

## **Факультет фундаментальной подготовки**

### **Кафедра теоретических основ связи и радиотехники (ТОС и Р)**

располагается на 6-м этаже

В аудиториях №607, №609, №611, 613.

Дисциплина

## **Общая теория связи**

*Лектор:*

Заведующий кафедрой ТОС и Р  
**Шумаков Павел Петрович**

# Лекция № 3

## Векторные и спектральные модели сигналов в инфотелекоммуникации

### Учебные вопросы:

1. Векторные модели сигналов. Обобщенный ряд Фурье.
2. Спектры периодических сигналов.
3. Спектры непериодических сигналов.
4. Теоремы о спектрах.

## Литература:

**Стр. 28..37; 37..40; 40..52**

**Используя MathCAD рассчитать и построить энергетические спектры для импульсных сигналов из таблицы 2.1 на стр. 45.**

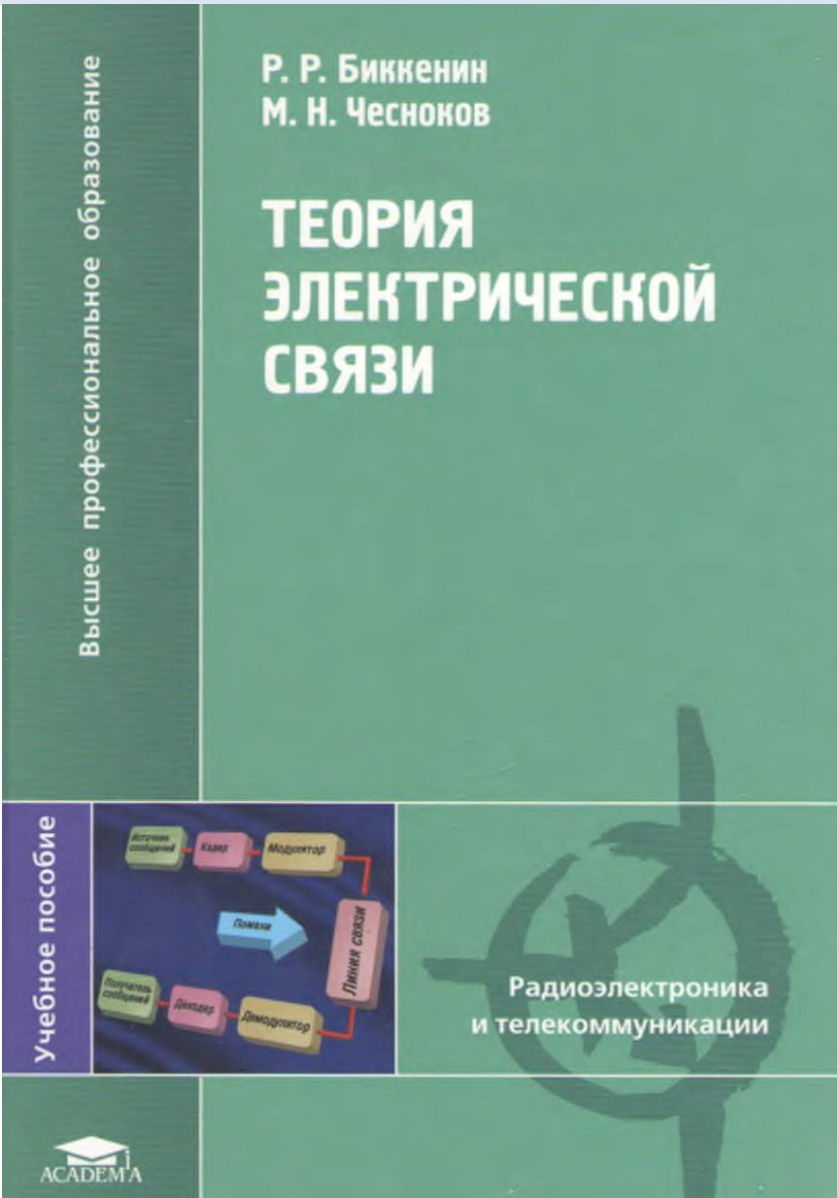
**Четные номера : треугольный (2) и косинусоидальный (3).**

