Лекция Основные понятия теории графов

1. **Основные определения**
2. **Маршруты, связность, циклы и разрезы**
3. **Ориентированные графы**
4. **Матрицы, ассоциированные с графом**

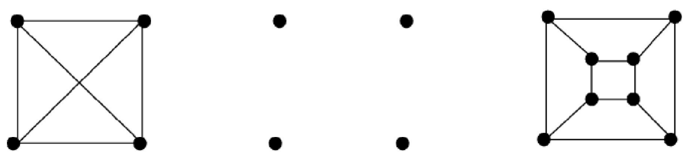
1. Основные определения

V - непустое конечное множество. V^2 - множество всех двухэлементных подмножеств из V .

Обыкновенным графом G называется пара множеств (V, E), где E - произвольное подмножество из $V^{(2)}$.

Элементы множеств V и E называют соответственно вершинами и ребрами графа G.

Множества вершин и ребер графа G обозначаются также через VG и EG.



a) b) c)

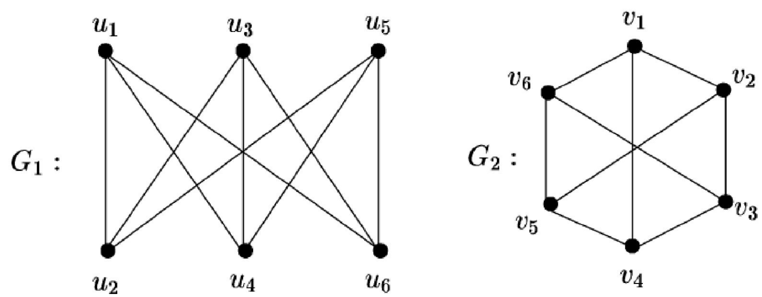
Различные ребра, соединяющие две вершины, называются **кратными**. Ребра, соединяющие вершину саму с собой называют **петлями.**
Обыкновенный граф - это граф без петель и кратных ребер.

Более точно, графом называют тройку (V, E, φ), где V, E- конечные множества, $V \neq \emptyset$ и φ - отображение из E в $V^2 \cup V$. Если $\varphi(e) = \{u, v\}$, где $u \neq v$, то говорят, что ребро e соединяет вершины u, v. В этом случае пишется $e= uv$. Если $\varphi(e) =u$, то ребро e называют петлей в вершине u. В этом случае пишется $e = uu$ и говорится, что e соединяет вершину u саму с собой.

Граф G, имеющий n вершин, называют n-графом; если, кроме того, G содержит m ребер, то G это (n, m) граф.
Если $e = uv$ - некоторое ребро данного графа, то вершины u, v называются ***смежными***; При этом говорят, что u, v - концевые вершины ребра e. Ребро e и вершина v ***инцидентны***, если v - концевая вершина для e. Ребра e и f называются ***смежными***, если они имеют общую концевую вершину.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$- два графа. Биективное отображение $\psi : V_1 \to V_2$ называется ***изоморфизмом*** G_1 на G_2, если для любых $u, v \in V_1$ число ребер, соединяющих вершины u и v в G_1 , равно числу ребер, соединяющих $\psi(u)$ и $\psi(v)$ в G_2 (при $u=v$ число петель в вершине u равно числу петель в вершине $\psi(u)$).

Графы G_1 и G_2 изоморфны ($G_1 \cong G_2$), если существует **изоморфизм** G_1 на G_2.
Действительно, отображение ψ, определенное правилом $\psi\ (u_i) = v_i\ (1 \le i \le 6)$, очевидно, является **изоморфизмом**.



Степенью вершины v называется число ребер, инцидентных этой вершине, причем каждая петля учитывается дважды. Степень вершины ***v*** обозначается через $deg_G\ v$ или просто через ***deg v***. В обыкновенном графе степень вершины ***v*** равна количеству вершин, смежных с ***v***. ***Окружением N(v)*** вершины ***v*** называется множество всех вершин, смежных с ***v***.

