



**Обобщенная линейная модель
множественной регрессии.
Обобщенный метод наименьших
квадратов (ОМНК)**

Обобщенная линейная модель множественной регрессии

Линейная модель множественной регрессии

$$Y = X\bar{\beta} + \bar{\varepsilon}, \quad (1)$$

для которой нарушено 4 или 5 условие Гаусса-Маркова называется обобщенной линейной моделью множественной регрессии (ОЛММР), а именно:

- 1) x_1, \dots, x_k – детерминированные переменные;
- 2) ранг матрицы X равен " $k+1$ " – среди признаков нет линейно зависимых;
- 3) $M\varepsilon_i = 0, i = \overline{1, n}$ – нет систематических ошибок в измерении y ;
- 4) $D\varepsilon_i = M\varepsilon_i^2 = \sigma_i^2, i = \overline{1, n}$
- 5) $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = M(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) \neq 0, i \neq j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$
- 4') $\Sigma_\varepsilon = M\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}^T = \sigma_0^2 \Sigma_0, \Sigma_0$ – положительно-определенная, симметричная матрица

Свойства МНК-оценок для обобщенной линейной модели множественной регрессии

Оценка $\bar{b} = (X^T X)^{-1} X^T Y$

1. Оценка b по-прежнему несмещенная

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y = (X^T X)^{-1} X^T (X\bar{\beta} + \bar{\varepsilon}) = \bar{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$$

$$M\bar{b} = M(\bar{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T \bar{\varepsilon}) = \bar{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T M\varepsilon = \bar{\beta}$$

Свойства МНК-оценок для обобщенной линейной модели множественной регрессии

Оценка $\bar{b} = (X^T X)^{-1} X^T Y$

1. Оценка b по-прежнему несмещенная

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y = (X^T X)^{-1} X^T (X\bar{\beta} + \bar{\varepsilon}) = \bar{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T \bar{\varepsilon}$$

$$M\bar{b} = M(\bar{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T \bar{\varepsilon}) = \bar{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T M\bar{\varepsilon} = \bar{\beta}$$

2. Оценка b состоятельная.

Свойства МНК-оценок для обобщенной линейной модели множественной регрессии

$$\text{Оценка } \bar{b} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

1. Оценка b по-прежнему несмещенная

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y = (X^T X)^{-1} X^T (X\bar{\beta} + \bar{\varepsilon}) = \bar{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$$

$$M\bar{b} = M(\bar{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T \bar{\varepsilon}) = \bar{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T M\varepsilon = \bar{\beta}$$

2. Оценка b состоятельная.

3. Однако полученная ранее формула для ковариационной матрицы вектора оценок $\Sigma_{\bar{b}}$ оказывается неприемлемой в условиях обобщенной модели:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\bar{b}} &= M[((X^T X)^{-1} X^T \bar{\varepsilon})((X^T X)^{-1} X^T \varepsilon)^T] = M[(X^T X)^{-1} X^T \bar{\varepsilon} \varepsilon^T (X^T X)^{-1}] = \\ &= (X^T X)^{-1} X^T M(\bar{\varepsilon} \varepsilon^T) X (X^T X)^{-1} = (X^T X)^{-1} X^T \sigma_0^2 \Sigma_0 X (X^T X)^{-1} \end{aligned}$$

в то время как для классической модели $\Sigma_{\bar{b}} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$

Обобщенный метод наименьших квадратов

Для получения наиболее эффективной оценки нужно использовать другую оценку, получаемую так называемым **обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК)**.

$$\bar{b}_{\text{ОМНК}} = (X^T \Sigma_0^{-1} X)^{-1} (X^T \Sigma_0^{-1} Y)$$

Несмещенная оценка остаточной дисперсии:

$$S_{\text{ост(ОМНК)}}^2 = \frac{1}{n - k - 1} (Y - Xb_{\text{ОМНК}})^T \Sigma_0^{-1} (Y - Xb_{\text{ОМНК}})$$

ковариационной матрицы $\Sigma_{b_{\text{ОМНК}}}$:

$$\hat{\Sigma}_{b_{\text{ОМНК}}} = S_{\text{ост(ОМНК)}}^2 (X^T \Sigma_0^{-1} X)^{-1} .$$

Обобщенный метод наименьших квадратов

Выборочный коэффициент детерминации определяется по формуле:

$$\hat{R}^2 = 1 - \frac{\bar{e}^T \Sigma_0^{-1} \bar{e}}{(\bar{Y} - \bar{Y}_{cp})^T \Sigma_0^{-1} (\bar{Y} - \bar{Y}_{cp})}.$$

Обобщенный метод наименьших квадратов

Для применения обобщенного метода наименьших квадратов необходимо знание ковариационной матрицы Σ_0 , что встречается крайне редко в практике эконометрического моделирования.

Поэтому для практической реализации обобщенного метода наименьших квадратов необходимо вводить дополнительные условия на структуру матрицы Σ_0 .

Обобщенный метод наименьших квадратов

Матрица Σ_0 как симметричная матрица может быть представлена как произведение двух матриц: $\Sigma_0 = CC^T$

1. $C^{-1}\Sigma_0(C^T)^{-1} = E$

2. $\Sigma_0^{-1} = (C^T)^{-1}C^{-1}$ (учитывая свойства обратных матриц)

Умножив обе части обобщенной регрессионной модели на матрицу C^{-1} слева, получим:

$$Y = X\bar{\beta} + \bar{\varepsilon}$$

$$C^{-1}Y = C^{-1}X\bar{\beta} + C^{-1}\bar{\varepsilon}$$

$$Y_{np} = X_{np}\beta + \varepsilon_{np}$$

Модель $Y_{np} = X_{np}\beta + \varepsilon_{np}$ удовлетворяет требованиям КЛММР:

$$M(\varepsilon_{np}\varepsilon_{np}^T) = M(C^{-1}\varepsilon\varepsilon^T(C^T)^{-1}) = C^{-1}M\varepsilon\varepsilon^T(C^T)^{-1} = \sigma_0^2 C^{-1}\Sigma_0(C^T)^{-1} = \sigma_0^2$$

$Y_{np} = X_{np}\beta + \varepsilon_{np}$ - является КЛММР

$$\begin{aligned} b_{\hat{\beta}} &= (X_{i\delta}^T X_{i\delta})^{-1} X_{i\delta}^T Y_{i\delta} = (X^T (C^T)^{-1} X)^{-1} X^T (C^T)^{-1} C^{-1} Y = \\ &= (X^T \Sigma_0^{-1} X)^{-1} (X^T \Sigma_0^{-1} Y) \end{aligned}$$

$$\Sigma_{b_{OMHK}} = \sigma_0^2 (X_{np}^T X_{np})^{-1} = \sigma_0^2 (X^T \Sigma_0^{-1} X)^{-1}$$

$$S_{\hat{\beta}}^2 = \frac{1}{n-k-1} (Y_{i\delta} - X_{i\delta} b_{OMHK})^T (Y_{i\delta} - X_{i\delta} b_{OMHK}) = (Y - X b_{OMHK})^T \Sigma_0^{-1} (Y - X b_{OMHK})$$

$$\hat{R}^2 = 1 - \frac{\bar{e}^T \Sigma_0^{-1} \bar{e}}{(\bar{Y} - \bar{Y}_{cp})^T \Sigma_0^{-1} (\bar{Y} - \bar{Y}_{cp})}$$