**Нечетные номера : Прямоугольный (1) и SINC-образный (5).**

**Используя MathCAD рассчитать и построить энергетические спектры для импульсных сигналов вида:**

**Четные номера : пилообразный возрастающий.**

**Нечетные номера : пилообразный ниспадающий.**



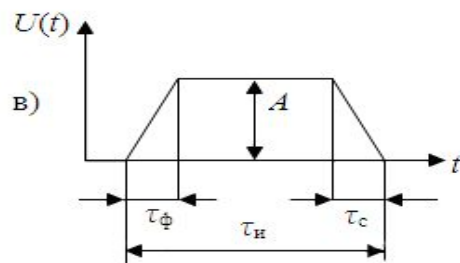
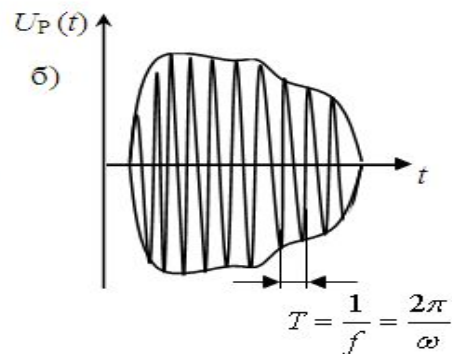
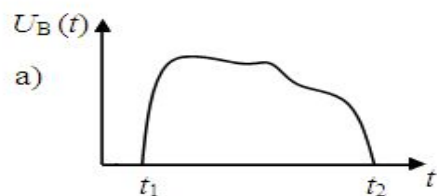
## **Задание на самостоятельную отработку**

**Теория электрической связи: учебное пособие для студентов высших учебных заведений**

/Биккенин Р. Р., Чесноков М. Н. –М.: Издательский центр «Академия», 2010.

-28-37;37-40;40-52 с.

# Импульсные сигналы: а) видеоимпульсы; б) радиоимпульсы



$$U_P(t) = U_B(t) \cos(\omega t + \varphi)$$

$U_B(t)$  — огибающая радиоимпульса

$\omega$  — опорная (несущая) частота

$\varphi$  — фаза

**Вопрос №1. Векторное представление сигнала. Понятие базиса, нормы, скалярного произведения сигналов, ортогональности сигналов, ортонормированного базиса сигналов.**

Сигналы могут быть одномерными  $U_1(t)$ , и многомерными  $\{U_N(t)\}$ ,

Многомерный (векторный) - сигнал образованный упорядоченным множеством одномерных сигналов  $V(t) = \{U_1(t), U_2(t), \dots, U_N(t)\}$ ,  
 $N$  — размерность сигнала.

## Пространство сигналов

Множество сигналов  $M = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)\}$  обладающих определенными свойствами называется **пространством** сигналов. Структура пространства сигналов определяется

### Алгебраическая структура пространства сигналов

Множество сигналов образует **Вещественное Линейное Пространство Сигналов L**

если справедливы следующие аксиомы:

1. Все сигналы при любом времени  $t$  принимают только вещественные значения.

2. Сумма любого числа сигналов данного множества также принадлежит этому множеству, при чем эта сумма подчиняется свойствам: для  $x = Si(t)$   $y = Sj(t)$

✓  $x + y = y + x$  — коммутативность;

✓  $x + (y + z) = (x + y) + z$  — ассоциативность;

✓  $x + \emptyset = x$ , где  $\emptyset$  — нулевой элемент;

✓  $x + (-x) = 0$ , где  $-x$  — противоположный элемент.

3. Умножение сигнала на скаляр (число)  $\alpha$  определяет новый сигнал принадлежащий исходному множеству  $\alpha s_i(t) \in M$ .

4. Операция умножения на скаляр подчиняется свойствам:

□  $\alpha(bx) = (\alpha b)x$

□  $1x = x$

□  $(\alpha + b)x = \alpha x + bx$

□  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

- Если  $a$  будет произвольным комплексным числом, то множество сигналов образует
- Комплексное Линейное Пространство Сигналов  $S$ .
- Элементы структурированного пространства в математике называются точками, функциями, **векторами.**



## Геометрическая структура пространства сигналов

### Норма сигнала .

Эквивалентом длины вектора для аналоговых и дискретных сигналов является *норма*

Для вещественного сигнала норма определяется :  $\|s(t)\| = \sqrt{\int_T s^2(t) dt}$

Для комплексного сигнала норма определяется :  $\|s(t)\| = \sqrt{\int_T s(t) s^*(t) dt}$

Норма подчиняется следующим аксиомам:

$$\|s(t)\| \geq 0 \quad \|\alpha \cdot s(t)\| = \|\alpha\| \cdot \|s(t)\| \quad \|s_1(t) + s_2(t)\| \leq \|s_1(t)\| + \|s_2(t)\|$$

Если  $\mathbf{S}$  — это вектор, то норма — это его длина или расстояние от конца вектора до начала координат.

### Энергия сигнала

Пусть  $s(t)$  — напряжение на резисторе с сопротивлением в 1 Ом, тогда  $s^2(t)$  — мгновенная мощность, а квадрат нормы — есть энергия, выделяемая на резисторе за время  $T$ .

$$\|s(t)\|^2 = \int_T s^2(t) dt = E_s$$

## Геометрическая структура пространства сигналов

### *Метрика пространства сигналов*

Для усовершенствования структуры пространства вводится *расстояние* между его элементами, которое называют также *метрикой*.

Каждой паре элементов пространства ставится в соответствие положительное число, которое трактуется как расстояние между элементами. В качестве расстояния используется функционал  $d(x,y) \in \mathbb{R}$ , называемый *метрикой* и обладающий следующими свойствами:

- $d(x,y) \geq 0$  и  $d(x,y) = 0$ , только если  $x = y$ ;
- $d(x,y) = d(y,x)$  – свойство симметрии;
- $d(x,y) < d(x,z) + d(z,y)$  – неравенство треугольника.