Если ***deg v=0***, то вершина ***v*** называется ***изолированной***, а если ***deg v=1***, то - ***висячей***. Ребро ***e***, инцидентное висячей вершине, также называют **висячим.**

Лемма 1 (о рукопожатиях). Пусть G - произвольный граф. Тогда:

$$\sum_{v \in VG} deg\ v = 2|EG|$$

Следствие. Произвольный граф содержит четное число вершин нечетной степени.

Граф называется ***одноэлементным***, если он имеет единственную вершину.
Граф ***G*** называется ***нулевым*** или ***вполне несвязным***, если множество его ребер ***EG*** пусто. Нулевой ***n***-граф обозначается через ***0n***. Нулевой граф является обыкновенным графом.
Обыкновенный граф ***G*** называется ***полным графом***, если любые его две различные вершины смежны. Для полного ***n***-графа применяется обозначение ***Kn***. На **рис. а)** изображен полный граф K_4. Очевидно, степень каждой вершины в графе K_n равна $n - 1$. Поэтому из леммы о рукопожатиях следует, что число ребер в ***Kn*** равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Граф G называют ***двудольным***, если множество VG можно разбить на два непустых подмножества X и $У$ так, что любое ребро графа соединяет вершину из X с вершиной из $У$. Множества X и $У$ - это доли двудольного графа G. Если любые вершины $x \in X$ и $y \in У$ смежны и двудольный граф является обыкновенным графом, то G называют **полным двудольным графом**. Если $|X|= p$, $|Y|= q$, то такой полный двудольный граф обозначают через $K_{p,q}$.

Граф H называется **подграфом** графа G, если $VH \subseteq VG$ и $EH \subseteq EG$. В число подграфов графа G включается и пустой подграф $\emptyset$.

Если $VH = VG$, то подграф H называется ***остовным*** подграфом.

Редукция графа G - это такой его ***остовный*** подграф H, что H является обыкновенным графом с наибольшим возможным числом ребер.

Пусть U-подмножество из VG. Обозначим через D множество всех ребер $e=uv \in EG$ таких, что $u, v \in U$. Граф $G(U) =(U, D)$ называется **подграфом, порожденным множеством вершин** U.

Аналогично определяется подграф, порожденный заданным множеством ребер. Пусть $D \subseteq EG$. Обозначим через U множество всех вершин, являющихся концевыми для ребер из D. Тогда граф $G(D) = (U, D)$ называют ***подграфом, порожденным множеством ребер*** D.

Пусть G - произвольный граф и H - его подграф. С каждой вершиной v и каждым ребром e можно связать подграфы $H - v$, $H - e$ и $H + e$. Подграф $H - v$ получается из подграфа **H** удалением вершины v и всех инцидентных этой вершине ребер. Отметим, что если v не лежит в подграфе H, то $H - v =H$.

Подграф $H - e$ получается из H удалением ребра e. Здесь также $H - e= H$, если e не лежит в H.

Подграф $H + e$ получается из H добавлением ребра e и двух его концевых вершин. Если e лежит в H, то $H+ e= H$.

Через $Sub(G)$ обозначается множество всех подграфов графа G.

Определим отношение $\leq$ на $Sub(G)$, полагая $H_1 \leq H_2$ для подграфов H_1 и H_2 графа G тогда и только тогда, когда H_1 является подграфом в H_2 , т. е. когда $VH_1 \leq V H_2$ *и* $EH_1 \leq EH_2$. Очевидно, отношение $\leq$; есть частичный порядок на $Sub(G)$. Будем говорить, что H_1 ***содержится*** в H_2 , если $H_1 \leq H_2$.

2 Маршруты, связность, циклы и разрезы

Маршрутом в графе ***G*** называется чередующаяся последовательность вершин и ребер v_0, e_1, v_1, · · ·, v_{t-1}, e_t, v_t, в которой $e_i = v_{i-1} v_i$ $(1 \le i \le t)$. ***Его*** называют (v_0, v_t)-маршрутом. Он соединяет v_0 с v_t . Вершины v_0, v_t - это концевые вершины маршрута. Маршрут изображают в виде $v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \ldots \xrightarrow{e_t} v_t$. Стрелки указывают порядок следования вершин в маршруте.

