / σ =?

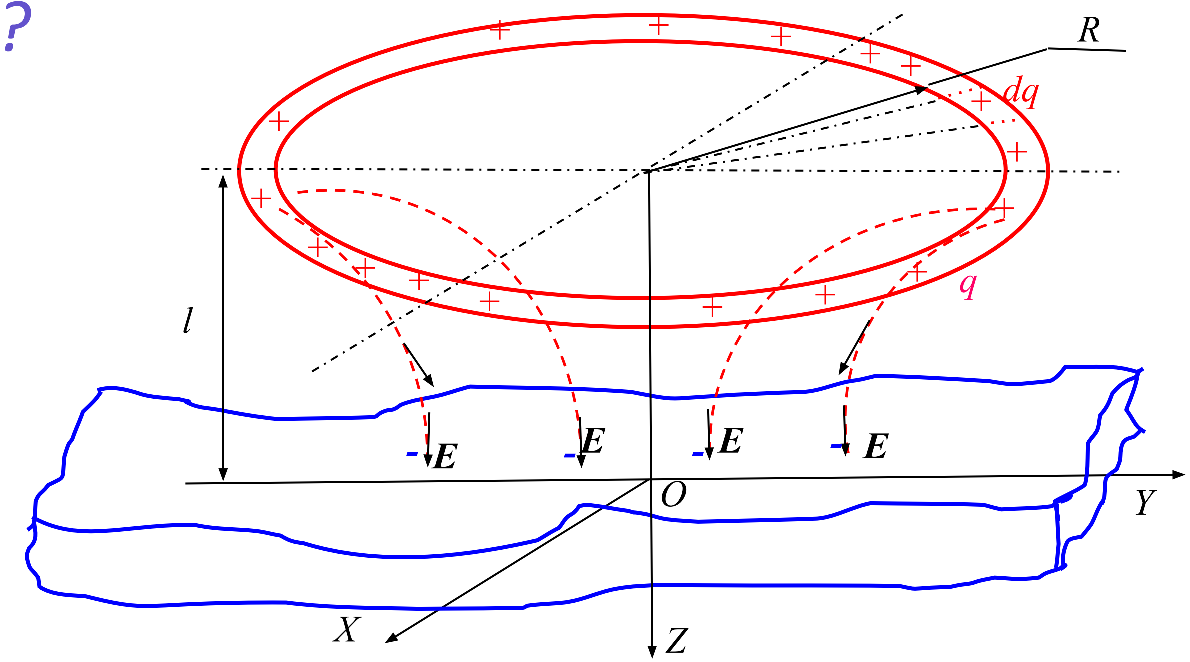

Рис. 7

Электростатическое поле не изменится, если плоскость убрать, и расположить зеркальное кольцо с $-q$ зарядом. Положительный q заряд распределён равномерно по окружности $2\pi R$ длиной, поэтому τ линейная плотность этого заряда:

$$\tau = \frac{q}{2\pi R}. \quad (27)$$

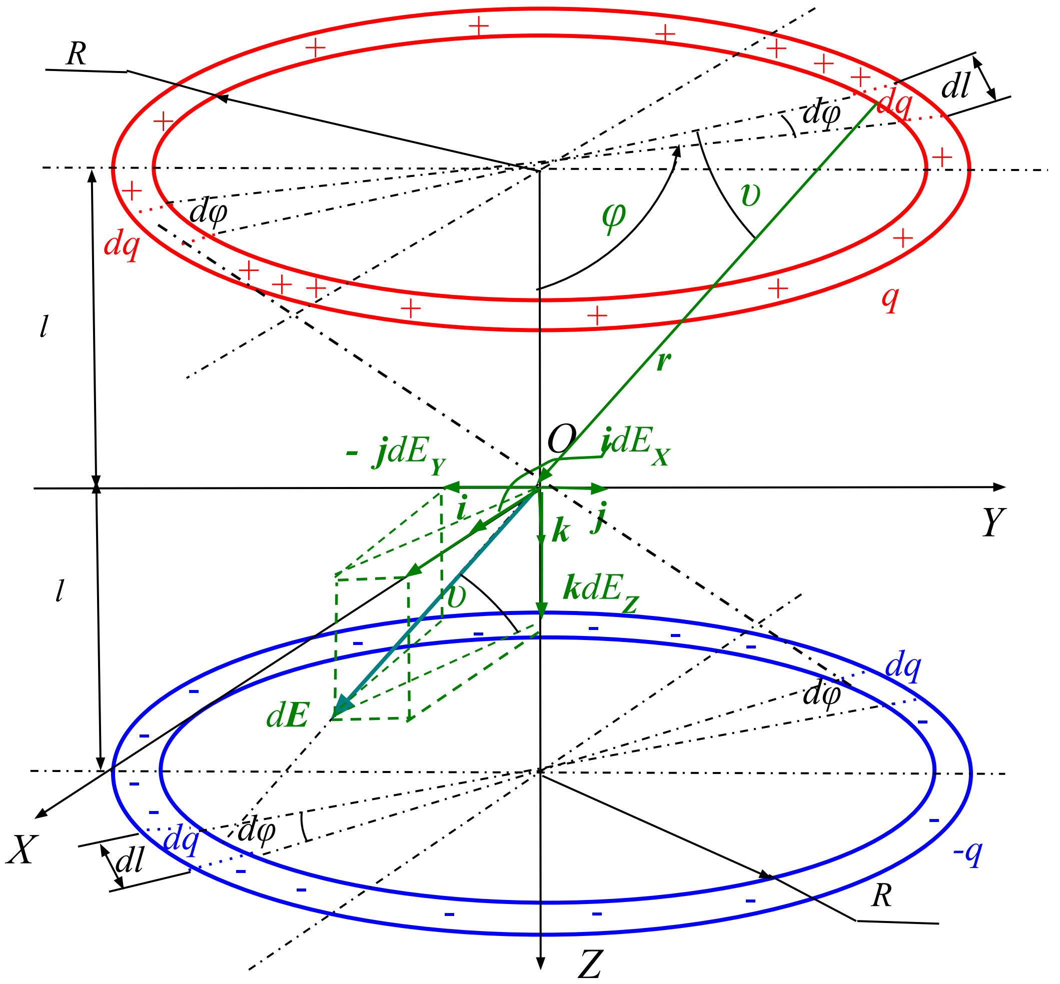

Рис. 8

Элементарный *dq* заряд на
длине *dl = Rdφ* кольца:

$$dq = \tau dl = \frac{qd\varphi}{2\pi}. \quad (28)$$

Вектор ***dE*** напряжённости электростатического поля в т.*O* от элементарного положительного *dq* заряда, находящегося на расстоянии $\sqrt{R^2 + l^2}$ от центра кольца:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + l^2}}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{q d\varphi}{8\pi^2\varepsilon_0\sqrt{R^2 + l^2}}\frac{\vec{r}}{r}. \qquad (29)$$

Составляющая вектора ***k****dE*$_Z$ по *OZ* оси в т.*O* от элементарного положительного *dq* заряда с учётом угла v, под которым ***r*** радиус-вектор направлен в т.*O*:

$$\sin\vartheta = \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}$$

$$\vec{k}dE_Z = \vec{k}\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + l^2}}\sin\vartheta = \vec{k}\frac{q l d\varphi}{8\pi^2\varepsilon_0(R^2 + l^2)^{3/2}}. \qquad (30)$$

Другие составляющие ***dE*** вектора напряжённости электростатического поля от элементарного положительного *dq* заряда можно не учитывать, поскольку каждому элементарному заряду соответствует симметричный заряд относительно *O* точки, составляющие ***dE*** вектора ***i****d*E_X по *OX* оси и ***j****d*E_Y по *OY* оси которого равны по модулю и противоположны по направлению.

Согласно принципу суперпозиции суммарная проекция E_Z на *OZ* ось ***dE*** вектора напряжённости электростатического поля в т.*O* от всех элементарных положительных зарядов на кольце:

$$E_Z = \int\limits_{(q)} dE_Z = \frac{ql}{8\pi^2\varepsilon_0(R^2+l^2)^{3/2}}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0(R^2+l^2)^{3/2}}. \qquad (31)$$

Согласно принципу суперпозиции суммарная
проекция $E_{Z\Sigma}$
на *OZ* ось $\boldsymbol{E}_{Z\Sigma}$ вектора напряжённости
электростатического

и отрицательных зарядов на действительном и зеркальном кольце:

$$E_{Z\Sigma} = \frac{ql}{2\pi\varepsilon_0 (R^2 + l^2)^{3/2}}. \qquad (32)$$

Вектор $\mathbf{E}_{Z\Sigma}$ напряжённости электростатического поля в т. O - это напряжённость электростатического поля в точке проводящей плоскости, расположенной симметрично относительно кольца и имеющей одну составляющую вектора $\mathbf{k}E_{Z\Sigma}$ по OZ оси. Поэтому поверхностная плотность σ заряда в точке плоскости, расположенной симметрично относительно кольца:

$$\sigma = \varepsilon_0 E_{Z\Sigma} = \frac{ql}{2\pi (R^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{5{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}06}{2 \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}075^2 + 0{,}06^2)^{3/2}} \left[\frac{Кл \cdot м}{м^3}\right] \approx 56 \left[\frac{мкКл}{м^2}\right]. \qquad (33)$$

Дома:* *Иродов И.Е.* *Задачи по общей физике.- М.: Бином, 1998÷2010. №№ 2.17, 2.44

Спасибо за внимание!