В качестве метрики можно выбрать величину

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Линейное метрическое пространство с квадратичной нормой обозначается:

Вещественное  $L_2$       комплексное  $C_2$

## Геометрическая структура пространства сигналов

### Скалярное произведение сигналов

Найдем энергию суммы двух сигналов  $u(t)$  и  $v(t)$ .

$$\|u(t) + v(t)\|^2 = \int_T u(t)^2 dt + \int_T v(t)^2 dt + 2 \int_T u(t)v^*(t) dt$$

Если сигналы рассматривать как вектора  $U$  и  $V$  получим

$$|U + V|^2 = |U|^2 + |V|^2 + 2 \cdot |U| \cdot |V| \cos(\varphi)$$

Где  $(U, V) = |U| \cdot |V| \cos(\varphi)$

скалярное произведение двух векторов

$$\varphi = \angle UV$$

угол между векторами

Сопоставляя сигналы с векторами в пространстве  $L_2$  получим что скалярное произведение двух сигналов

$$(u(t), v(t)) = \int_T u(t)v^*(t) dt = \|u(t)\| \cdot \|v(t)\| \cdot \cos(\varphi)$$

## Свойства скалярного произведения сигналов

Для комплексных сигналов скалярное произведение должно удовлетворять следующим условиям:

$(x, y) = (y, x)^*$ , где знак \* означает комплексно сопряженную величину;

$(ax, y) = a(x, y)$ ;

$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ ;

$(x, x) \geq 0$ .

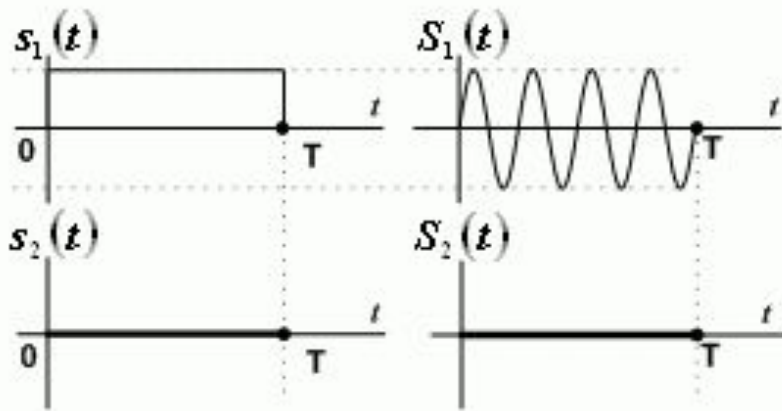
### Ортогональность двух сигналов

Если

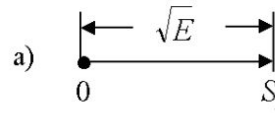
$$\varphi = \angle UV = 90 \quad [\text{градусов}] \quad \varphi = \angle UV = \frac{\pi}{2} \quad [\text{радиан}]$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

то скалярное произведение двух сигналов равно нулю, значит взаимная энергия этих сигналов равна нулю, а такие сигналы - **ортогональные**.