Длиной маршрута называют количество содержащихся в нем ребер. В обыкновенном графе маршрут полностью определяется последовательностью v_0, v_1,…, v_t своих вершин. Если $v_0 = v_t$,то (v_0, v_t) - маршрут называется ***замкнутым.*** В произвольном маршруте любое ребро и любая вершина могут повторяться.

Частные виды маршрутов.

Цепь - это маршрут без повторяющихся ребер.

Цепь называется ***простой цепью***, если в ней нет повторяющихся вершин кроме, быть может, совпадающих концевых вершин. Замкнутая простая цепь называется ***циклом.*** Цикл полностью определяется множеством своих ребер, поэтому часто под циклом понимается соответствующее ему множество ребер. Петля дает цикл длины 1, пара кратных ребер образует цикл длины 2. Циклы длины 3 называют треугольниками.

Лемма 1. Если для некоторых вершин ***u, v*** в графе существует ***(u, v)***-маршрут, то существует и простая ***(u, v)***-цепь.

Граф ***G*** называется ***связным***, если для любых двух различных вершин ***u, v*** существует ***(u, v)*** -маршрут.

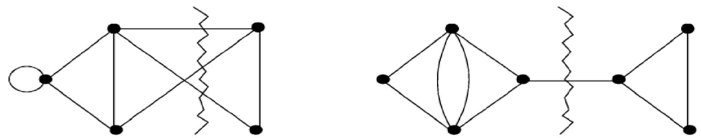
Произвольный граф можно получить как объединение связных графов. С этой целью на множестве вершин ***VG*** графа ***G*** определяется отношение связности ~, полагая $u \sim v \Leftrightarrow$ существует ***(u, v)***-маршрут. Это отношение является отношением эквивалентности.

Обозначим через V_1 , V_2 ,…, V_k классы этого отношения. Пусть $G_i = G(V_i)$ - подграф, порожденный множеством вершин v_i $(1 \le i \le k)$. Графы G_1, G_2 ,…, G_k называются компонентами связности графа ***G***. Каждая компонента связности является связным подграфом. Каждый связный подграф графа ***G*** является подграфом некоторой его компоненты связности. Поэтому множество компонент связности - это множество всех максимальных связных подграфов данного графа, и любое ребро принадлежит некоторой компоненте связности. Граф, имеющий ***n*** вершин, ***m*** ребер и ***k*** компонент связности, называется ***(n, m, k)***-графом.

Алгоритм определения числа связности (компонент связности) графа.

Выбирается любая вершина графа. Находятся все вершины соединенные маршрутом с ней. Удаляются все эти вершины и инцидентные с ними ребра. Величина компоненты связности увеличивается на единицу. Это осуществляется до тех пор пока в графе остается хотя бы одна вершина.

Разрезающим множеством ребер графа называется множество ребер, удаление которого из графа приводит к увеличению числа компонент связности. Минимальное по включению разрезающее множество ребер графа называется его ***разрезом***. ***Мост графа*** - это ребро, составляющее одноэлементный разрез.



$a)$ $b)$

Лемма. При удалении из графа моста число компонент связности увеличивается на единицу.

Лемма. При удалении из графа ребер его разреза число компонент связности увеличивается на единицу.

Для произвольного ребра графа $\boldsymbol{G}$ есть две возможности: либо $\boldsymbol{e}$ содержится в некотором цикле графа, либо $\boldsymbol{e}$ не содержится ни в каком цикле графа. В первом случае ребро $\boldsymbol{e}$ называют циклическим ребром, а во втором - ациклическим.

Лемма. Ребро графа является мостом тогда и только тогда, когда оно не содержится ни в одном цикле.

Поэтому, что ациклические ребра - это мосты.

Лемма. Пусть множество вершин связного граф $\boldsymbol{G}$ разбито на два не пустых непересекающихся подмножества $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{W}$. Тогда существует такое ребро $\boldsymbol{e= uw}$, что $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$ $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$.

Теорема Пусть $\boldsymbol{G}$ - обыкновенный ***(n, m, k)*** - граф. Тогда выполнено двойное неравенство:

$$\boldsymbol{n\text{-}k \le m \le \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}}$$

Следствие . Пусть G обыкновенный ***(n, m)*** -граф. Если $\boldsymbol{m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}}$, то граф $\boldsymbol{G}$ связен

3. Ориентированные графы

Пусть V, D- произвольные множества, причем $V \neq \emptyset$. V^2 декартов квадрат множества V. Ориентированным графом или орграфом G называется тройка (V, D, φ), где φ - некоторое отображение множества D в множество V^2. Элементы множеств V и D называются соответственно вершинами и дугами орграфа G. Множества вершин и дуг орграфа G обозначаются через VG и DG . Если f - дуга, то $\varphi(f)$ является упорядоченной парой (u, v), где $u, v \in V$. Дуга f выходит из вершины u и заходит в вершину v, в свою очередь u и v называются концевыми вершинами дуги f, ($f = \overrightarrow{uv}$).

С каждым орграфом $G = (V, D)$ естественно связать граф $G_0 = (V, E)$, называемый основанием данного орграфа. Для получения основания необходимо в орграфе G заменить каждую дугу $f = \overrightarrow{uv}$ ребром $e = uv$.

Орграф G называется **связным**, если связным является его основание.

Ориентированным маршрутом или ***ормаршрутом*** в орграфе G называется чередующаяся последовательность вершин и дуг $v_0, f_1, v_1, \cdots, v_{t-1}, f_t, v_t$, в которой $f_i = \overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ $(1 \leq i \leq t)$.

Вершины v_0 и v_t называются соответственно начальной и конечной вершинами ормаршрута. Если $v_0 = v_t$, то ормаршрут называют замкнутым. Количество дуг, составляющих ормаршрут называют длиной ормаршрута. Ормаршрут, не содержащий повторяющихся дуг, называют ***орцепью***. ***Простая орцепь*** - это орцепь без повторяющихся вершин (кроме, быть может, совпадающих начальной и конечной вершин). Замкнутая простая орцепь называется ***орциклом*** или ***контуром***.

Существование (u, v) ормаршрута гарантирует существование простой (u, v) -орцепи.

Вершина v достижима из вершины u, если существует (u, v) ормаршрут. Орграф G сильно связен или орсвязен, если любая его вершина достижима из любой другой вершины. Очевидно, сильно связный орграф является связным; обратное утверждение не верно.

Граф G называется ***ориентируемым***, если он является основанием некоторого сильно связного орграфа.

Теорема Связный граф G ориентируем тогда и только тогда, когда каждое его ребро не является мостом.

Полустепенью исхода $\overleftarrow{deg\ v}$ вершины v называется число дуг, имеющих v в качестве начала. Аналогично, ***полустепень*** захода $\overrightarrow{deg\ v}$ это число дуг, для которых вершина v является концом. Орграф, содержащий n вершин и m дуг называется (n, m) орграфом.

Полустепени исхода и полустепени захода связаны следующим образом:

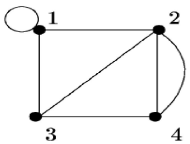
Лемма . Пусть G - произвольный (n, m) -орграф. Тогда

$$\sum_{v=VG} \overrightarrow{dev\ v} = \sum_{v=VG} \overleftarrow{dev\ v} = m.$$

3. Матрицы, ассоциированные с графом

Пусть G - произвольный n-граф. Упорядочим множество вершин графа $VG=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Граф, у которого множество вершин линейно упорядочено или занумеровано натуральными числами от 1 до n, где n - число вершин графа, называется ***помеченным*** графом.

Определим ***матрицу смежности*** $A = A(G) = (\alpha_{ij})_{nxn}$ графа G, полагая α_{ij} равным числу ребер, соединяющих вершины v_i и v_j, причем при $i = j$ каждую петлю учитываем дважды.



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица смежности - это квадратная симметрическая n матрица. Сумма элементов i-й строки равна $deg\ v_i$, т. е. $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = deg\, v_i$

Для обыкновенных графов матрица смежности бинарна, состоит из нулей и единиц Ее главная диагональ целиком состоит из нулей. Для графа имеется несколько матриц смежности, отвечающих различным его упорядочениям. Одна матрица смежности получается из другой с помощью некоторой перестановки строк и точно такой же перестановки столбцов. Матрицы смежности одного графа G изоморфны.