Сигналы с пассивной паузой

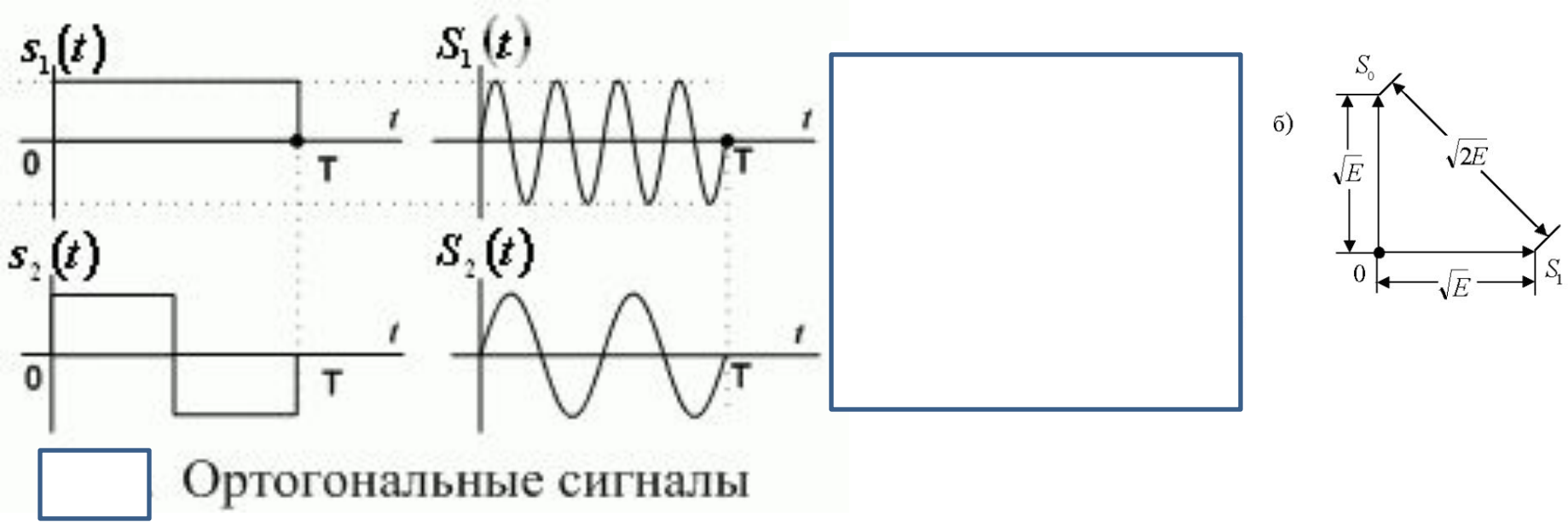


Если  $S_2(t) = 0$  то имеем систему передачи с пассивной паузой

$$S_1(t) = U_c \sin(\omega_0 t + \phi), \quad t \in [0, T], \quad S_1(t) = 0$$

$$(S_0, S_1) = \frac{1}{T} \int_0^T S_0(t) S_1(t) dt = 0$$

$$d^2(S_0(t), S_1(t)) = \int_0^T S_0^2(t) dt = E_1$$



$$S_1(t) = U_c \cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad t \in [0, T], \quad S_2(t) = U_c \cos(\omega_2 t + \phi_2).$$

Пусть  $\omega_1 = 2\pi k_1 / T$ ,  $\omega_2 = 2\pi k_2 / T$ , где  $k_1$  и  $k_2$  — целые числа,  $\phi_1$  и  $\phi_2$  принимают любые значения. Тогда:

$$(S_1, S_2) = \frac{1}{T} \int_0^T S_1(t) S_2(t) dt = \frac{1}{T} U_1 \cdot U_2 \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T} k_1 t + \phi_1\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} k_2 t + \phi_2\right) dt = 0$$

$$d^2(S_1(t), S_2(t)) = \int_0^T [S_1(t) - S_2(t)]^2 dt = \int_0^T S_1^2(t) dt + \int_0^T S_2^2(t) dt - 2 \int_0^T S_1(t) S_2(t) dt = E_0 + E_1 = 2E,$$

## Базисные сигналы

**независимых** сигналов  $\{e_i(t)\}$  таких, что весовая сумма  $\sum \alpha_i e_i = 0$  возможна только при одновременном равенстве нулю всех коэффициентов  $\alpha$ . Эти сигналы называются **координатным базисом**. **Базисные сигналы попарно ортогональные.**

## Обобщенный ряд Фурье

Если выбраны сигналы координатного базиса, то любой сигнал  $s(t)$  в линейном пространстве может быть представлен **взвешенной суммой ортогональных сигналов координатного базиса**

$$\sum C_i e_i(t) = s(t)$$

Такое представление сигнала называется **обобщенный ряд Фурье**.

**Французский математик Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830)**

Весовые коэффициенты этого ряда рассчитываются как скалярное

произведение сигнала  $s(t)$  и соответствующего  $i$ -того базисного сигнала  $e_i(t)$ :



$$C_i = (s(t), e_i(t)) = \frac{1}{\|e_i\|^2} \int_T s(t) e_i^*(t) dt = \|s(t)\| \cdot \|e_i(t)\| \cdot \cos(\varphi) = \|s(t)\| \cdot \cos(\varphi)$$

Совокупность коэффициентов обобщенного ряда Фурье  $\{C_i\}$  называется **спектром** сигнала  $s(t)$  в базисе ортогональных сигналов  $\{e_i(t)\}$

## Выводы по первому вопросу

- 1. Сигналы в радиотехнике рассматриваются как проявления электромагнитного поля в элементах радиотехнических цепей в виде колебаний напряжения или тока.**
- 2. Обобщенной математической моделью сигналов является их описание как элементов функционального пространства (векторов).**
- 3. вещественные и комплексные сигналы можно рассматривать как элементы множества векторного линейного нормированного метрического пространства.**
- 4. Скалярное произведение двух сигналов по физическому смыслу представляет собой взаимную энергию между двумя сигналами, действующими суммарно на сопротивление в один Ом.**
- 5. Скалярное произведение двух сигналов определяется углом между ними. Если угол между двумя сигналами равен 90 градусов то скалярное произведение равно нулю, и такие сигналы являются ортогональными.**
- 6. Набор ортогональных сигналов называется координатным базисом пространства сигналов.**
- 7. При известном базисе, любой сигнал можно представить взвешенной суммой сигналов ортогонального базиса в виде обобщенного ряда Фурье. Весовые коэффициенты этого ряда называются спектром сигнала.**



**Вопрос 2. Спектры периодических сигналов.**

✓ Периодическим называют сигнал, мгновенные значения которого повторяются через равные промежутки времени –  $T$

✓ Модель такого сигнала имеет вид  $s(t) = s(t + k \cdot T)$ ,

где  $T$  – период повторения, а  $F=1/T$  – частота повторения периодического сигнала (ПС)

✓ Основной математический аппарат спектрального анализа таких сигналов – ряд Фурье в базисе гармонических сигналов с кратными частотами.

**Формы спектрального представления периодического сигнала****Квадратурная**

$$s(t + k \cdot T) = s_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) \right\}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} S(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt -$$

**амплитуда синфазных гармоник  
периодического сигнала**

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} S(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt -$$

**амплитуда квадратурных гармоник  
периодического сигнала**

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} S(t) dt -$$

**постоянная составляющая  
периодического сигнала**

## Амплитудно – фазовая форма ряда Фурье

$$s_T(t) = s(t - k \cdot T) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(x_k - \varphi_k)$$

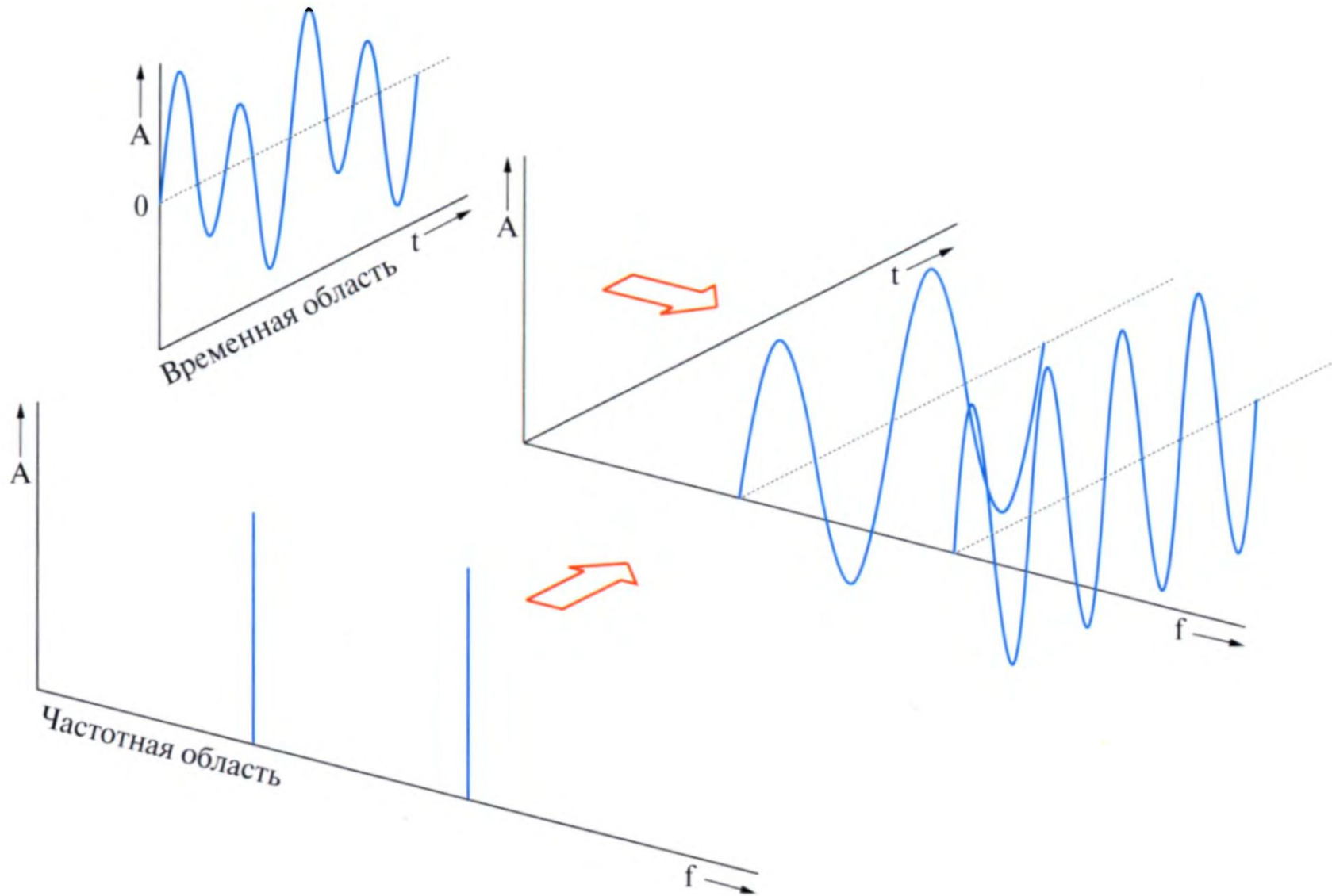
$$a_k \cos x_k + b_k \sin x_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos(x_k - \varphi_k)$$

$$x_k = \frac{2\pi}{T} kt = k2\pi f_1 t = k\omega_1 t = \omega_k t;$$

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = A_k - \text{амплитудно-частотный спектр (АЧС)}$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k} - \text{фазочастотный спектр (ФЧС)}$$

$$a_k = A_k \cos(\varphi_k) \quad b_k = -A_k \sin(\varphi_k)$$



**Сигналы, наблюдаемые во временной и частотной областях**

## Комплексная форма ряда Фурье

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j2}$$

$$s(t + k \cdot T) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_k}{2} \left( e^{j\frac{2\pi}{T}t} + e^{-j\frac{2\pi}{T}t} \right) + \frac{b_k}{j2} \left( e^{j\frac{2\pi}{T}t} - e^{-j\frac{2\pi}{T}t} \right) \right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k - jb_k) e^{j\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k + jb_k) e^{-j\frac{2\pi}{T}t}$$

$$s(t + k \cdot T) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_k e^{-j\varphi_k} e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