Теорема Пусть $A = (\sigma_{ij})_{nxn}$ - матрица смежности графа G без петель и $A^l=(\gamma_{ij})_{nxn}$, где $l \in \mathbb{N}$. Тогда γ_{ij} равно числу (v_i, v_j) - маршрутов длины l.

Алгоритм вычисления матрицы достижимости орграфа. (алгоритм Уоршелла)

Этот алгоритм вычисляет матрицу достижимости $W=M^*$ ориентированного графа $G = (V, E)$ с матрицей смежности M.

За каждый проход цикла (пронумерованный индексом **k**) алгоритм Уоршелла генерирует матрицу W_k используя элементы предыдущей матрицы W_{k-1} . Чтобы найти i-ую строку матрицы W_k следует вычислить выражения:

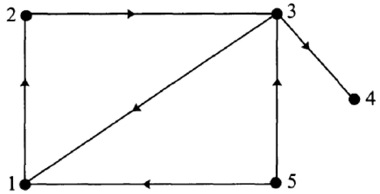
$W_{k-1}(i,j)$ ***или*** $(W_{k-1}(i,k))$ ***и*** $W_{k-1}(k,j))$ (1)

при разных значениях j .

Если $\mathbf{W_{k-1}(i,k)= 0}$, то $(W_{k-1}(i,k)$ **и** $W_{k-1}(k,j)) = 0$, и значение выражения (1) совпадает со значением $W_{k-1}(i,j)$. Иначе говоря, i-ая строка матрицы остается неизменной. В том же случае, когда $W_{k-1}(i,k) = 1$, вычисление выражения (1) сводится к вычислению $(W_{k-1}(i,k)$ **и** $W_{k-1}(k,j))$. При этом i-ая строка получается с помощью логической операции ***или*** из текущей строки i и текущей строки k. При вычислении W_k поступают следующим образом.

1. Берем k-ый столбец матрицы W_{k-1}
2. Строку с номером i $(i= 1, \dots, n)$, у которой на k-ом месте стоит 0, переписываем в i-ую строку матрицы W_k
3. Строку с номером i $(i= 1, \dots, n)$, у которой на k-ом месте стоит 1, объединяем с помощью операции ***или*** с k-ой строкой, а результат записываем в i-ую строку матрицы W_k.

Пример: с помощью ***алгоритма Уоршелла*** вычислить матрицу достижимости орграфа, изображенного на ***рис.***



Матрица W_0 совпадает с матрицей смежности данного орграфа.

$$W_0 = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Теперь вычисляем W_1. Учитывая первый шаг, мы рассматриваем ***1***-ый столбец матрицы W_0. Следуя указаниям шага ***2***, скопируем строки матрицы W_0 с номерами ***1, 2*** и ***4*** в матрицу W_1 на те же места. Таким образом,

$$W_1 = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{matrix}$$

Согласно шагу ***3***, строка с номером ***3*** матрицы W_1 получается с помощью логической операции ***или*** из **3**-ей и **1**-ой строк матрицы W_0.

$$W_1 = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{matrix}$$

шаг ***3*** алгоритма для вычисления ***5***-ой строки матрицы W_1 с помощью операции или, примененной к ***5***-ой и ***1***-ой строкам матрицы W_0.

$$W_1 = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Матрица W_1 вычислена. Теперь строим матрицу W_2 по матрице W_1. ***2***-ой столбец матрицы W_1 показывает, что строки с номерами ***2*** и ***4*** копируются в W_2. Первая строка матрицы W_2 - результат применения операции ***или*** к ***1***-ой и ***2***-ой строкам из W_1, Третья строка в W_2 получается спариванием ***3***-ей и ***2***-ой строк матрицы W_1. И, наконец, пятая строка W_2 - результат логической операции или, примененной к ***5***-ой и ***2***-ой строкам W_1, Значит

$$W_2 = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Отметим, в частности, что на пересечении ***3***-ей строки и ***3***-го столбца матрицы W_2 стоит ***1***. Это означает, что существует контур, начинающийся и заканчивающийся в вершине ***3***, проходящий через одну или обе вершины с номерами ***1*** и ***2***. Посмотрев на изображение орграфа **(рис.)**, убеждаемся, что действительно существует контур длины ***3: 3 1 2 3***.