## Комплексная форма ряда Фурье

$$C_k = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} S(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

$$A_k = a_k - jb_k, \quad A_{-k} = a_k + jb_k$$

$$a_k = \frac{1}{2} (A_k + A_{-k}), \quad b_k = j \frac{1}{2} (A_k - A_{-k})$$

Модуль

$$|C_k| = \frac{A_k}{2}$$

амплитудно-частотный спектр (АЧС)

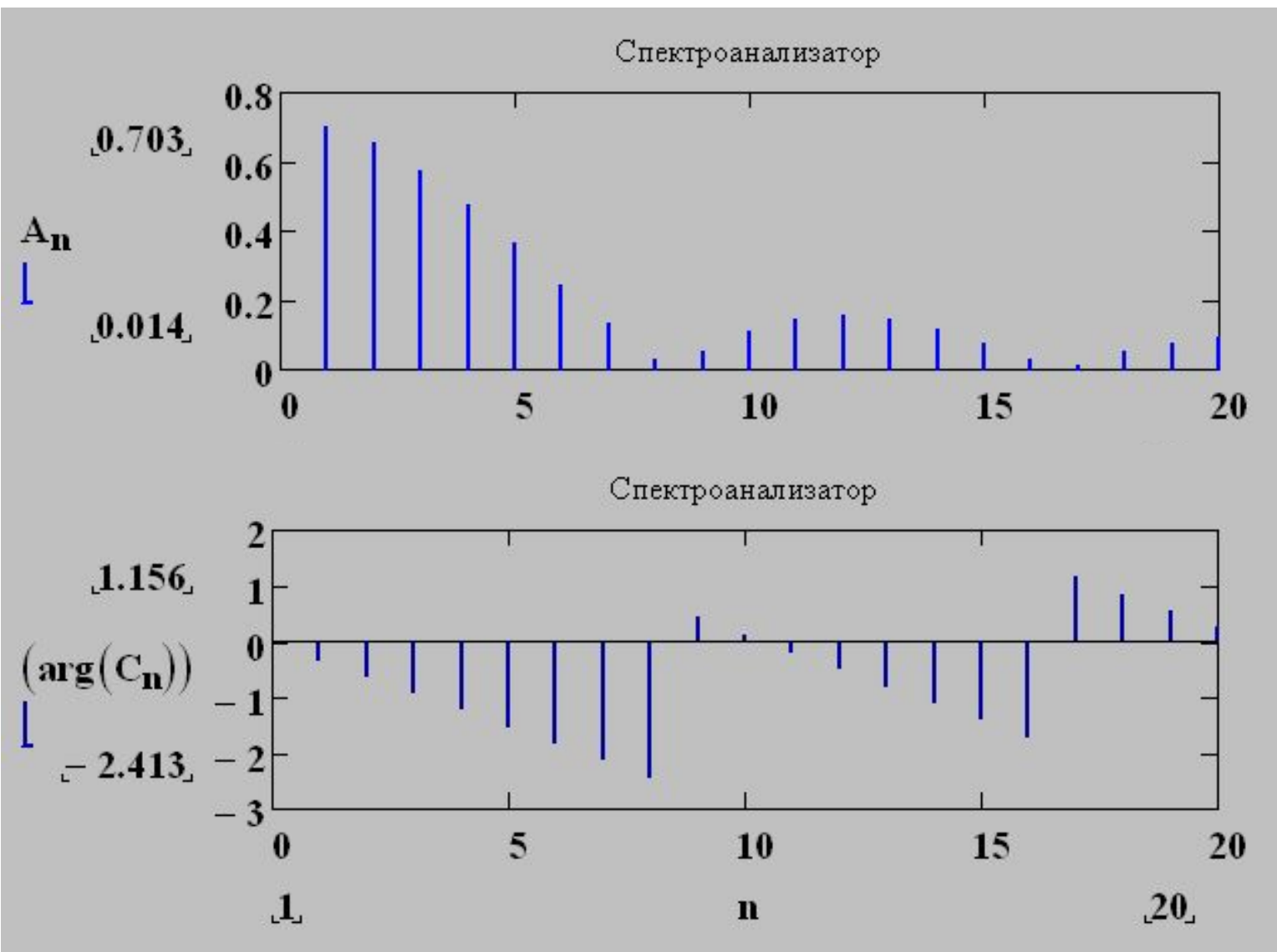
Аргумент

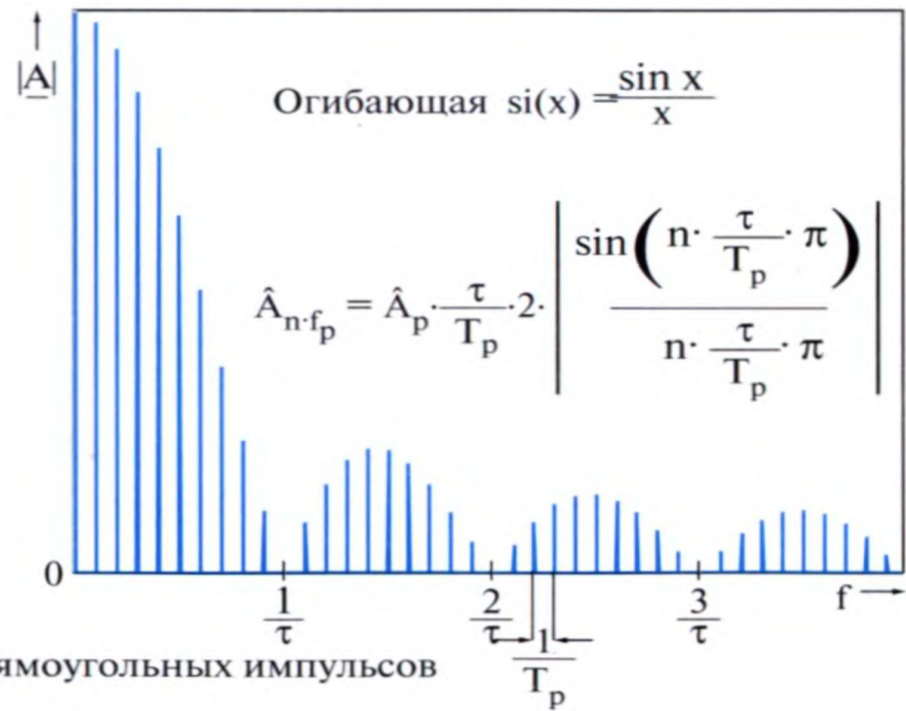
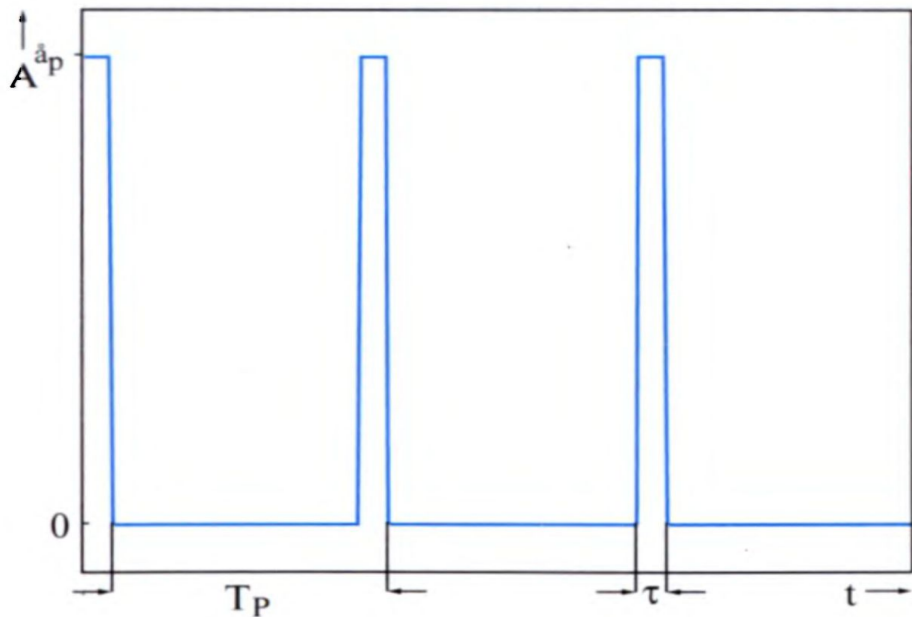
$$\varphi_k = \arg C_k$$

фазочастотный спектр (ФЧС)

АЧС – четная функция частоты (обладает симметрией в области положительных и отрицательных частот)

ФЧС – нечетная функция (обладает центральной симметрией)





Сигнал в виде периодических прямоугольных импульсов

*Периодические сигналы во временной и частотной областях  
(спектр амплитуд)*

### Вопрос 3. Спектры непериодических сигналов.

В подавляющем большинстве случаев в теории и технике связи приходится иметь дело с сигналами, которые по существу являются непериодическими. К таким сигналам аппарат рядов Фурье не применим.