Аналогичным образом вычисляется матрица W_3.

$$W3 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Поскольку из вершины ***4*** не выходит ни одной дуги, то мы не сможем построить ни одного пути, проходящего через вершину ***4***. Следовательно, матрица W_4 совпадает с W_3. Кроме того, в орграфе отсутствуют дуги, ведущие в вершину 5. Значит нет и путей, через нее проходящих, т.е. $W_5 = W_4$. Наконец, $W_5 = M^*$, поскольку граф состоит только из пяти вершин.

Пусть теперь ***G*** - произвольный обыкновенный граф. Упорядочим множество его вершин $VG=\{ v_1 , v_2 ,\dots, v_n\}$.

Определим ***матрицу Кирхгофа*** B= B(G) = $(\beta_{ij})_{nxn}$, полагая

$$B(G)=\begin{pmatrix} \deg v_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \deg v_n \end{pmatrix}-A(G),$$

где A(G)- матрица смежности графа G. Иными словами,

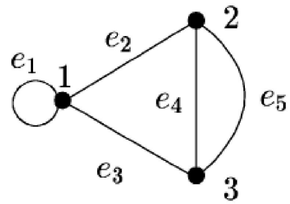
$$\boldsymbol{\beta_{ij}} = \begin{cases} \mathbf{-1}, \text{если} & \boldsymbol{i \neq j} \text{ и } \boldsymbol{v_i} \text{ смежна } \boldsymbol{v_j}, \\ \mathbf{0}, \text{если} & \boldsymbol{i \neq j} \text{ и } \boldsymbol{v_i} \text{ не смежна } \boldsymbol{v_j}, \\ \boldsymbol{deg\, v_i}, \text{если} & \boldsymbol{i = j}. \end{cases}$$

Определим бинарную ***матрицу инцидентности*** $I = I(G) = (i_{ij})_{nxm}$ графа G, полагая:

1) $i_{ij} = 1$ - вершина v_i инцидентна ребру e_j и e_j не является петлей;

2) $i_{ij} = 0$ во всех остальных случаях.

На **рис.** приведен пример графа и его матрицы инцидентности. Здесь вершинам отвечают строки, а ребрам - столбцы. Заметим, что одна матрица инцидентности графа G получается из другой его матрицы инцидентности с помощью некоторой перестановки строк и некоторой перестановки столбцов.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим произвольный (n, m) -орграф $G = (V, D)$. Упорядочим множество вершин и множество дуг орграфа $V=\{v_1, v_2,\ldots, v_n\}$ *и* $D=\{f_1, f_2,\ldots, f_m\}$.

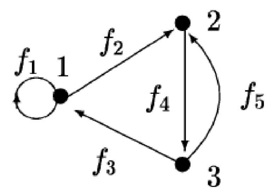
Определим матрицу инцидентности $I = I(G) = (i_{ij})_{nxm}$ орграфа G, полагая

1) $i_{ij} = 1$, если v_i - начало дуги f_j и f_j- не петля;

2) $i_{ij} = -1$ если v_i ·- конец дуги f_j и f_j - не петля;

3) $i_{ij} = 0$ во всех остальных случаях.

На **рис.** приведен пример орграфа и его матрицы инцидентности. Здесь вершинам отвечают строки, а дугам - столбцы.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Превратим каждое ребро произвольного графа G в дугу, придав ребру одно из двух возможных направлений. Полученный орграф на том же самом множестве вершин будем называть ***ориентацией*** графа G.

Зафиксируем некоторый обыкновенный граф G и возьмем некоторую его ориентацию H. Кроме того, зафиксируем в G и H одинаковую нумерацию вершин и одинаковую нумерацию соответствующих ребер и дуг.

Лемма 2. Пусть $B= B(G)$ -матрица Кирхгофа обыкновенного графа G и $I = I(H)$ - соответствующая матрица инцидентности некоторой его ориентации H. Тогда $B = I*I^t$.