**Модель непериодического сигнала как предельного случая периодического сигнала, когда период стремится к бесконечности**

Устремим в периодическом сигнале  $T \rightarrow \infty$  или  $f_1 = 1/T = \omega_1/2\pi \rightarrow 0$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k T e^{jk\omega_1 t} \Delta\omega$$

где  $\Delta\omega = \omega_1 = [k\omega_1 - (k-1)\omega_1]$  — разность между частотами соседних гармоник

$$S(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} A_k T = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{A_k}{\Delta\omega} 2\pi - \text{спектральная плотность непериодических сигналов}$$



### Вопрос 3. Спектры непериодических сигналов.

В подавляющем большинстве случаев в теории и технике связи приходится иметь дело с сигналами, которые по существу являются непериодическими. К таким сигналам аппарат рядов Фурье не применим.

**Модель непериодического сигнала как предельного случая периодического сигнала, когда период стремится к бесконечности**

Устремим в периодическом сигнале  $T \rightarrow \infty$  или  $f_1 = 1/T = \omega_1/2\pi \rightarrow 0$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k T e^{jk\omega_1 t} \Delta\omega$$

где  $\Delta\omega = \omega_1 = [k\omega_1 - (k-1)\omega_1]$  — разность между частотами соседних гармоник

$$S(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} A_k T = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{A_k}{\Delta\omega} 2\pi - \text{спектральная плотность непериодических сигналов}$$

## Прямое и обратное преобразование Фурье

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad - \quad \text{прямое преобразование Фурье (ППФ)}$$

$$s(t) \xrightarrow{\cdot} S(j\omega)$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad - \quad \text{обратное преобразование Фурье (ОПФ)}$$

**Обратное преобразование Фурье** для сигнала  $s(t)$  - **операция синтеза**, поскольку с ее помощью сигнал восстанавливается (синтезируется) из спектральных составляющих.

**Прямое преобразование Фурье** – **операция анализа** сигнала на основе определения его спектральных составляющих.

## Физический смысл спектральной плотности сигнала

Учитывая чётность модуля  $S(\omega)$  и нечётность фазы  $\varphi(\omega)$ , обратное преобразование Фурье можно записать следующим образом

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi} S(j\omega) d\omega e^{j\omega t} \quad \frac{1}{\pi} S(\omega) d\omega \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{c} \frac{A_m}{d\omega} \quad \frac{1}{c} = \pi$$

**Спектральная плотность сигнала** является комплексной амплитудой эквивалентной гармонике на соответствующей опорной частоте .

Эквивалентная гармоника есть результат когерентного сложения бесконечно большого числа гармоник с бесконечно малыми амплитудами расположенными в бесконечно малом по частоте диапазоне в районе выбранной (опорной) частоты.

## Вопрос 4. Свойства преобразования Фурье

№ п/п	Название теоремы	Временное представление	Спектральное представление
1	Теорема сложения	$S(t) = S_1(t) + S_2(t)$	$S(j\omega) = S_1(j\omega) + S_2(j\omega)$
2	Теорема временного сдвига	$S_1(t) = S(t \boxtimes t_0)$	$S_1(j\omega) = S(j\omega)e^{\boxtimes j\omega t_0}$
3	Теорема смещения (модуляции)	$S_1(t) = S(t)e^{\pm j\omega_0 t}$	$S_1(j\omega) = S(j(\omega \boxtimes \omega_0))$
4	Теорема об изменении масштаба	$S_1(t) = S\left(\frac{t}{a}\right)$	$S_1(j\omega) = aS(ja\omega)$
5	Теорема о дифференцировании	$S_1(t) = \frac{dS(t)}{dt}$	$S_1(j\omega) = j\omega S(j\omega)$
6	Теорема об интегрировании	$S_1(t) = \int_{-\infty}^t S(t)dt$	$S_1(j\omega) = \left(\frac{1}{j\omega}\right)S(j\omega)$
7	Теорема о свёртке	$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\tau)S_2(t-\tau)d\tau = S_1(t) * S_2(t)$	$S(j\omega) = S_1(j\omega)S_2(j\omega)$
8	Преобразование Фурье	$\left\{ \begin{array}{l} S_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t} dt \end{array} \right.$	

## Вопрос 4. Свойства преобразования Фурье

**Теорема сложения спектров гласит: спектр суммы колебаний равен сумме спектров слагаемых колебаний.**

**Теорема временного сдвига (запаздывания) формулируется следующим образом: при сдвиге колебания во времени (изменении начального момента отсчёта времени) спектральная плотность амплитуд сохраняется постоянной, а спектр фаз изменяется на величину, пропорциональную частоте и времени сдвига с учётом его знака.**

**Теорема смещения (модуляции): умножение колебания  $S(t)$  на  $e^{j\omega_0 t}$  приводит к смещению его спектра на величину  $\omega_0$ .**

**Теорема об изменении масштаба: растяжение колебания во времени ( $a > 1$ ) влечёт за собой сжатие его частотного спектра и увеличение спектральной плотности амплитуд. Сжатие колебания во времени ( $a < 1$ ) приводит к расширению его частотного спектра и уменьшению спектральной плотности амплитуд.**

**Теорема о свёртке: свёртка двух колебаний  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$  соответствует перемножению их спектров.**